MINIATURES GÉOMÉTRIQUES

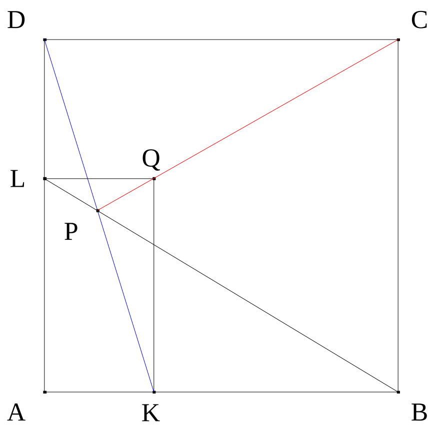
SUR

UN CARRÉ

ADDENDUM I

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur propose un addendum à l'article "Miniatures sur un carré" en présentant 39 nouvelles miniatures.
Progressivement un thème de dégage et des sous-thèmes apparaissent…
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author offers an addendum to article "Miniatures on a square" presenting 39 new miniatures.
Gradually a theme appears and sub-themes come up…
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

---

[1] St-Denis, Île de La Réunion (Océan Indien, France), le 30/11/2013

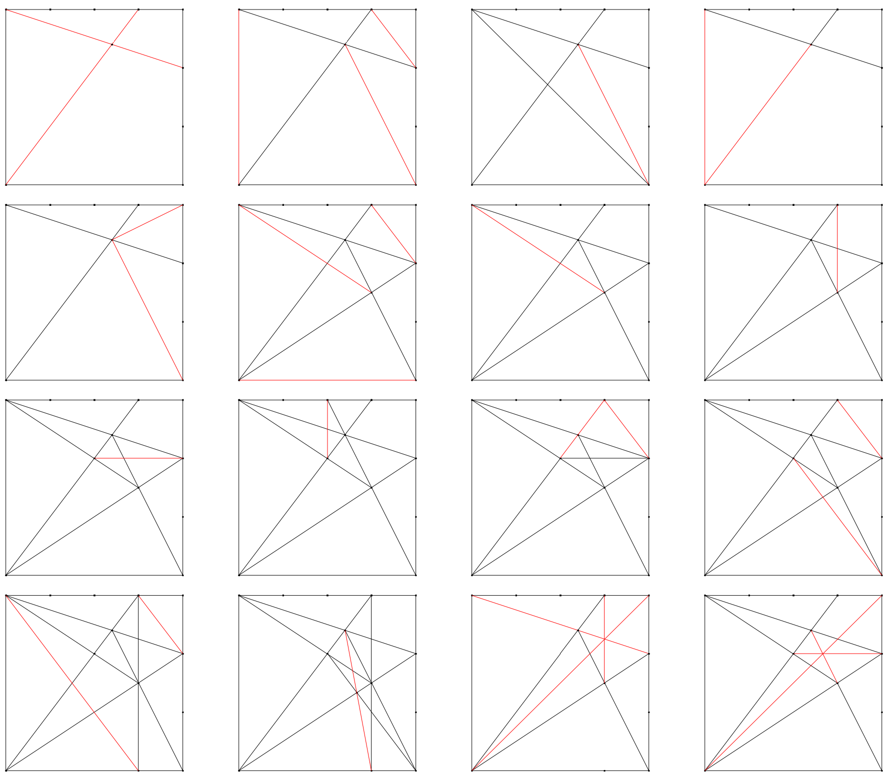
Sommaire

A. UN POINT DE VUE

Les figures présentées par l'auteur lui ont fait penser à des **miniatures** i.e. à des images participant à l'enluminure d'un manuscrit.

Pour un géomètre sensible aux formes, la figure qui lui apparaît dans une **vision** est celle d'un Sujet qu'on appelait autrefois "être" géométrique. En dévoilant ses **traits** essentiels à son regard amical, le Sujet lui laisse gracieusement entrevoir une illumination, voire un théorème. Comme cela est souvent le cas, le géomètre réagit d'une façon belliqueuse en aiguisant son regard qui devient binoculaire. Agressé visuellement, le généreux Sujet se voile dans une configuration en abandonnant un **donné** inerte à la raison du géomètre.

Ayant perdu la vision, celui-ci choisit alors un mode de raisonnement et une méthode géométrique qui lui permettent de visualiser comme un aveugle sa propre démarche. Avec l'aide de techniques particulières qui aplanissent son chemin, il progresse vers le donné qu'il désire s'approprier. Cette démarche raisonnée prend alors l'allure d'un **schéma de démonstration** i.e. d'une **visualisation** lorsque seuls les points principaux et les relations présentes dans la configuration, sont retenus. Ce schéma logico-déductif permet alors de comprendre le cheminement et le projet du géomètre dont le désir est de faire partager avec d'autres, le résultat auquel il est parvenu.



[2]

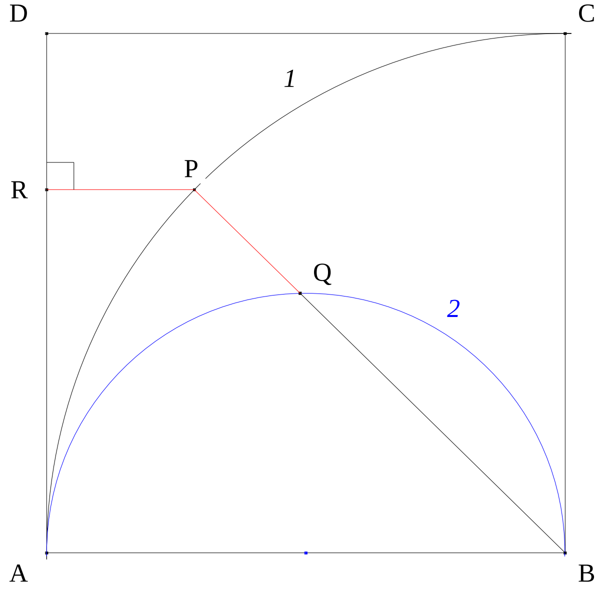
[2] Ayme J.-L., Mosaïque dans un carré, G.G.G. vol. **20** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

B. DES MINIATURES

1. Deux segments égaux

VISION

Figure :

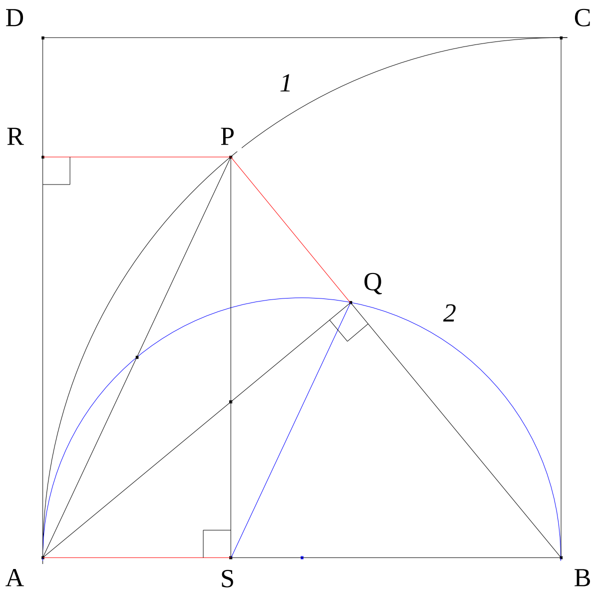


Traits :	ABCD	un carré,
	1	le cercle de centre B passant par A,
	P	un point intérieur à ABCD situé sur *1*,
	2	le cercle de diamètre [AB],
	Q	le second point d'intersection de (BP) avec *2*
et	R	le pied de la perpendiculaire à (AD) issue de P.

Donné : PR = PQ. [3]

VISUALISATION

[3] Question **2152**, *Journal de Mathématiques Élémentaires* N° **20** (juillet 1888), p.160 ;
A square for pleasure again, AoPS du 22/09/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=555217



- **Scolies :** **(1)** le triangle BAP est B-isocèle
  (2) Q est le pied de la A-hauteur de BAP.

- Notons S le pied de la P-hauteur de BAP.

- Une chasse segmentaire :

  * le quadrilatère ASPR étant un rectangle, PR = AS ;

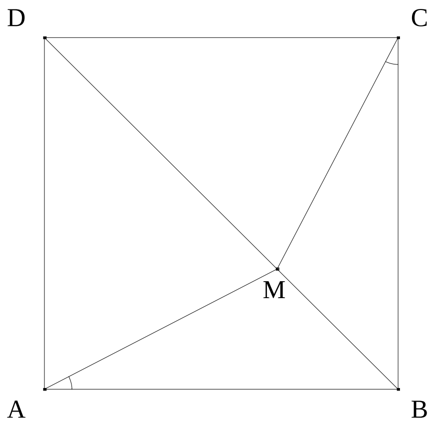
  * le quadrilatère ASQP étant un trapèze isocèle, AS = PQ.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, PR = PQ.

2. Deux angles égaux

VISION

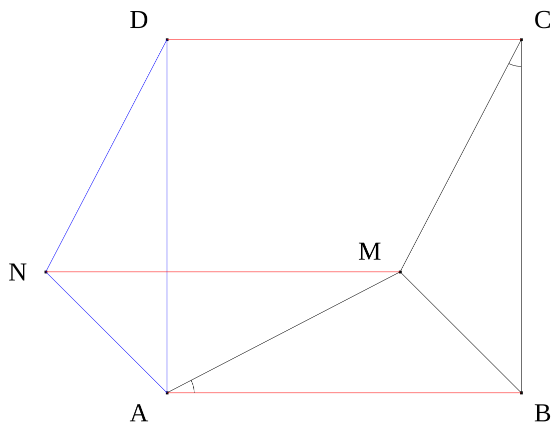
Figure :



Traits : ABCD un carré,
et M un point intérieur à ABCD tel que <MAB = <MCB.

Donné : M est sur (BD). [4]

VISUALISATION



- Notons M le point extérieur à ABC tel que **(1)** (DN) // (CM)
  (2) (AN) // (BM).

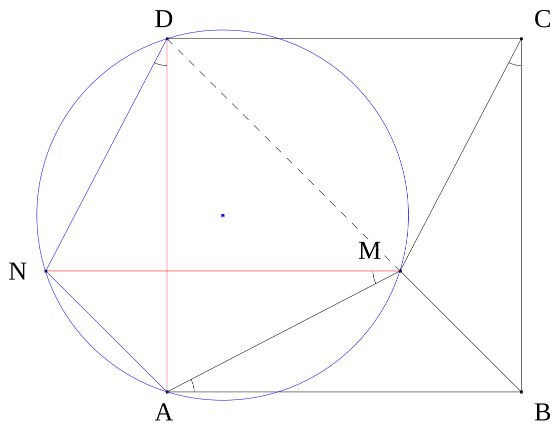
- D'après Desargues "Le petit théorème", (MN) // (AB).

- Une chasse angulaire :

  * d'après le théorème "Angles à côtés parallèles", <NDA = <MCB
  * par hypothèse, <MCB = <MAB
  * d''après le théorème "Angles alterne-interne", <MAB = <NMA

[4] Prove angle MDC = angle MBC, AoPS du 27/07/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=545915

* par transitivité de la relation =, <NDA = <NMA.



- **Conclusion partielle :** N, A, M et D sont cocycliques.

- Une chasse segmentaire :

  * ABMN étant un parallélogramme, NM = AB
  * par hypothèse, AB = BC
  * par hypothèse, BC = AD
  * par transitivité de la relation =, NM = AD.

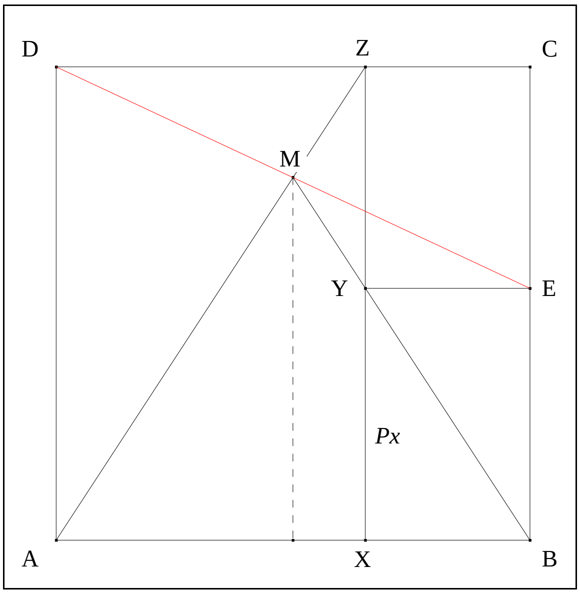
- Le quadrilatère cyclique ayant ses diagonales égales, est isocèle ;
  en conséquence, (MD) // (NA) ;
  par construction, (NA) // (MB) ;
  par transitivité de la relation =, (MD) // (MB) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (MD) = (MB).

- **Conclusion :** M est sur (BD).

3. Trois points alignés

VISION

Figure :



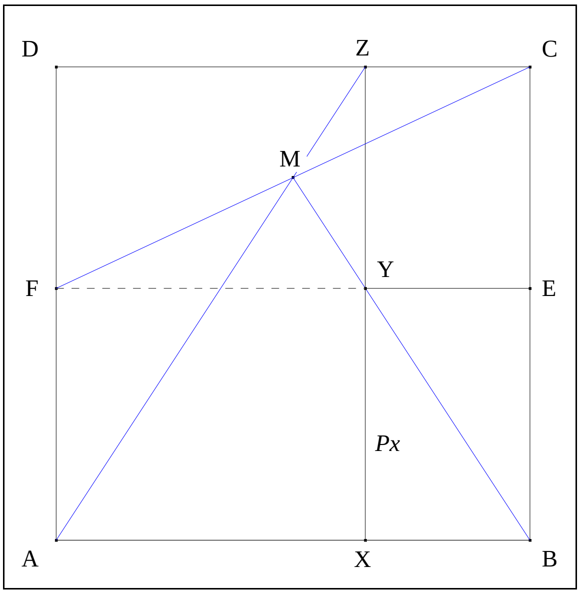
Traits :	ABCD	un carré,
	X	un point de [AB],
	Px	la perpendiculaire à (AB) en X,
	Z	le point d'intersection de *Px* avec (BD),
	M	le point d'intersection de (AZ) avec la médiatrice de [AB],
	Y	le point d'intersection de *Px* avec (MB),
et	E	le point tel que le quadrilatère BXYE soit un rectangle.

Donné : D, M et E sont alignés. [5]

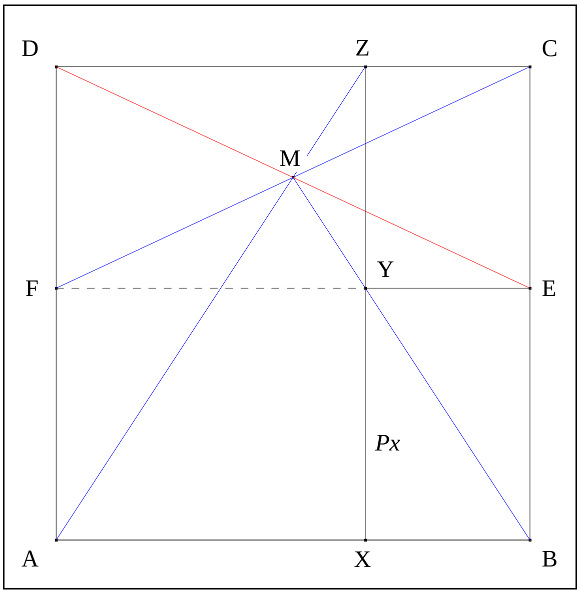
Commentaire : l'hexagone dégénéré de Pappus avec deux sommets à l'infini.

VISUALISATION

[5] Ayme J.-L., A square and three collinear points, AoPS du 29/12/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=568858
Symmetrics of H, symmetric of eachother !, AoPS du 18/08/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=221357&p=1227937



- Notons F le point d'intersection de (EY) et (AD).
- D'après Pappus "Deux sommets à l'infini" [6], (BY), (AZ) et (CF) concourent en M.
- **Scolie :** M est le milieu de [CF].



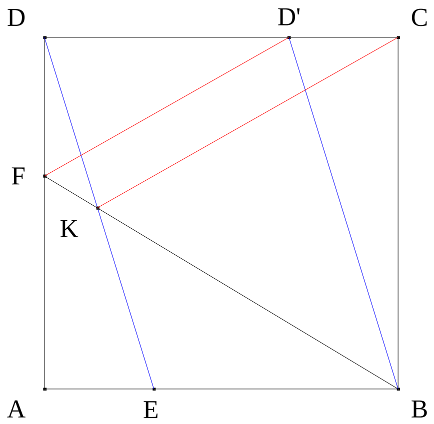
- **Conclusion :** le quadrilatère CDFE étant un rectangle, D, M et E sont alignés.

4. Deux parallèles

VISION

Figure :

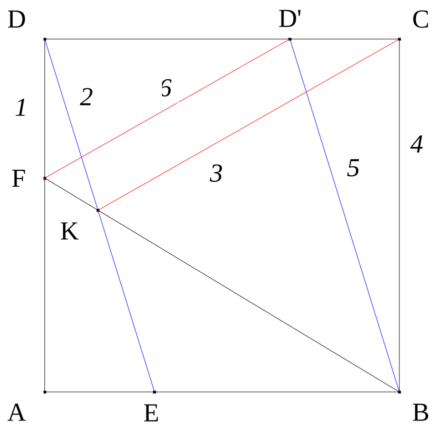
[6] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 21 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits : ABCD un carré,
E, F deux points resp. de [AB], [AD],
K le point d'intersection de (BF) et (DE),
et D' le point de (CD) tel que (BD') soit parallèle à (DE).

Donné : (D'F) est parallèle à (CK). [7]

VISUALISATION



- **Scolie :** (DF) // (BC).

- D'après Pappus "Le petit théorème" [8]
  appliqué à l'hexagone sectoriel DFD'BCKD, de frontières (BF) et (CD), (KC) // (D'F).

- **Conclusion :** (D'F) est parallèle à (CK).

5. Trois points alignés

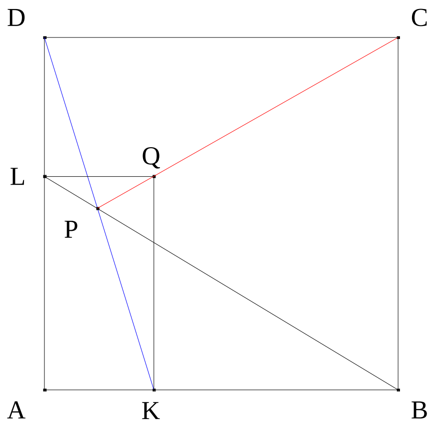
VISION

Figure :

---

[7] Prove FD' is parallel to KC, AoPS du 18/10/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=502955

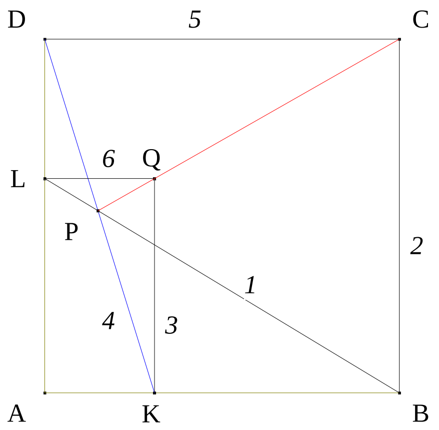
[8] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 2 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits : ABCD un carré,
K, L deux points resp. de [AB], [AD],
P le point d'intersection de (DK) et (BL),
et Q le point tel que le quadrilatère AKQL soit un carré.

Donné : P, C et Q sont alignés.[9]

VISUALISATION



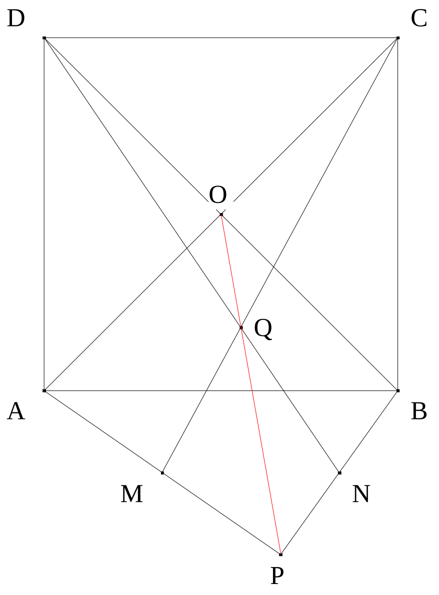
- **Conclusion :** d'après Pappus "Deux sommets à l'infini"[10] appliqué à l'hexagone sectoriel *123456*, de frontières (AS) et (AD), P, C et Q sont alignés.

6. Trois points alignés

VISION

Figure :

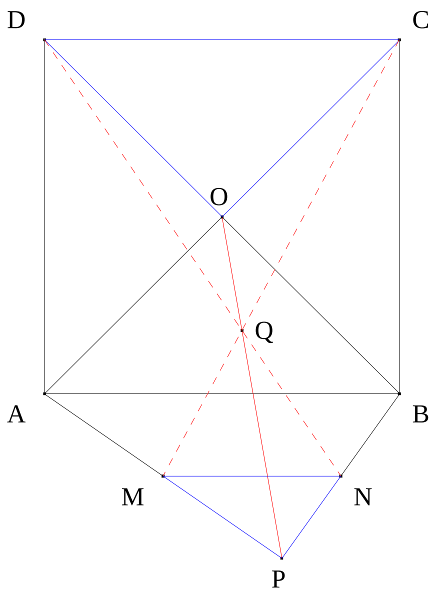
[9] Ceva + menelaus 3, AoPS du 14/08/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=498444
[10] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 19-22 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits :	ABCD	un carré,
	O	le centre de ABCD,
	P	un point,
	M, N	les milieux resp. de [PA], [PB],
et	Q	le point d'intersection de (MC) et (ND).

Donné : O, P et Q sont alignés. [11]

VISUALISATION



- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle PAB, (MN) // (AB) ;
  en conséquence, (MN), (AB) et (CD) sont parallèles entre elles.

- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [12]

[11] Prove that O, P Q are collinear, AoPS du 22/06/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=485497

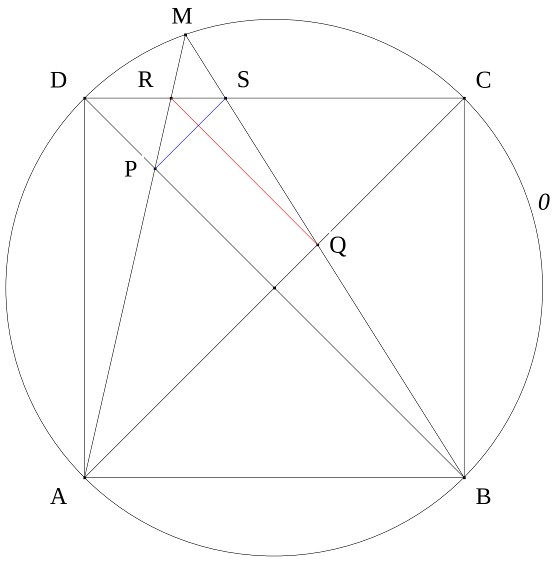
appliqués aux triangles PMN et OCD, d'axe (AB), Q est le centre de cette perspective.

- **Conclusion :** O, P et Q sont alignés

7. France Team Selection Test 2006, Day 1, Problem 1

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	0	le cercle circonscrit à ABCD,
	M	un point de l'arc CD ne contenant pas A,
	P, R	les points d'intersection de (MA) resp. avec (BD), (CD)
et	Q, S	les points d'intersection de (MB) resp. avec (AC), (CD).

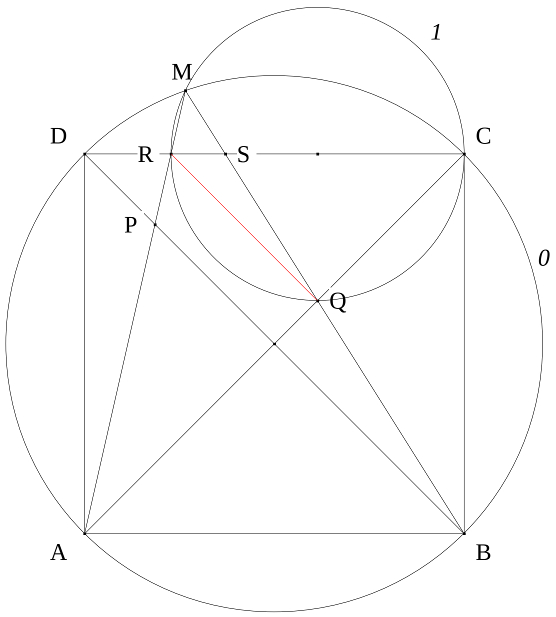
Donné : (PS) est perpendiculaire à (QR).[13]

VISUALISATION

---

[12] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 39 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

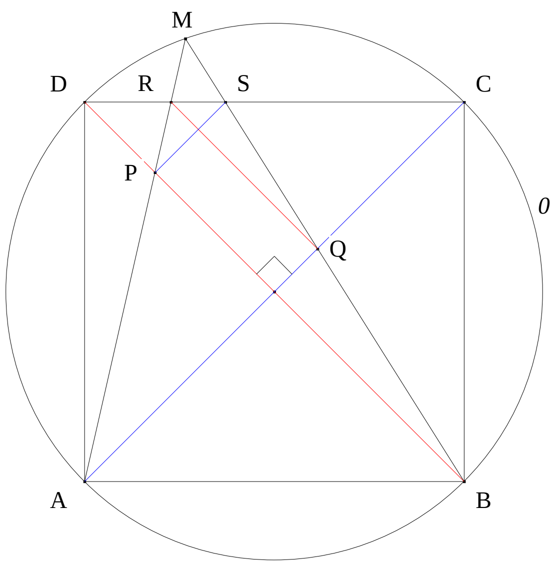
[13] A square, AoPS du 27/05/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=89301



- Une chasse angulaire :

*	par une autre écriture,	<RMQ = <AMB
*	d'après "Le théorème de l'angle inscrit",	<AMB = <ADB (= 45°)
*	par une autre écriture,	<RCQ = <DCA (=45°)
*	en conséquence,	<RMQ = <RCQ.

- **Conclusion partielle :** R, M, C et Q sont cocycliques.
- Notons *1* ce cercle.
- Les cercles *0* et *1*, les points de base M et C, les moniennes (BMQ) et (DCR), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BD) // (QR).



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (AC) // (PS).

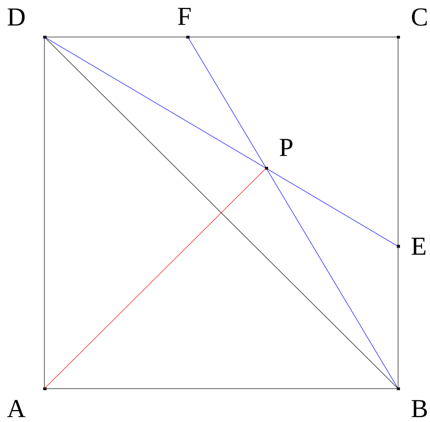
- Nous savons que (AC) ⊥ (BD) ;
  la relation ⊥ étant compatible avec la relation //, (PS) ⊥ (QR).

- **Conclusion :** (PS) est perpendiculaire à (QR).

8. Une bissectrice

VISION

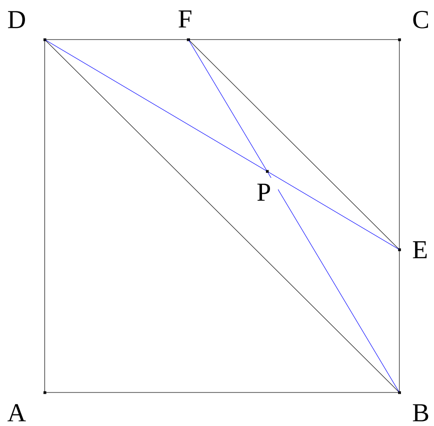
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	E, F	deux points resp. de [BC], [CD] tels que DE = BF
et	P	le point d'intersection de (DE) et (BF).

Donné : (AP) est la P-bissectrice intérieure du triangle BPD. [14]

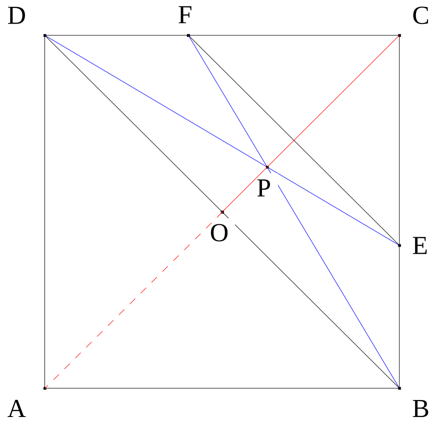
VISUALISATION



- Le quadrilatère BEFD ayant **(1)** <DBE = <BDF (= 45°)
  (2) BF = DE
  est un trapèze isocèle ;

[14] Need a new answer… (beautiful question), AoPS du 20/08/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=494903

en conséquence, (EF) // (BD).



- Notons O le centre de ABCD.

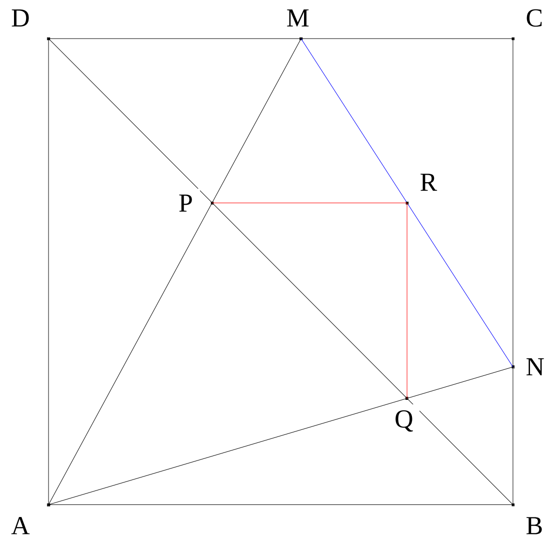
- D'après "Le trapèze complet" appliqué à BEFD, O, P et C sont alignés ;
  en conséquence, P est sur (AC).

- **Conclusion :** par symétrie d'axe (AC), (AP) est la P-bissectrice intérieure du triangle BPD.

9. RMO 1999 problem

VISION

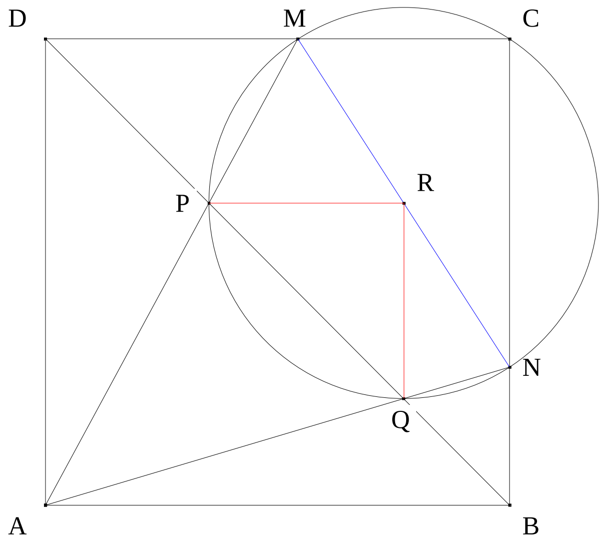
Figure :



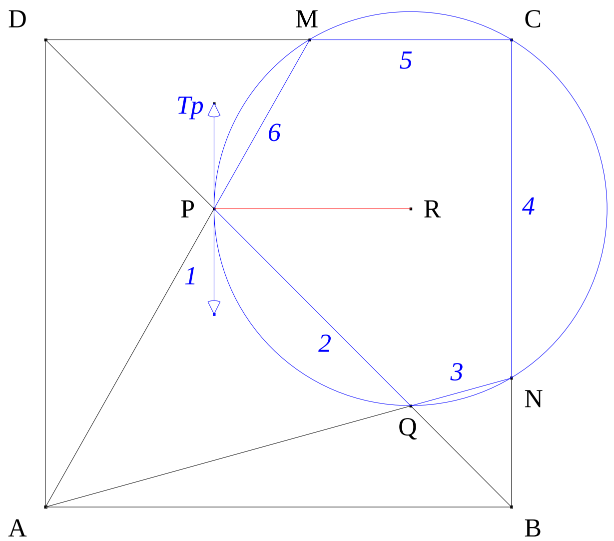
Traits :	ABCD	un carré,
	M	un point de]CD[,
	N	un point de]BC[tel que <NAM = 45°,
	R	le milieu de [MN]
et	P, Q	les points d'intersection de (BD) resp. avec (AM), (AN).

Donné : le triangle RPQ est R-rectangle isocèle.[15]

VISUALISATION



- D'après **I.** Problème **18**, M, N, Q et P sont cocycliques.
- Notons *1* ce cercle de centre R.
- **Conclusion partielle :** PQR est R-isocèle.



- Notons *Tp* la tangente à *1* en P.
- D'après Carnot "Pentagramma mysticum"
  appliqué à l'hexagone dégénéré *Tp* QNCMP, **(1)** (DA) est la pascale
  (2) (BC) // *Tp*.

[15] Square, RMO 1999 problem, AoPS du 28/08/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=500164

- Nous avons : $Tp \perp$ (RP) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (BC) $\perp$ (RP).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (AB) $\perp$ (RQ).

- Par hypothèse, (BC) $\perp$ (AB) ;
  la relation $\perp$ étant compatible avec la relation $\perp$, (RP) $\perp$ (RQ).

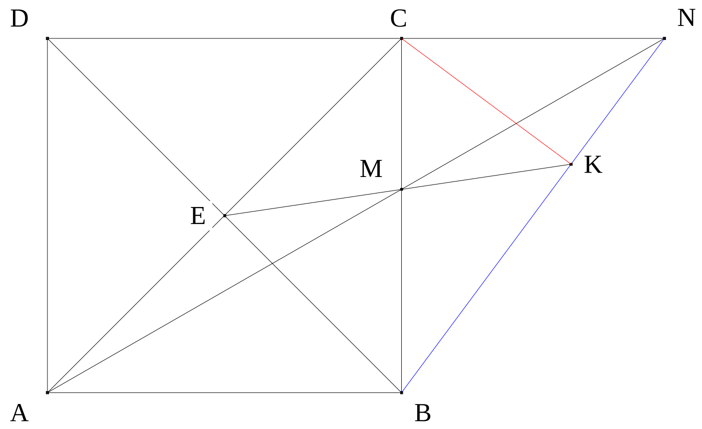
- **Conclusion partielle :** PQR est R-rectangle.

- **Conclusion :** le triangle RPQ est R-rectangle isocèle.

10. Deux perpendiculaires

VISION

Figure :



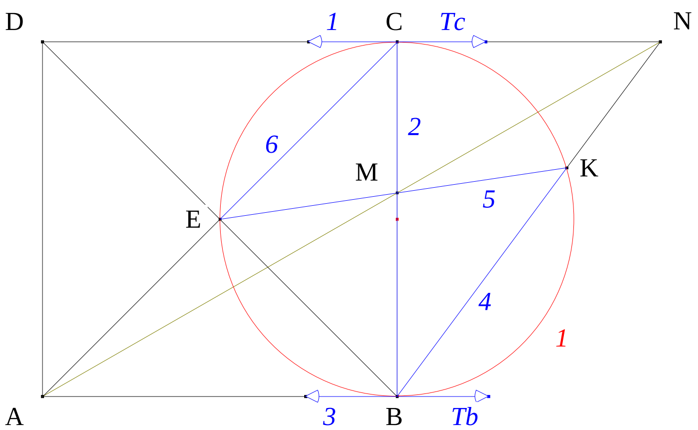
Traits :

	ABCD	un carré,
	E	le point d'intersection de (AC) et (BD),
	La	une droite passant par A,
	M, N	les points d'intersection de *La* resp. avec (BC), (CD)
et	K	le point d'intersection de (EM) et (BN).

Donné : (BN) est perpendiculaire à (CK). [16]

VISUALISATION

[16] Prove BN perp CK, AoPS du 31/05/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=536656
Perpendicular problem, AoPS du 07/07/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=487971



- Notons *1* le cercle de diamètre [BC]
  et *Tb*, *Tc* les tangentes à *1* resp. en B, C.

- **Scolies :** **(1)** *Tb* = (AB)
  (2) *Tc* = (CD).

- D'aprés MacLaurin "Tetragramma mysticum"
  appliqué à l'hexagone dégénéré *Tc* B *Tb* KEC, K est sur *1*.

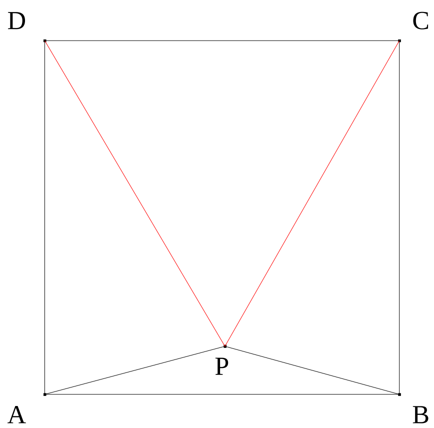
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle"
  appliqué au triangle BCK, (BK) est perpendiculaire à (CK).

- **Conclusion :** (BN) est perpendiculaire à (CK).

11. The equilateral square, un classique

VISION

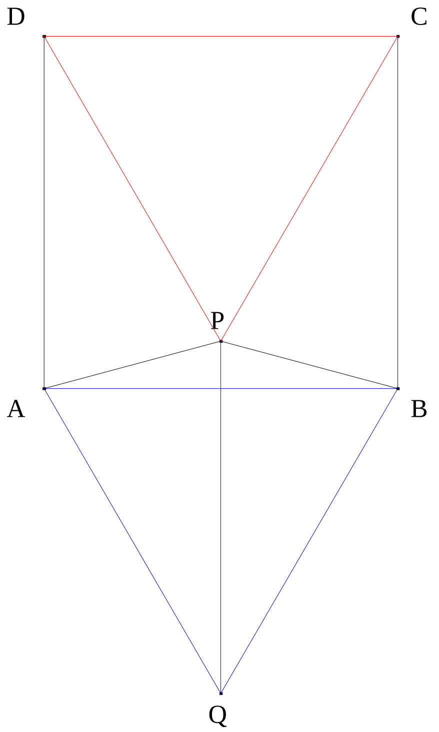
Figure :



Traits : ABCD un carré,
et P un point intérieur à ABCD tel que **(1)** le triangle PAB soit P-isocèle
(2) <BAP = 15°.

Donné : le triangle PCD est équilatéral. [17]

VISUALISATION [18]



- Notons Q le point extérieur à ABCD tel que le triangle QAB soit équilatéral.

- D'après "Le théorème de la médiatrice", $(PQ) \perp (AB)$;
  par hypothèse, $(AB) \perp (BC)$;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (PQ) // (BC).

- Par une chasse angulaire, le triangle QBP est Q-isocèle.

- Le parallélogramme PQBC ayant deux côtés consécutifs égaux, est un losange

- **Conclusion partielle :** PC = CD.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que PD = CD.

- **Conclusion :** le triangle PCD est équilatéral.

Note historique : ce problème a été posé en 1949 lors de l'examen final d'une École Normale des Pays-Bas. L'auteur de ce problème demandait d'aboutir au résultat sans passer par la trigonométrie et sans recourir à un raisonnement par l'absurde. A l'examen aucun candidat ne pu donner une solution répondant aux exigences de l'auteur.

---

[17] Coxeter H. S. M., Greitzer S. L., Geometry revisited, **1. 9.** Exercise **2**, p. 25 ;
The equilateral square, AoPS du 28/03/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=472125
O inside square abcd such that <BAO = <ABO = 15°, AopS du 16/04/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=33751
A well-knowed problem, but, AoPS du 23/09/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=555344

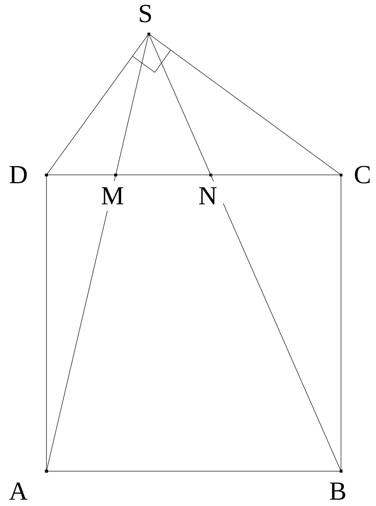
[18] Stan Fulger (Roumanie)

En avril 1999, ce problème a été posé sous les mêmes conditions dans la revue *Natuur en Techniek* dans la rubrique gérée par Jan de Geus. En juin 1999, une solution a été publiée qui s'avéra par la suite d'être fausse. Dans l'édition de juillet, la rectification a été faite, mais aucune solution n'a été proposée.

12. 11th Philippine Mathematical Olympiad

VISION

Figure :

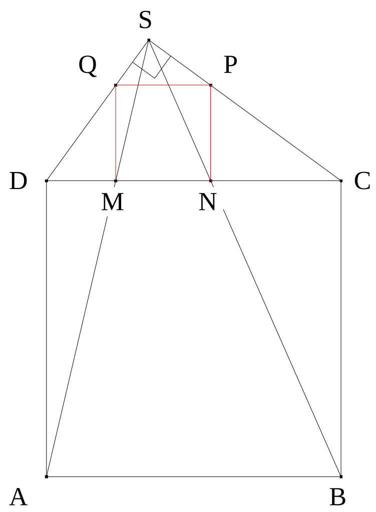


Traits : ABCD un carré,
S un point extérieur à ABCD tel que le triangle SCD soit S-rectangle
et M, N les point d'intersection resp. de (SA), (SB) avec [CD].

Donné : $MN^2 = CN \cdot DM$. [19]

VISUALISATION

[19] Right-angled triangle, *Mathlinks* du /03/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=472591
A problem of Euclidean geometry, AoPS du 20/12/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=513177



- D'après Problème **23**, **(1)** MNPQ est un carré

  (2) QM = PN (= MN).

- **Scolie :** les triangles DMQ et PNC sont semblables.

- Nous avons : QM/DM = CN/PN ;

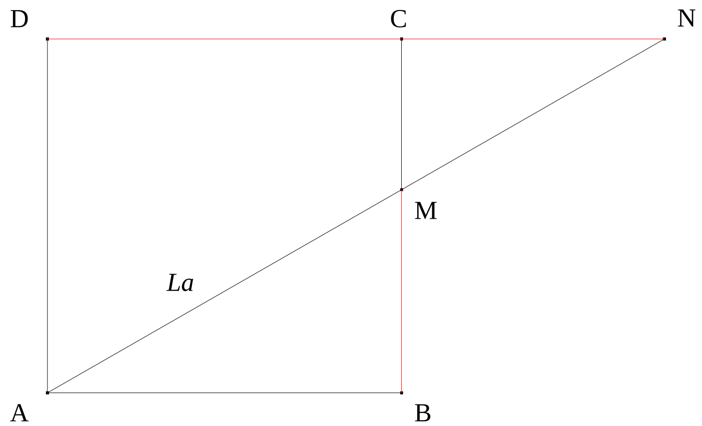
  en conséquence, QM.PN = CN.DM.

- **Conclusion :** $MN^2 = CN.DM$.

13. Une relation

VISION

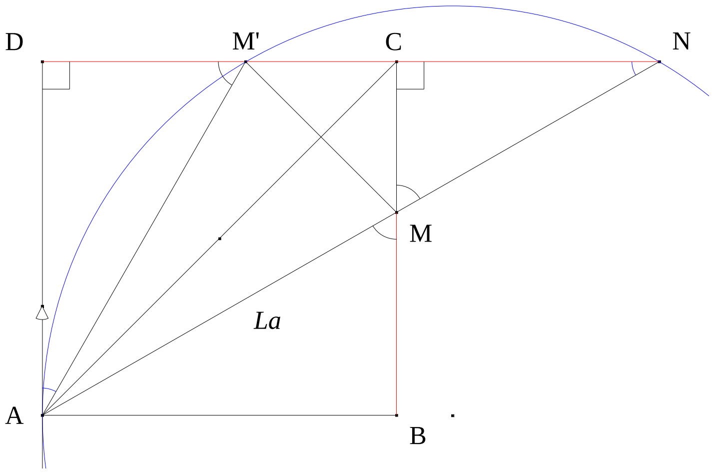
Figure :



Traits : ABCD un carré,
La une droite passant par A,
et M, N les points d'intersection de *La* resp. avec (BC), (CD).

Donné : BM.DN est constant. [20]

VISUALISATION



- Notons M' le symétrique de M par rapport à (AC).

- **Scolies :** **(1)** D est le symétrique de B par rapport à (AC)
  (2) DM' = BM.

- Une chasse angulaire :

  * par "Le théorème des angles opposés", <CMN = <AMB
  * par symétrie d'axe (AC), <AMB = <AM'D
  * par transitivité de la relation =, <CNM = <DAM'
  * par complémentation, <CNM = <M'AD
  * ou encore, <M'NA = <M'AD

- **Conclusion partielle :** le cercle passant par N, M' et A est tangent à (AD) en A.

- D'après Steiner "Puissance d'un point par rapport à un cercle", $DA^2 = DM'.DN$.

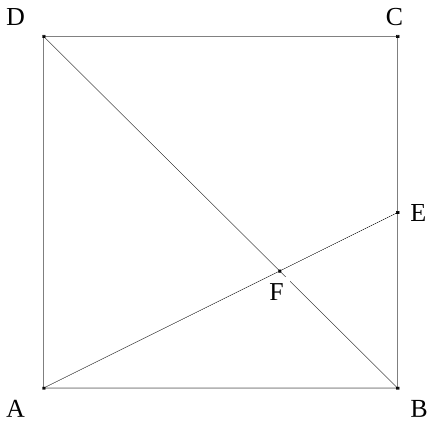
- **Conclusion :** $DA^2 = BM.DN$.

14. Une relation

VISION

Figure :

[20] Parallélogram, AoPS du 22/10/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=503521



Traits : ABCD un carré,
E le milieu de [BC],
et F le point d'intersection de (BD et (AE).

Donné : évaluer FA/FE.

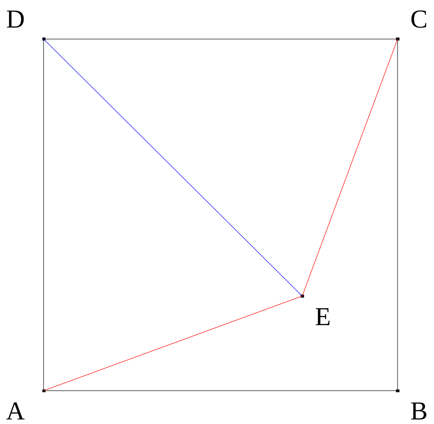
VISUALISATION

- **Scolie :** (BF) est la B-bissectrice intérieure du triangle ABE.
- D'après "Le théorème de la bissectrice" appliqué à ABE, FA/FE = BA/BE.
- **Scolie :** 2.BE = BA.
- **Conclusion :** par substitution et simplification, FA/FE = ½.

15. Une équivalence

VISION

Figure :

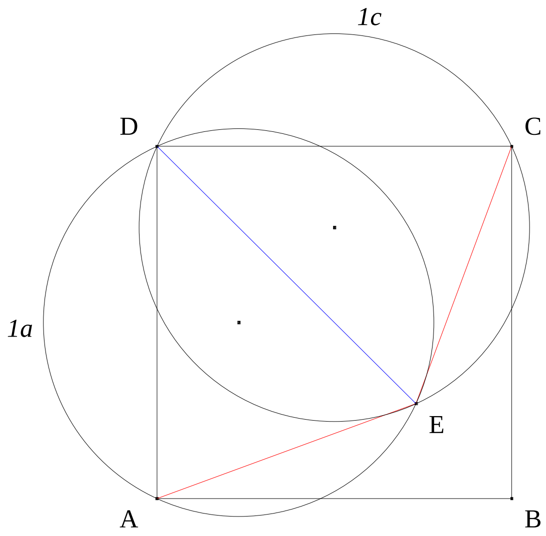


Traits : ABCD un carré

et E un point intérieur à ABCD.

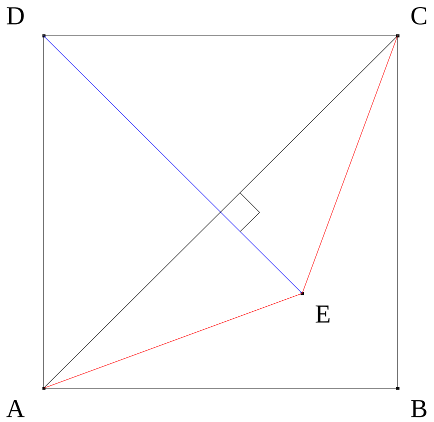
Donné : <AED = <CED *si, et seulement si,* AE = EC.[21]

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons *1a*, *1c* les cercles circonscrits resp. aux triangles AED, CED.
- D'après "La loi des sinus" appliqué à AED, CED, **(1)** *1a* et *1c* sont égaux
  (2) (DE) est l'axe de symétrie de *1a* et *1c*.
- Par symétrie d'axe (DE), AED et CED sont égaux.
- **Conclusion :** EA = EC.

VISUALISATION SUFFISANTE



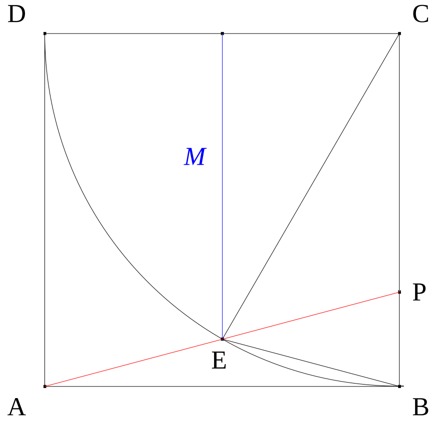
- D'après "Le théorème de la médiatrice", (DE) est la médiatrice de [AC].
- **Conclusion :** par symétrie d'axe (DE), <AED = <CED

[21] Square, AoPS du 05/03/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=523520

16. Variation sur un classique

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré,
1 le quart de cercle de centre C, de rayon CD, inclus dans ABCD,
M la médiatrice de [CD]
et E le point d'intersection de *M* avec *1*.

Donné : sachant que <BEP = 2x et <PEC = 3x, évaluer x. [22]

VISUALISATION

- Par construction, le triangle ECD est équilatéral
- D'après **II.** Problème **11**, le triangle EAB est E-isocèle et <BAE = 15°.
- Par une chasse angulaire, **(1)** <BEP = 30°

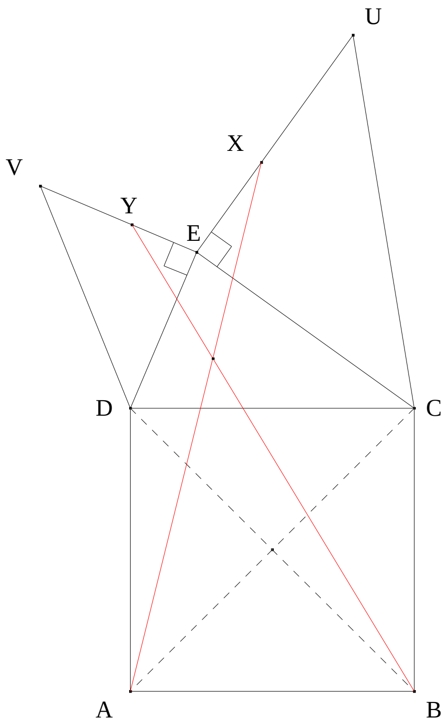
  (2) <PEC = 45°.
- **Conclusion :** x = 15°.

17. (China) WenWuGuangHua *Mathematics Workshop* 文武光华数学工作室

VISION

Figure :

[22] ABCD square, AoPS du 07/10/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=436543

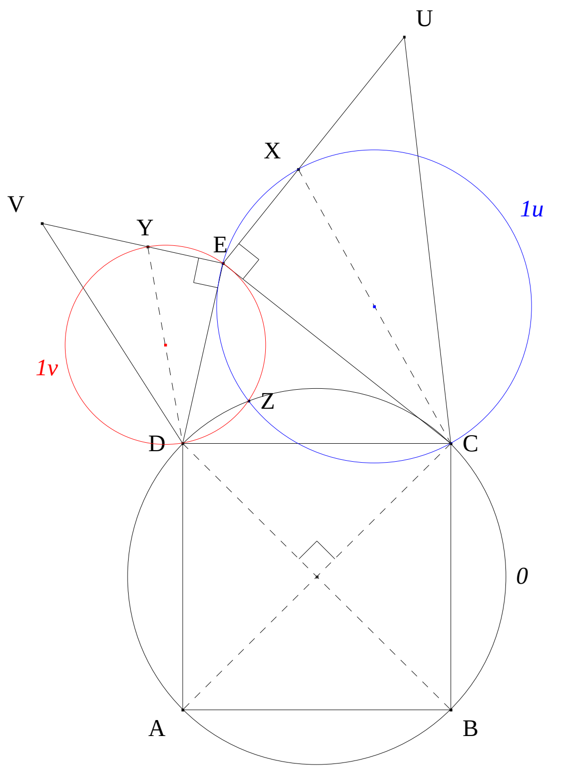


Traits :	ABCD	un carré,
	E	un point extérieur à ABCD,
	UEC, VED	les triangles E-rectangles isocèles adjacents extérieurement au triangle CDE
et	X, Y	les pieds des C, D-bissectrices intérieures resp. de CEU, DEV.

Donné : AX = BY. [23]

VISUALISATION

[23] Segment Congruence, AoPS du 15/12/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=48&t=512570



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABCD,
  et *1u*, *1v* les cercles circonscrits resp. aux triangles ECX, EDY

- Une chasse angulaire :

  * <CBD = 45°

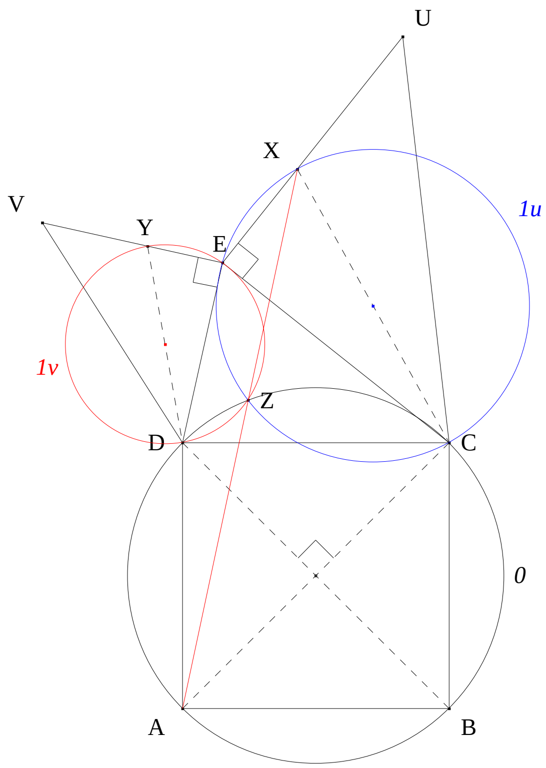
  * <CXE = 90° - ½.45°

  * <DYE = 90° - ½. 45°.

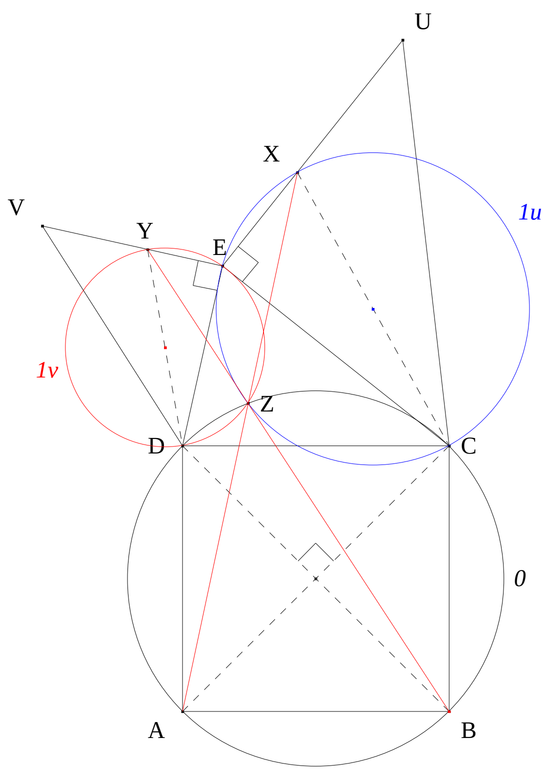
- La somme de ces trois angles étant égal à 180°, *0*, *1u* et *1v* sont concourants. [24]

- Notons Z ce point de concours.

[24] Ce résultat est aussi connu sous le nom de "Théorème de Greitzer"



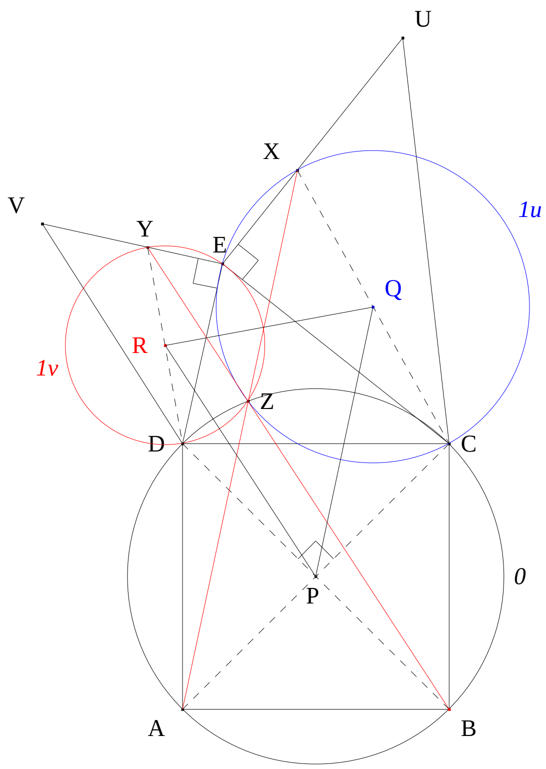
- D'après "Une monienne diamétralement brisée" [25]
  appliquée à *0* et *1u*, A, Z et X sont alignés.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que B, Z et Y sont alignés.

---

25 Ayme J.-L., A propos de deux cercles sécants, G.G.G. vol. **12**, p. 20-21 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons P, Q, R les centres resp. de *0*, *1u*, *1v*.
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué

  * au triangle ACX, AX = 2.PQ

  * au triangle BDT, BY = 2. PR.
- Par une chasse angulaire, nous montrerions que le triangle PQR est P-isocèle.
- **Conclusion :** AX = BY.

Note historique : ce résultat qui a fasciné le Dr. Samuel L. Greitzer, a donné l'idée à Greeg Patruno, auteur de l'article "Blib Alleys" dans la revue *Arbelos* [26], d'appelé "Point de Greitzer", le point de concours des trois cercles de la situation traitée ci-avant.
Ce résultat a fait l'objet d'un Message *Hyacinthos* de Darig Grinberg [27].

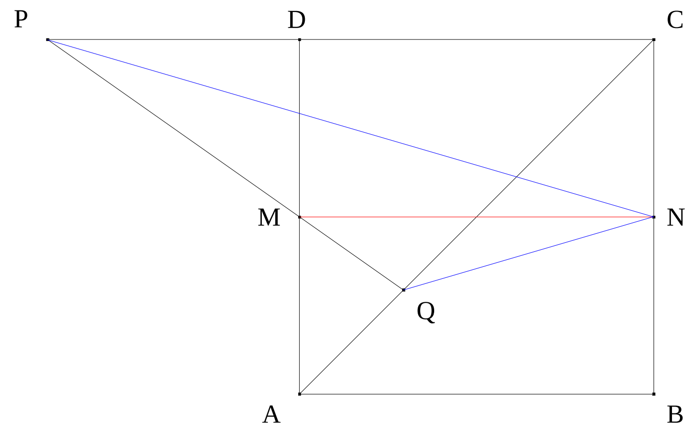
Scolie : <XZY = 45°.

18. Deux angles égaux

VISION

[26] Arbelos, Volume **5**, chapter **4**, p.92.
[27] Grinberg D., Message *Hyacinthos* du 07-08-03.

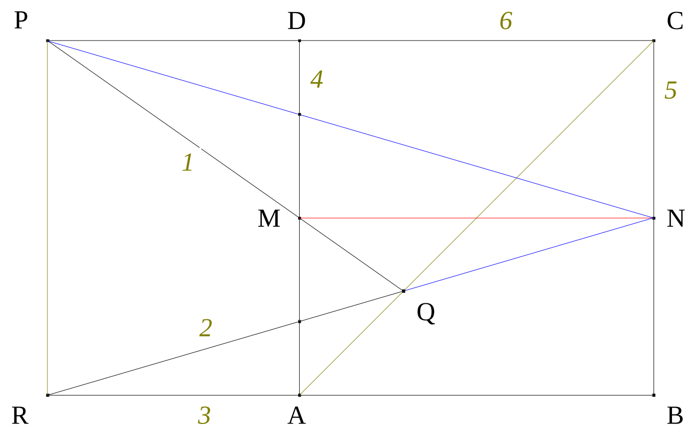
Figure :



Traits : ABCD un carré,
M, N les milieux resp. de [AD], [BC],
P un point de (CD)
et Q le point d'intersection de (PM) et (AC).

Donné : <MNQ = <MNP. [28]

VISUALISATION



- Notons R le point d'intersection de (AB) et (NQ).

- D'après Pappus "Un sommet à l'infini" [29]
  appliqué à l'hexagone sectoriel *123456*, de frontières (PR) et (AQC), (PR) // (AB).

- **Scolies :** **(1)** le triangle NPR est N-isocèle
  (2) (NM) est la N-bissectrice intérieure de NPR.

- **Conclusion :** <MNQ = <MNP.

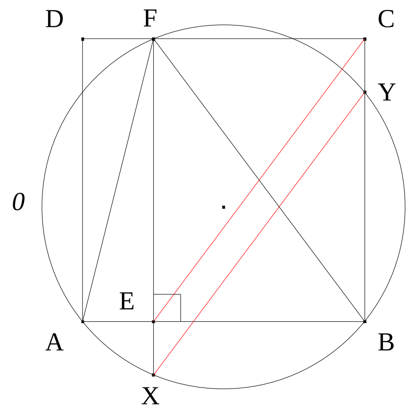
[28] Problem **2** (2nd jbmo tst), **2**nd TST for JBMO, Moldova, AoPS du 31/03/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=81747
Rectangle & an angle bisector, AoPS du 06/10/2005 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=55017
NM bisecte <QNP in a rectangle ABCD, AoPS du 17/07/2004 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=14246

[29] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 17-19 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

19. Deux parallèles

VISION

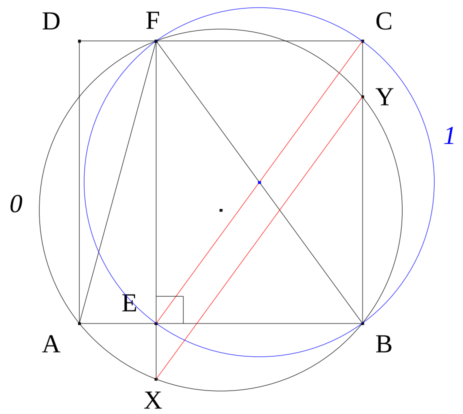
Figure :



Traits : ABCD un carré,
E un point de [AB],
F le pied de la perpendiculaire à (CD) issue de E,
0 le cercle circonscrit du triangle FAB
et X, Y les seconds points d'intersection de *0* resp. avec (EF), (BC).

Donné : (XY) est parallèle à (EC). [30]

VISUALISATION



- Notons *1* le cercle de diamètre [BF] ; il passe par C et E.

- Les cercles *0* et *1*, les points de base F et B, les moniennes (XFE) et (YBC), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (XY) // (EC).

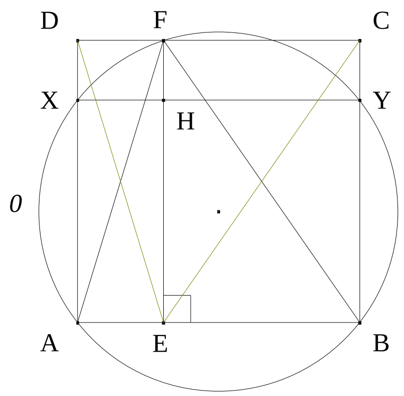
- **Conclusion :** (XY) est parallèle à (EC).

[30] Ayme J.-L., A small problem with a square, AoPS du 14/10/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=558245

20. Une droite passant par l'orthocentre

VISION

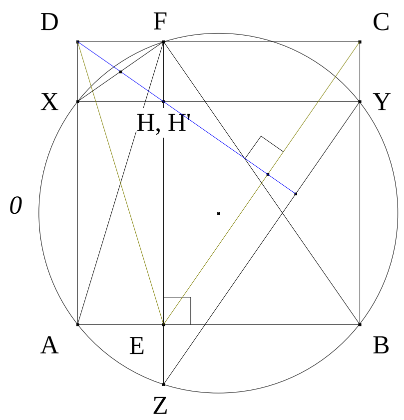
Figure :



Traits : ABCD un carré,
E un point de [AB],
F le pied de la perpendiculaire à (CD) issue de E,
0 le cercle circonscrit du triangle FAB,
H l'orthocentre du triangle CDE
et X, Y les seconds points d'intersection de *0* resp. avec (AD), (BC).

Donné : (XY) passe par H. [31]

VISUALISATION



- Notons Z le second point d'intersection de (EF) avec *0*
  et H' le point d'intersection de (EF) et (XY).

- D'après "Le théorème de Brahmagupta" [32], (DH') ⊥ (YZ)

[31] Andreescu T., University of Texas (États-Unis), **J275**, *Mathematical Refections*, Issue **4** (2013) ; https://www.awesomemath.org/
Solution : Ercole Suppa, Teramo (Italie) *Mathematical Refections*, Issue **5** (2013) ; https://www.awesomemath.org/

[32] Ayme Jean-Louis, Le théorème de Brahmagupta, G.G.G. vol. **7**, p. 2-4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

- D'après **19.** Deux parallèles, (YZ) // (CE).
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (DH') $\perp$ (CE).

- **Conclusion partielle :** (DH') est la D-hauteur de CDE.

- **Scolies :** **(1)** (EF) est la E-hauteur de CDE

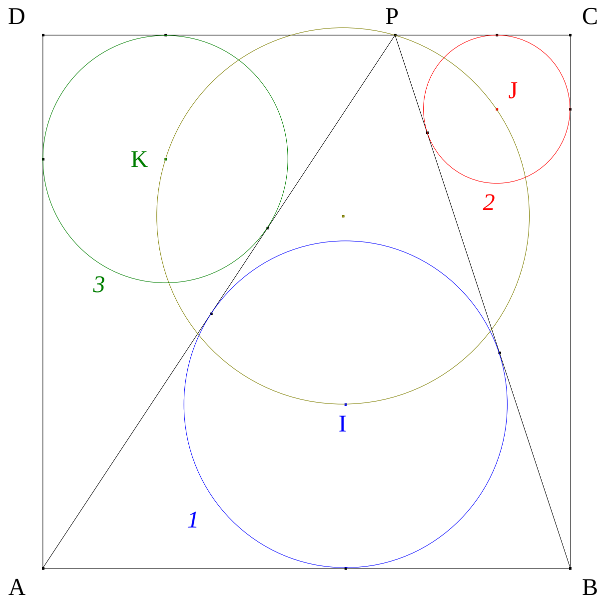
  (2) H et H' sont confondus.

- **Conclusion :** (XY) passe par H.

21. Quatre points cocycliques

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré,
P un point de [CD],
1, *2*, *3* les cercles inscrits resp. des triangles PAB, PBC, PDA
et I, J, K les centres resp. de *1*, *2*, *3*.

Donné : I, J, K et P sont cocycliques. [33]

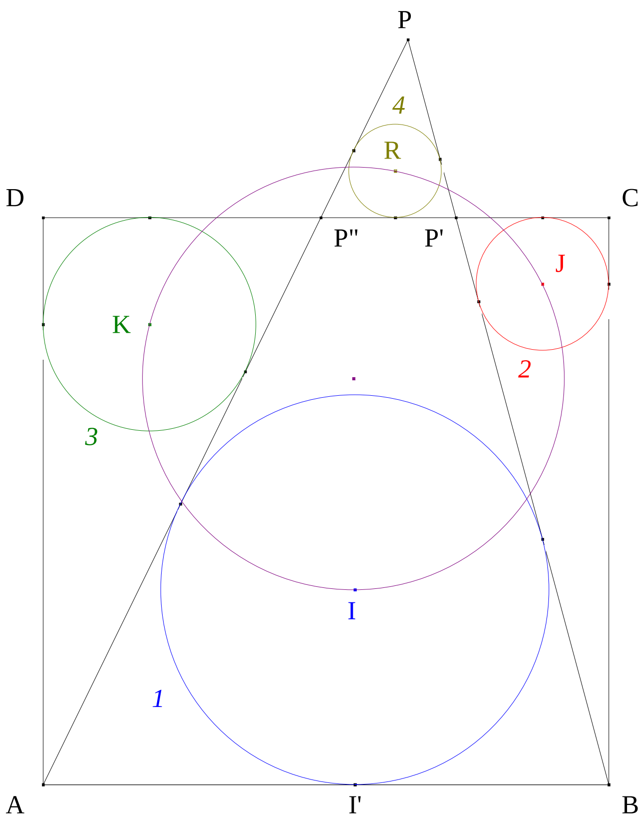
Commentaire : une preuve de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.

22. Quatre points cocycliques

VISION

[33] Ayme J.-L., Le résultat de Larrosa Canestro, G.G.G. vol. **5** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Figure :



Traits :		ABCD	un carré,
		P', P"	deux points de [CD],
		P	le points d'intersection de (AP") et (BP'),
		1, *2*, *3*, *4*	les cercles inscrits resp. des triangles PAB, P'BC, P"DA, PP'P"
	et	I, J, K, R	les centres resp. de *1*, *2*, *3* et *4*.

Donné : I, J, K et R sont cocycliques. [34]

- **Commentaire :** une preuve de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.

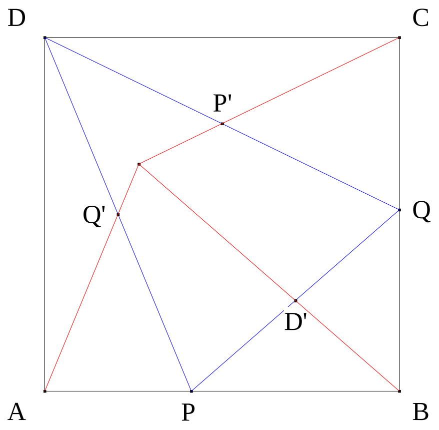
23. Trois droites concourantes

VISION

Figure :

---

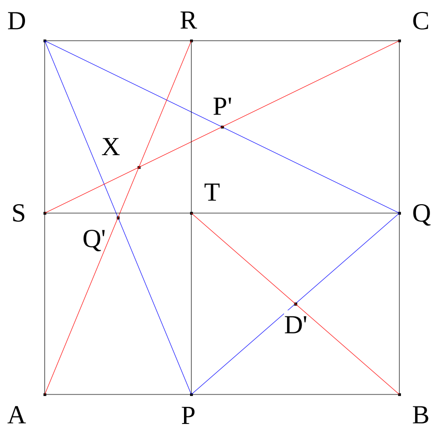
[34] Ayme J.-L., Le résultat de Larrosa Canestro, G.G.G. vol. **5**, p. 40 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits :	ABCD	un carré,
	P, Q	deux points resp. de [AB], [BC],
et	P', Q', D'	les milieux resp. de [QD], [DP], [PQ].

Donné : (AQ'), (BD') et (CP') sont concourantes. [35]

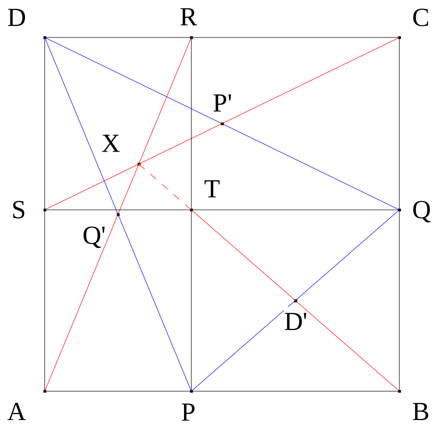
VISUALISATION



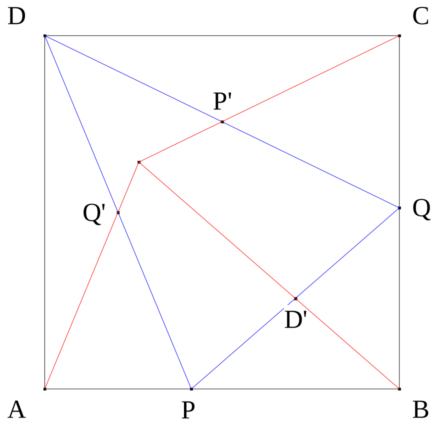
- Notons R le point d'intersection de la parallèle à (BC) issue de P avec (CD),
  S le point d'intersection de la parallèle à (AB) issue de Q avec (AD),
  T le point d'intersection de (PR) et (QS),
  et X le point d'intersection de (AR) et (CS).

- **Scolies :**
  (1) A, Q' et R sont alignés
  (2) C, P' et S sont alignés
  (3) B, D' et T sont alignés.

[35] With a square for pleasure, AoPS du 22/09/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=555201



- D'après 7. Problème **5**, (AR), (CS et (BT) sont concourantes.

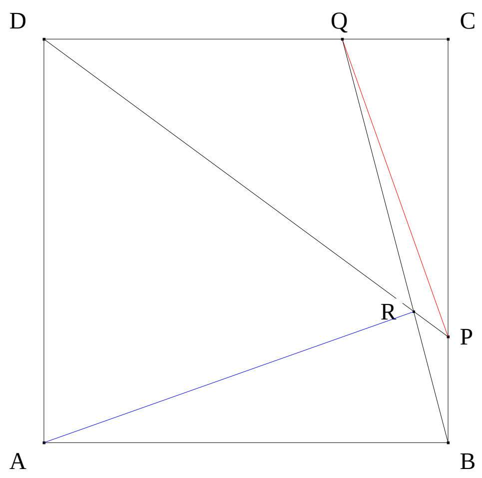


- **Conclusion :** (AQ'), (BD') et (CP') sont concourantes.

24. CNS

VISION

Figure :

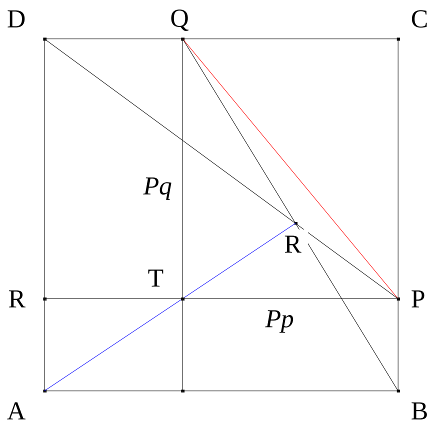


Traits : ABCD un carré,

	P, Q	deux points resp. de [BC], [CD],
et	R	le point d'intersection de (PD) et (QB).

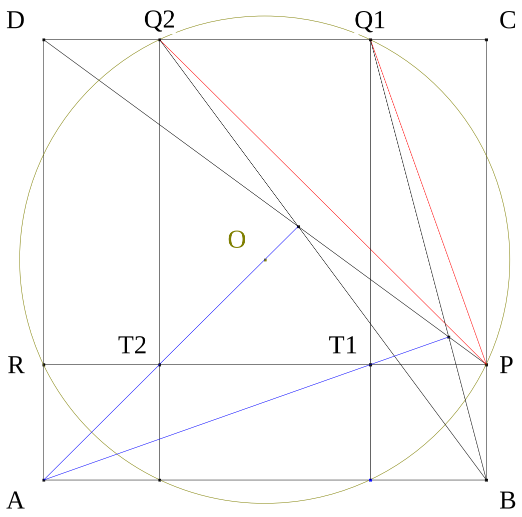
Donné : (AR) ⊥ (PQ) *si, et seulement si,* PC = QD ou QC. [36]

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons *Pp*, *Pq* les parallèles à (AB), (AD) issues resp. de P, Q,
  T le point d'intersection de *Pp* et *Pq*,
  et R le point d'intersection de *Pp* et (AD).

- D'après problème **5**, A, T et R sont alignés.



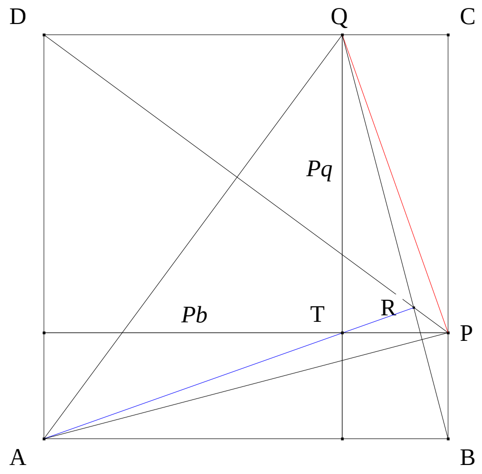
- Notons O le centre de ABCD,
  0 le cercle de centre O passant par P et coupant (AB)
  et Q1, Q2 les points d'intersection de *0* avec (CD).

- D'après "Le théorème de Brahmagupta" [37], (AT1) ⊥ (PQ1)
  (AT2) ⊥ (PQ2).

VISUALISATION SUFFISANTE

[36] Square ABCD, AoPS du 22/09/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=555223

[37] Ayme J.-L., Le théorème de Brahmagupta, G.G.G. vol. **12** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



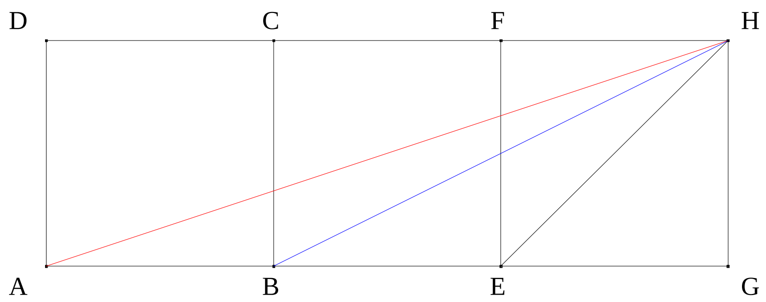
- Hypothèse : PC = QC.

- L'auteur laisse le soin au lecteur de montrer que T est l'orthocentre du triangle APQ et de conclure.

25. Three squares theorem

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré,
P, Q
et H

Donné : <GAH + <GBH = <GEH. [38]

VISUALISATION

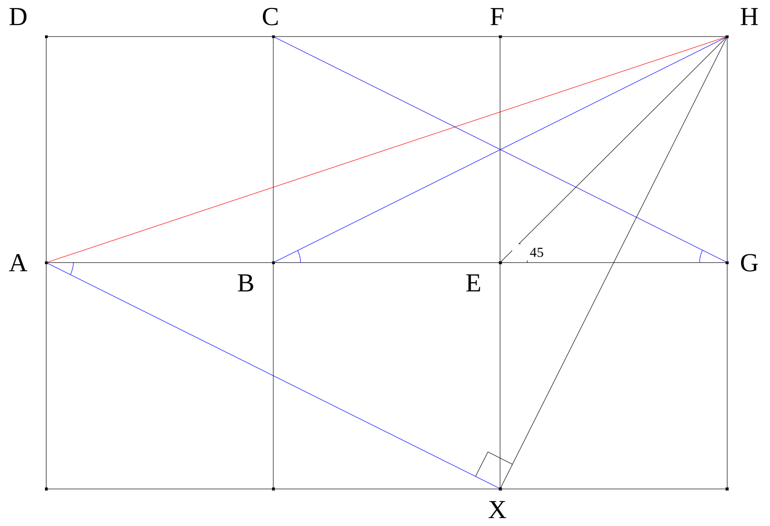
WITHOUT

WORDS

- Raisonnons par immersion de la figure.

---

[38] North R., Four heads are better than one, *Mathematical Gazette* **57** (December 1973)

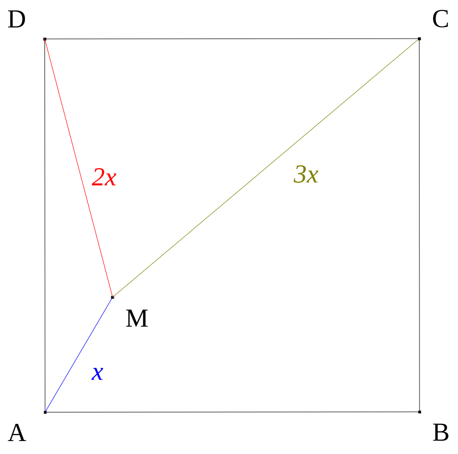


- **Conclusion :** <GAH + <GBH = <GEH (= 45°).

26. Évaluation d'un angle

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	x	un réel positif
et	M	un point intérieur à ABCD tel que AM = x, DM = 2x, CM = 3x.

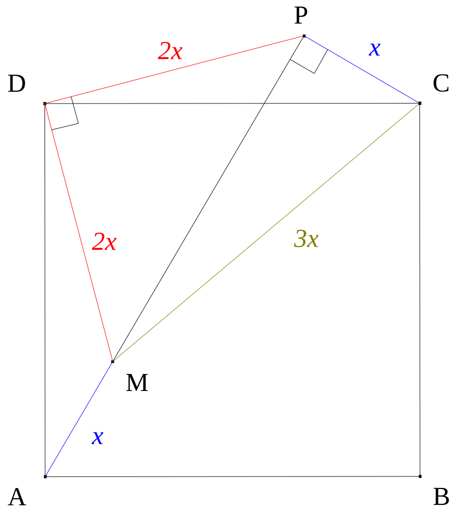
Donné : évaluer <AMD. [39]

VISUALISATION [40]

---

39 Geometry, AoPS du 24/09/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=555507
Square problem, AoPS du 03/01/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=569486

40 Visualisation de l'étudiant grec Dimitris Aletras âgé de 17 ans et demi, connu sous le pseudonyme *alet* sur le site AoPS



- Notons P le point extérieur à ABCD tel que le triangle PCD vérifie **(1)** PC = x
  (2) PD = 2x.

- **Scolies :** **(1)** le triangle DMP est D-rectangle
  (2) <AMD = <CPD.

- D'après "Le théorème de Pythagore", **(1)** $PM^2 = 8x^2$
  (2) le triangle PMC est P-rectangle.

- **Conclusion partielle :** <CPD = 135°.

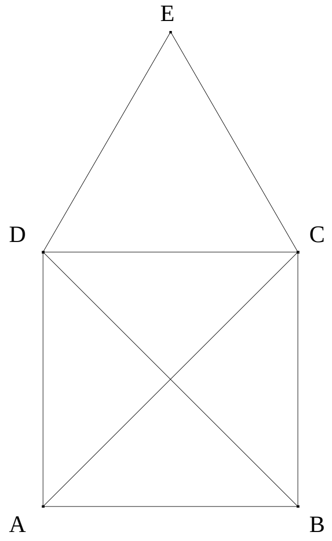
- **Conclusion :** <AMD = 135°.

Scolie : A, M et P sont alignés.

27. Sans lever le crayon

VISION

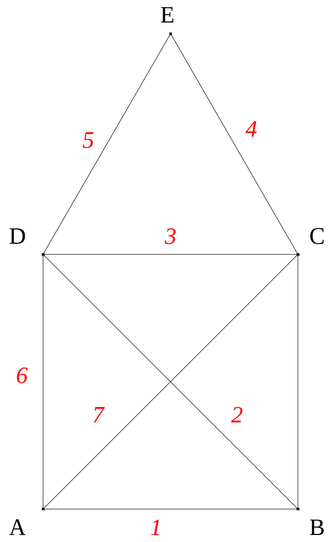
Figure :



Traits : ABCD un carré
et E le point tel que le triangle CDE soit équilatéral.

Donné : tracer cette figure sans lever le crayon. [41]

VISUALISATION



- Nombreux sont les écoliers allemands qui ont essayé de tracer cette figure sans lever le crayon en associant à chaque segment une syllabe de la phrase suivante

Das ist das Haus von Nikolaus

Énoncé traditionnel :

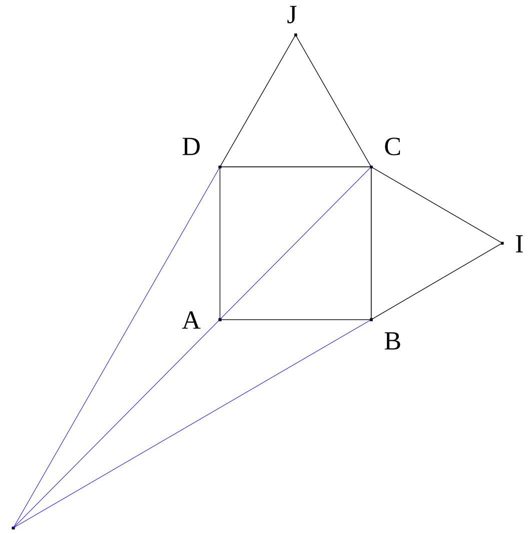
dans un plan,
on construit à l'extérieur d'un triangle équilatéral
un carré adjacent par l'un des ses côtés,
puis on trace ses diagonales

[41] Ayme J.-L., Problématique des énoncés en Géométrie, *Association des collèges du Québec*, 1990, Montréal (Québec, Canada)

28. Un carré et deux triangles équilatéraux

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré,
et I, J deux points tels que IBC et JCD soient deux triangles équilatéraux extérieurement adjacents à ABCD.

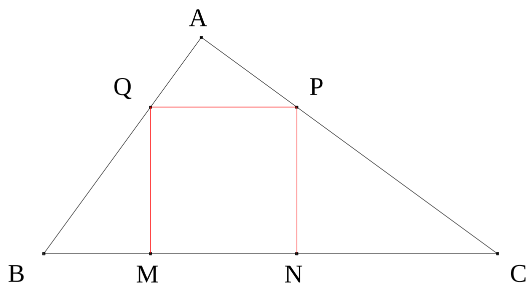
Donné : (AC), (IB) et (JD) sont concourantes.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur.[42]

29. Inscrire un carré dans un triangle

VISION

Figure :



[42] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G .G.G. vol. **6**, p. 23-24 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

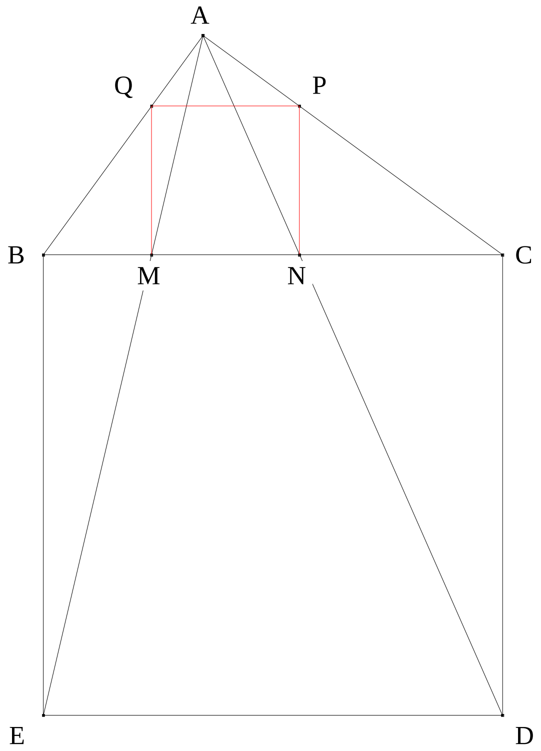
Traits : ABC un triangle
et MNPQ le carré inscrit dans ABC comme indiqué sur la figure.

Donné : construire MNPQ.

VISUALISATION

WITHOUT

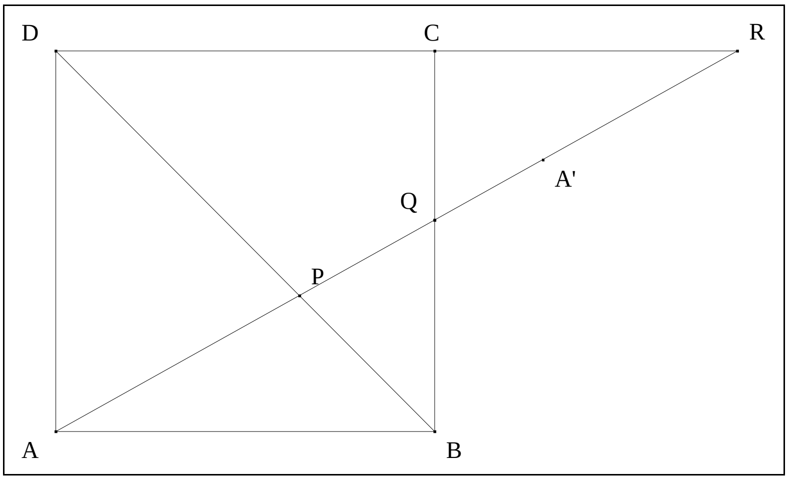
WORDS



30. Un quaterne harmonique

VISION

Figure :

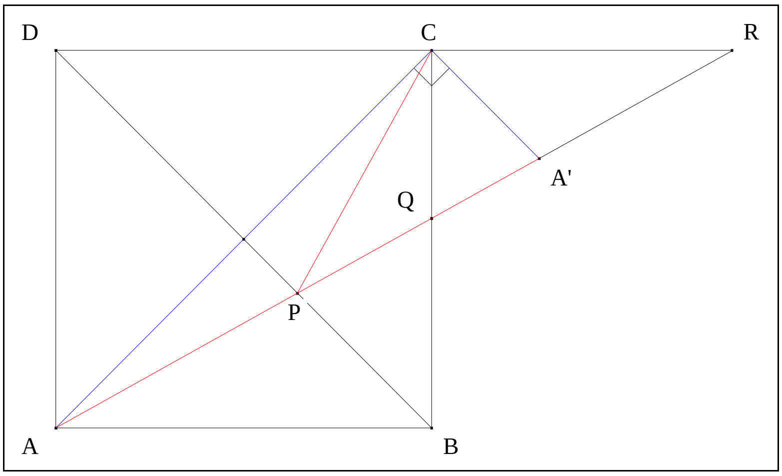


Traits : ABCD un carré,
P un point de [BC],
A' le symétrique de A par rapport à P,
S le point d'intersection de (AD) et (BC),
et Q, R les points d'intersection de (AP) resp. avec (BC), (CD).

Donné : le quaterne (Q, R, A', A) est harmonique. [43]

Commentaire : bissectrices intérieure et extérieure relative à un sommet et pinceau harmonique.

VISUALISATION



- **Scolies :** **(1)** PA = PC (= PA')

  (2) le triangle CAA' est C-rectangle.

  (3) (CA) est la C-bissectrice extérieure du triangle CQR

  (4) (CA') est la C-bissectrice extérieure du triangle CQR.

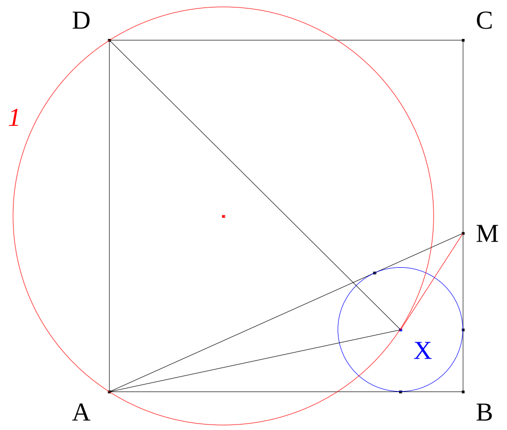
[43] Ayme J.-L., Harmonic division, AoPS du 30/12/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=568979

- **Conclusion :** le pinceau (C ; Q, R, A', A) étant harmonique,
  le quaterne (Q, R, A', A) est harmonique.

31. Une tangente

VISION

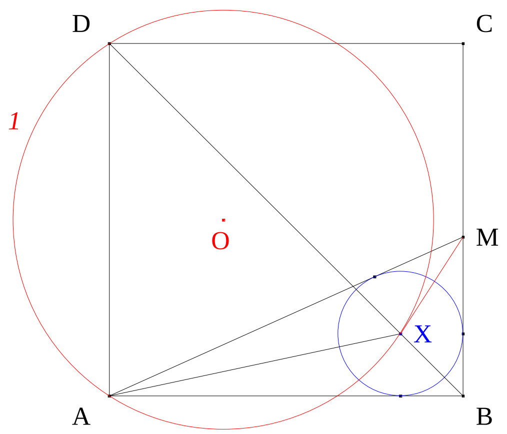
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	M	un point de [BC],
	X	le centre du cercle inscrit du triangle ABM
et	*1*	le cercle circonscrit au triangle AXD.

Donné : (XM) est tangente à *1* en X. [44]

VISUALISATION



- Notons O le centre de *1*.

- **Scolie :** X est sur (DX).

[44] Tangent to a circle, AoPS du 16/09/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=554219

- Une chasse angulaire :

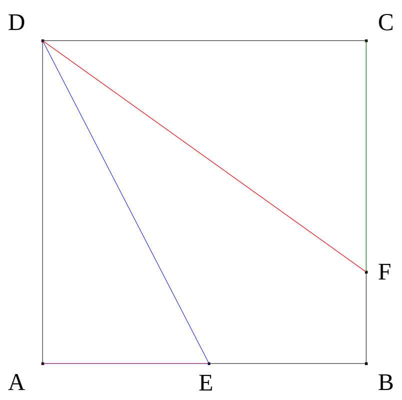
*	d'après **26.** Problème **25**,	<AXM = 1d + ½ . 90° = 135°
*	nous avons :	<ADX = 45°
*	en conséquence,	<AXO = 45°
*		<MXO = 90°.

- **Conclusion :** (XM) est tangente à *1* en X.

32. A simple equality in a square

VISION

Figure :

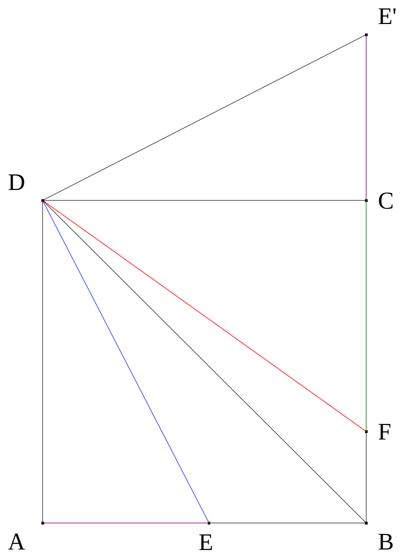


Traits : ABCD un carré,
E un point de [AB],
et F le point d'intersection du symétrique de (DA) par rapport à (DE) avec (BC).

Donné : DF = AE + CF. [45]

VISUALISATION

[45] A simple equality with a square, AoPS du 04/10/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=556880



- Notons E' le point de (BC) tel que **(1)** C soit entre F et E'
  (2) CE' = AE.

- D'après "Le théorème c.a.c. "
  appliqué aux triangles rectangle AED et CE'D, AED et CE'D sont égaux ;
  en conséquence, <ADE = CDE'.

- D'après "Le théorème angles à côtés perpendiculaires", (DE) ⊥ (DE).

- Une chasse angulaire :

  * <FDE' et <DAE ayant même complémentaire, <FDE' = <DEA
  * AED et CE'D étant égaux, <DEA = <DE'F
  * par transitivité de la relation =, <FDE' = <DE'F.

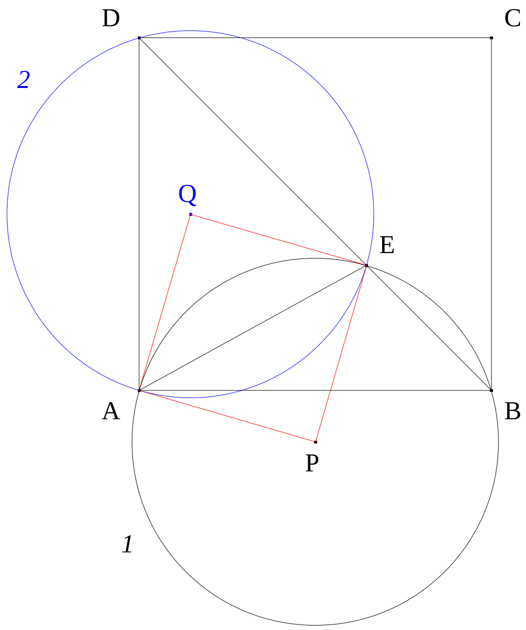
- Le triangle FDE' étant F-isocèle, DF = CE' + CF.

- **Conclusion :** par construction, DF = AE + CF.

33. AMO 2006

VISION

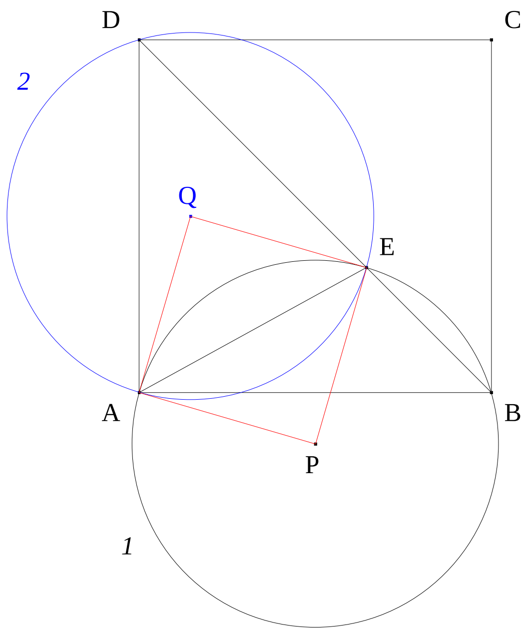
Figure :



Traits : ABCD un carré,
E un point de [BD],
1, *2* les cercles circonscrits resp. aux triangles ABE, ADE
et P, Q les centres resp. de *1*, *2*.

Donné : le quadrilatère APEQ est un carré. [46]

VISUALISATION



- D'après "Le triangle de Möbius" [47], le triangle BAD étant A-rectangle isocèle, **(1)** AP = AQ
  (2) <PAQ = 90° ;

  en conséquence, EP = EQ.

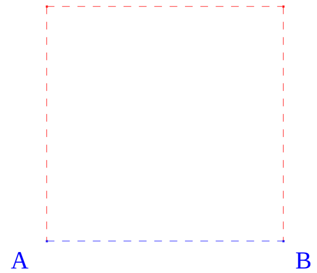
[46] Prove that apeq is a square, AoPS du 06/05/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=86545
[47] Ayme J.-L., A propos de deux cercles sécants, G.G.G. vol. **12**, p. 21-23 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

- **Conclusion :** le quadrilatère APEQ ayant quatre côtés égaux et deux côtés consécutifs perpendiculaires, est un carré.

34. Construction au compas

VISION

Figure :



Traits : A, B deux points.

Donné : construire avec pour seul outil un compas,
un carré ayant A et B pour sommets consécutifs. [48]

Commentaire : la construction suivante est basée sur le théorème de Pythagore : $3^2 + 4^2 = 5^2$.
A l'aide des sommets d'un triangle équilatéral, il est possible de construire une frise de points alignés à égale distance.

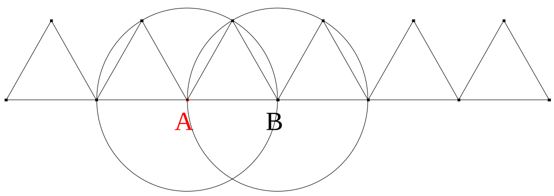
VISUALISATION

WITHOUT

WORDS

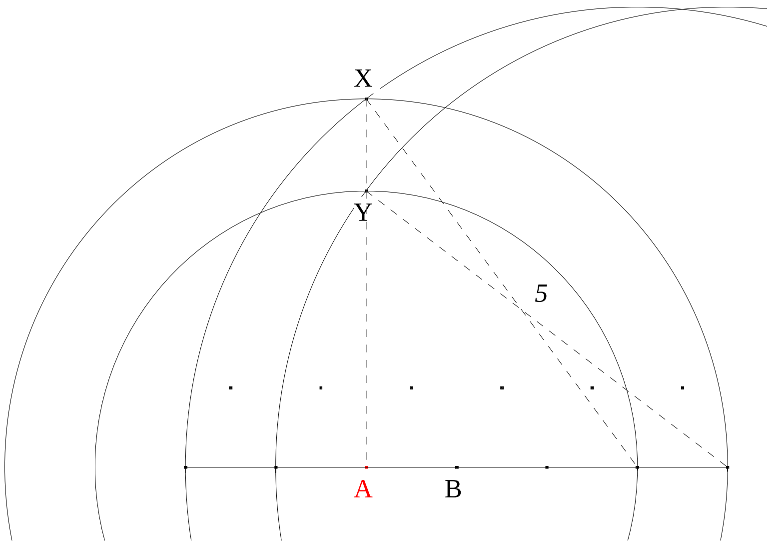
- Notons ABCD ce carré à construire.
- La construction

1. La frise horizontale à l'aide de triangles équilatéraux

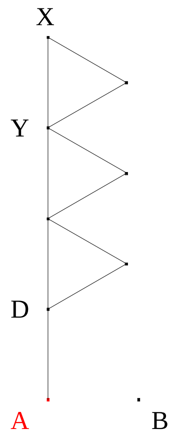


[48] Compass and square, AoPS du 04/10/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=556889

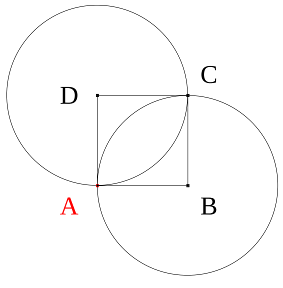
2. Les points X et Y définis à l'aide du triangle de Pythagore 3-4-5



3. La frise verticale à l'aide de triangles équilatéraux conduisant au sommet D



4. Le point C

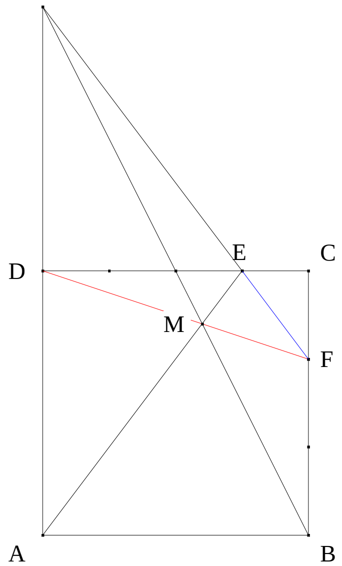


Note historique : ce problème est traité dans le livre intitulé *Mascheroni constructions* par Martin Gardner au chapitre 17.

35. Trois droites concourantes

VISION

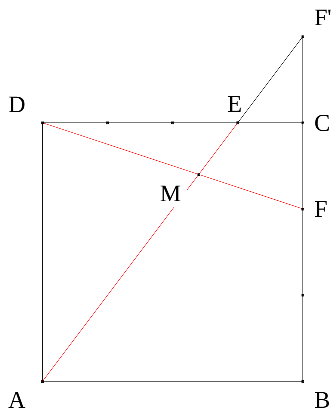
Figure :



Traits : ABCD un carré,
E le point de [CD] tel que DE = 3.EC,
F le point de [BC] tel que BF = 2.FC,
et M le point d'intersection de (AE) et (DF).

Donné : (AD), (BM) et (EF) sont concourantes. [49]

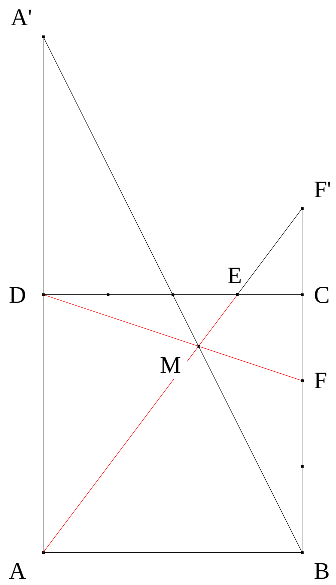
VISUALISATION



- Notons F' le point d'intersection de (AME) et (BC).

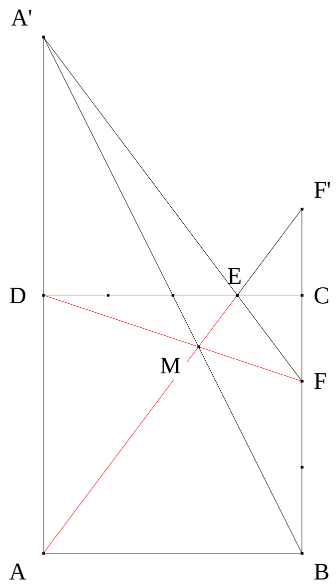
- D'après Thalès "Rapports"
  appliqué à la bande de frontières (AD) et (BC), F' est le symétrique de F par rapport à C.

[49] Ayme J.-L., Square and concurrence, AoPS du 05/10/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557012



- Notons A' le point d'intersection de (BM) et (AD).

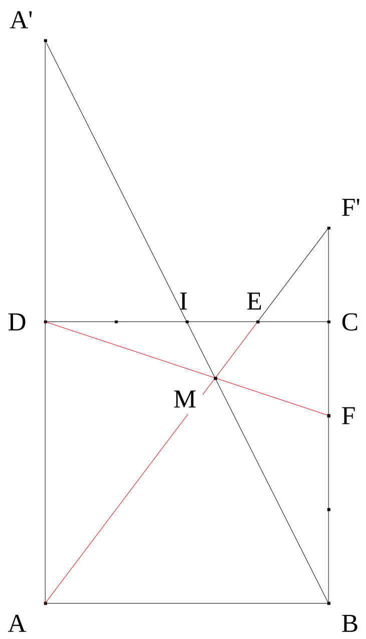
- D'après Thalès "Rapports"
  appliqué à la bande de frontières (AD) et (BC), A' est le symétrique de A par rapport à D.



- D'après Thalès "Rapports"
  appliqué à la bande de frontières (AD) et (BC),
  C, D étant les milieux resp. de [FF'], [AA'], F, E et A' sont alignés.

- **Conclusion :** (AD), (BM) et (EF) sont concourantes.

Scolie : le milieu de [CD]



- Notons I le point d'intersection de (BMA') et (CD).

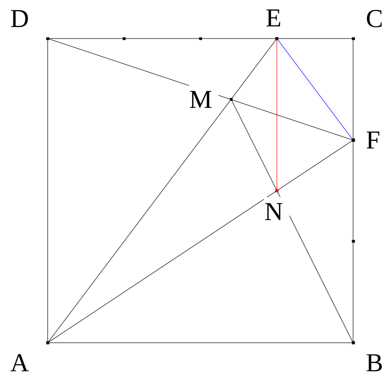
- Le quadrilatère A'DBC ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme.

- **Conclusion :** I est le milieu de [CD].

36. Une relation

VISION

Figure :

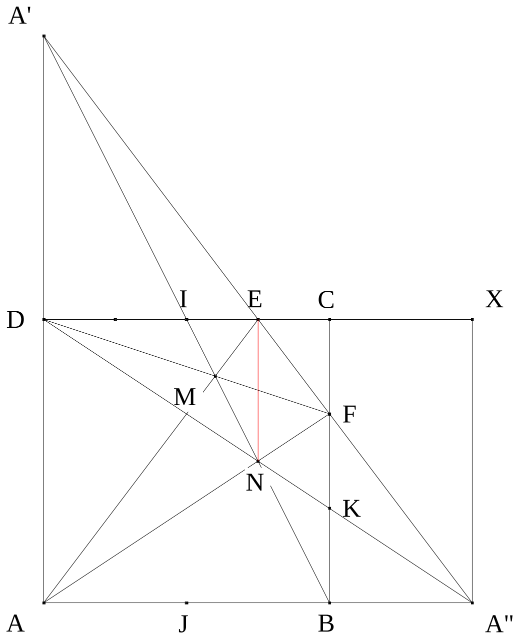


Traits :	ABCD	un carré,
	E	le point de [CD] tel que DE = 3.EC,
	F	le point de [BC] tel que BF = 2.FC
	M	le point d'intersection de (AE) et (DF),
et	N	le point d'intersection de (BM) et (AF).

Donné : 2.EN = AB. [50]

[50] Ayme J.-L., A relation in a square, AoPS du 05/10/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557017

VISUALISATION



- Aux notations du Problème **38**,
  nous ajoutons X le point tel que le quadrilatère CBA"X soit un rectangle.

- D'après Pappus "La proposition **139**"
  appliqué à l'hexagone A"FBMADA" de frontières (AA") et (DF), la pappusienne (EN) // (AD).

- **Scolies :** **(1)** E est le milieu de [DX]
  (2) A"X = BC (= AB).

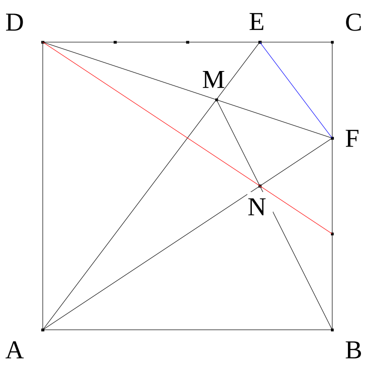
- **Conclusion :** d'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle DA"X, **(1)** N est le milieu de [DA"]
  (2) 2.EN = AB.

Scolie : (EN) est la médiatrice de [AA"].

37. Une médiane

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré,
E le point de [CD] tel que DE = 3.EC,
F le point de [BC] tel que BF = 2.FC
M le point d'intersection de (AE) et (DF),
et N le point d'intersection de (BM) et (AF).

Donné : (DN) est la N-médiane du triangle NBF. [51]

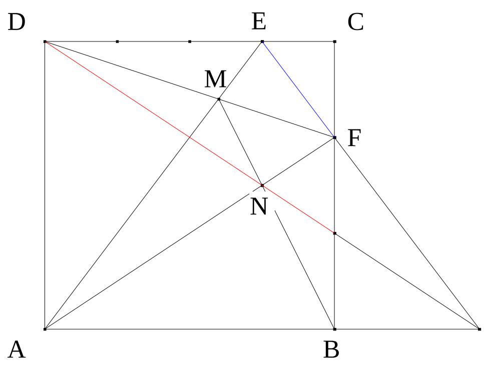
VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après Problème **38**, (DN) est la N-médiane du triangle NBF.

38. Trois droites concourantes II

VISION

Figure :

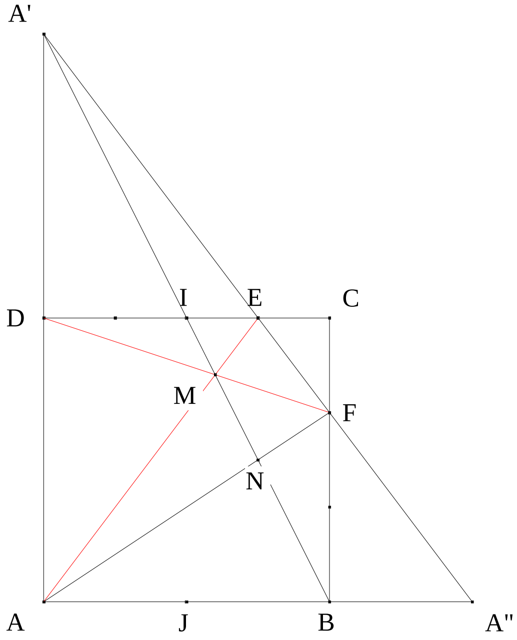


Traits : ABCD un carré,
E le point de [CD] tel que DE = 3.EC,
F le point de [BC] tel que BF = 2.FC
M le point d'intersection de (AE) et (DF),
et N le point d'intersection de (BM) et (AF).

Donné : (AB), (DN) et (EF) sont concourantes. [52]

[51] Ayme J.-L., A median in a square, AoPS du 05/10/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557019

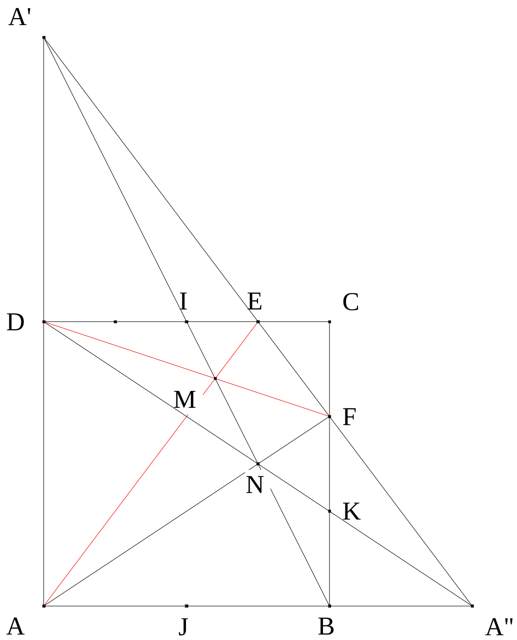
VISUALISATION



- Notons A' le symétrique de A par rapport à D,
  A" le point d'intersection de (EF) avec (AB)
  et I, J les milieux resp. de [CD], [AB].

- D'après Problème **35**, B, M, N, I et A' sont alignés.

- D'après Thalès "Rapports"
  appliqué à la bande de frontières (AB) et (CD), 2.A"B = AB ;
  en conséquence, A" est le symétrique de J par rapport à B.



- Notons K le milieu de [BF].

[52] Ayme J.-L., Square and concurrence **II**, AoPS du 05/10/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557023

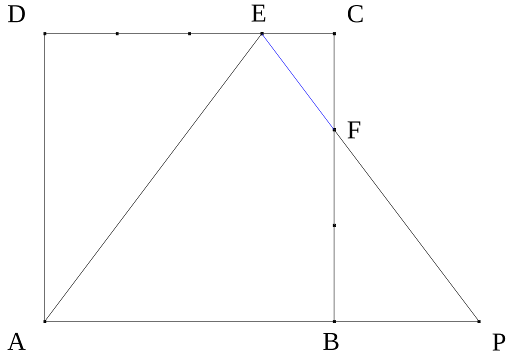
- D'après Thalès "Rapports"
  appliqué à la bande de frontières (AD) et (BC), **(1)** A", K et D sont alignés
  (2) K, N et D sont alignés.

- **Conclusion :** (AB), (DN) et (EF) sont concourantes.

39. Un triangle isocèle

VISION

Figure :

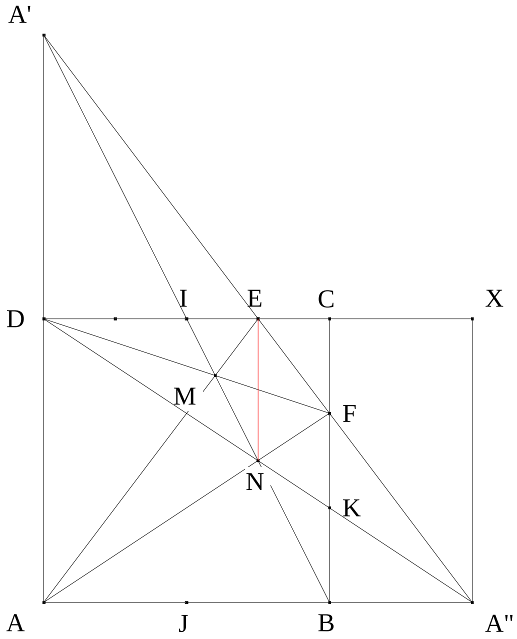


Traits :	ABCD	un carré,
	E	le point de [CD] tel que DE = 3.EC,
	F	le point de [BC] tel que BF = 2.FC
et	P	le point d'intersection de (EF) et (AB).

Donné : le triangle EAP est E-isocèle. [53]

VISUALISATION

[53] A square and an isoceles triangle, AoPS du 05/10/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557025

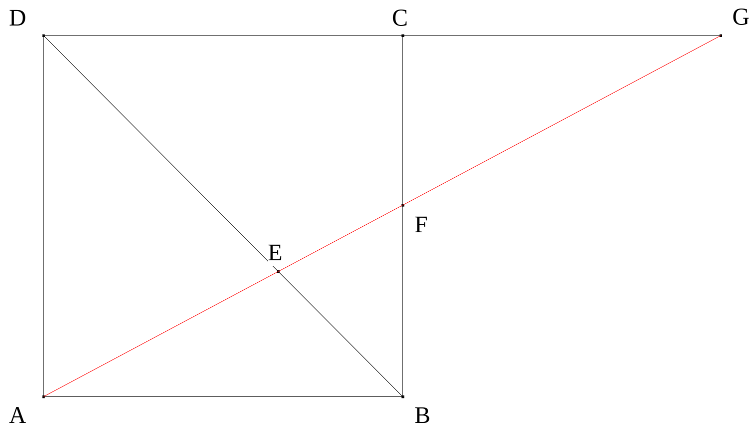


- Nous considérons les notations du Problème **36**.
- D'après Problème **36**, scolie, (EN) est la médiatrice de [AA"].
- **Conclusion :** le triangle EAP est E-isocèle.

40. Une relation

VISION

Figure :



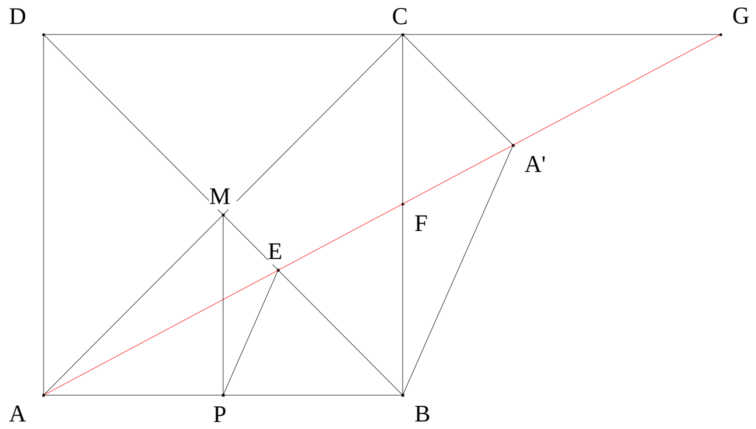
Traits : ABCD un carré,
Da une droite passant par A,
et E, F, G les points d'intersection de *Da* resp. avec (BD), (BC), (CD).

Donné : 1/EF = 1/AF + 1/AG (en mesures algébriques). [54]

---

[54] GM, AoPS du 17/12/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=567475

VISUALISATION



- Notons M le point d'intersection de (AC) et (BD),
  P le milieu de [AB]
  et A' le symétrique de A par rapport à E.

- **Scolie :** M est le milieu de [AC].

- D'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué
  * au triangle ABC, (PM) // (BC)
  * au triangle ABA', (PE) // (BA').

- D'après Desargues "Le théorème faible"
  appliqué aux triangles perspectifs PEM et BA'C, de centre A, (A'C) // (EM).

- (BD) étant parallèle à (A'C) et M étant le milieu de [AC],
  le pinceau (C ; A, A', F, G) est harmonique.

- **Conclusion partielle :** le quaterne (A, A', F, G) est harmonique.

- D'après "La relation de Descartes" (Cf. **6.** Quickies **5**) [55], 2/AA' = 1/AF + 1/AG (en mesures algébriques).

- **Conclusion :** par simplification, 1/EF = 1/AF + 1/AG (en mesures algébriques).

[55] Ayme J.-L., Quickies, vol. **15** ; http//:jl.ayme.pagesperso-orange.fr/