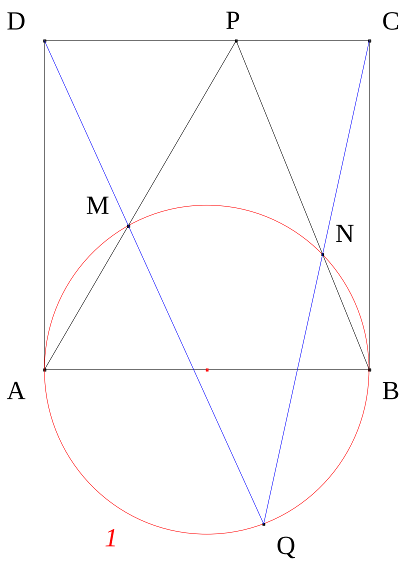
MINIATURES GÉOMÉTRIQUES

SUR UN CARRÉ [1]

Jean - Louis AYME [2]



Résumé. L'auteur propose 43 miniatures mettant en œuvre un carré et quelques constructions annexes. Progressivement un thème de dégage et des sous-thèmes apparaissent…
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author offers 34 miniatures implementing a square and a few ancillary buildings. Gradually a theme appears and sub-themes come up…
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

---

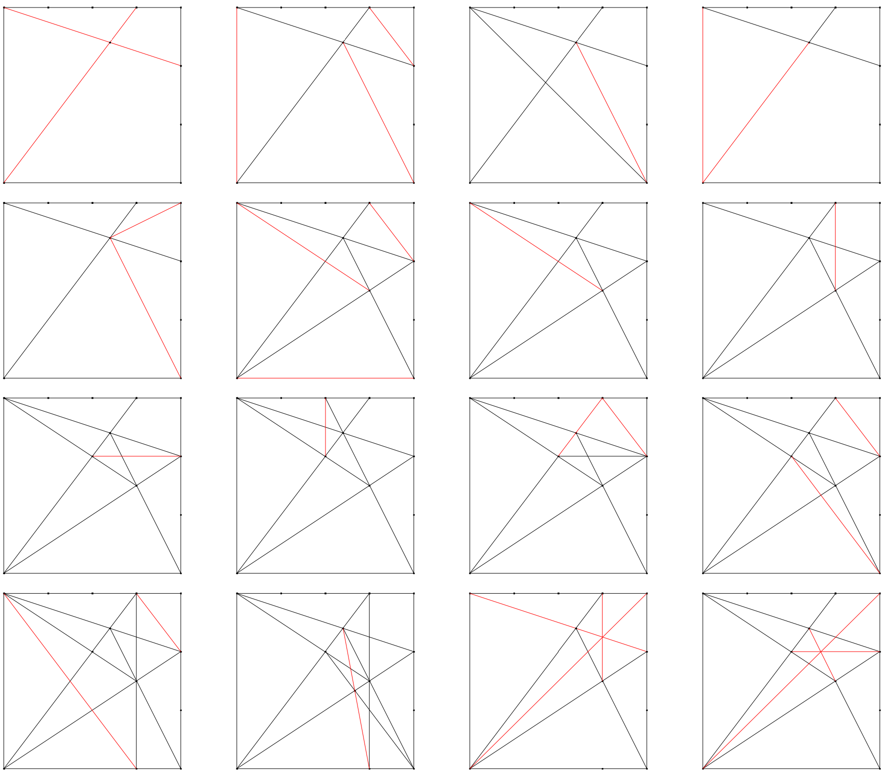
[1] Voir **D.** Étymologie de carré

[2] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 25/11/2010 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

A. UN POINT DE VUE

Les figures présentées par l'auteur lui ont fait penser à des **miniatures** i.e. à des images participant à l'enluminure d'un manuscrit.
Pour un géomètre sensible aux formes, la figure qui lui apparaît dans une **vision** est celle d'un Sujet qu'on appelait autrefois "être" géométrique. En dévoilant ses **traits** essentiels à son regard amical, le Sujet lui laisse gracieusement entrevoir une illumination, voire un théorème. Comme cela est souvent le cas, le géomètre réagit d'une façon belliqueuse en aiguisant son regard qui devient binoculaire. Agressé visuellement, le généreux Sujet se voile dans une configuration en abandonnant un **donné** inerte à la raison du géomètre.
Ayant perdu la vision, celui-ci choisit alors un mode de raisonnement et une méthode géométrique qui lui permettent de visualiser comme un aveugle sa propre démarche. Avec l'aide de techniques particulières qui aplanissent son chemin, il progresse vers le donné qu'il désire s'approprier. Cette démarche raisonnée prend alors l'allure d'un **schéma de démonstration** i.e. d'une **visualisation** lorsque seuls les points principaux et les relations présentes dans la configuration, sont retenus. Ce schéma logico-déductif permet alors de comprendre le cheminement et le projet du géomètre dont le désir est de faire partager avec d'autres, le résultat auquel il est parvenu.



[3]

---

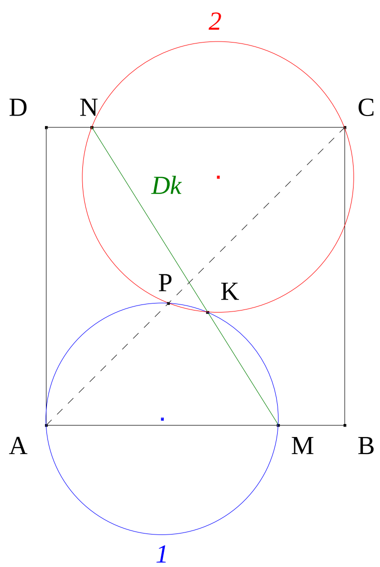
[3] Ayme J.-L., Mosaïque dans un carré, G.G.G. vol. **20** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

B. DES MINIATURES

1. Un point sur une diagonale d'un carré de *Kvant*

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	K	un point à l'intérieur de ABCD,
	Dk	une droite passant par K,
	M, N	les points d'intersection resp. de *Dk* avec [AB], [CD],
	1, *2*	les cercles circonscrits resp. aux triangles AMK, CNK
et	P	le second point d'intersection de *1* et *2*.

Donné : P est sur (AC). [4]

VISUALISATION

- Par hypothèse, (MA) // (NC).
- Les cercles *1* et *2*, les points de base K et P, la monienne (MKN), les parallèles (MA) et (NC), conduisent au théorème **0'** de Reim ;
  en conséquence, A, P et C sont alignés.
- **Conclusion :** P est sur (AC).

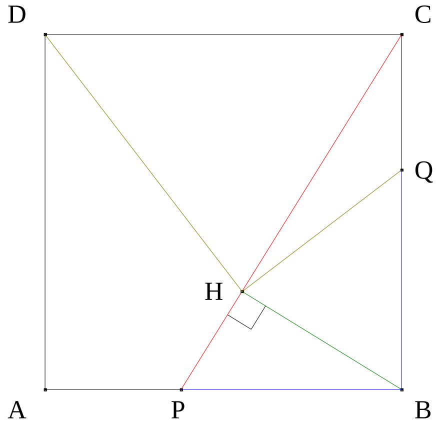
Note historique : le fameux journal de mathématique et physique, *Kvant*, a été fondé par Marc Bachmakov qui deviendra plus tard le seul académicien russe a être détenteur du "Léopard des neiges" décerné aux alpinistes ayant vaincu tous les "plus de 7000m" de l'ex-URSS .

[4] *Kvant*, janvier 1987.

2. Deux droites perpendiculaires dans un carré

VISION

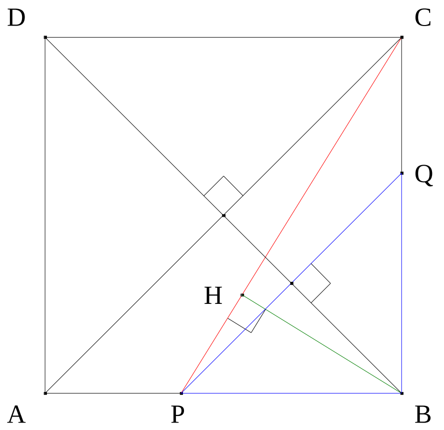
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	P, Q	deux points appartenant resp. à [AB], [BC] tels que BP = BQ
et	H	le pied de la perpendiculaire abaissée de B sur (CP).

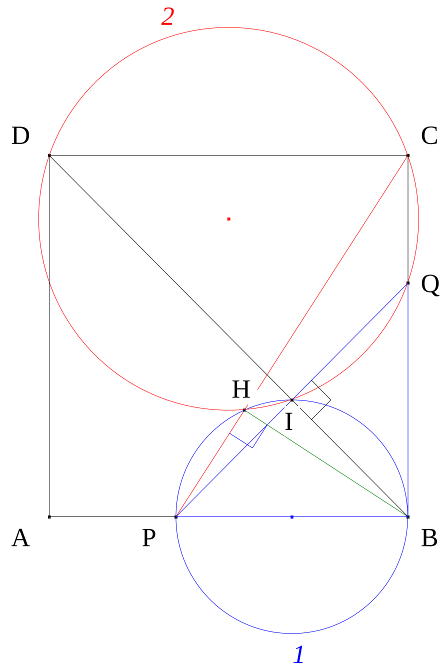
Donné : (HQ) est perpendiculaire à (HD).[5]

VISUALISATION



- Nous avons, (PQ) // (AC) ;
  par hypothèse, (AC) ⊥ (BD) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (PQ) ⊥ (BD).

[5] Exercice proposé lors de l'entraînement de l'équipe française pour les O.I.M. ;
Not as easy, *Mathlinks* du 10/01/2007 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=127915.

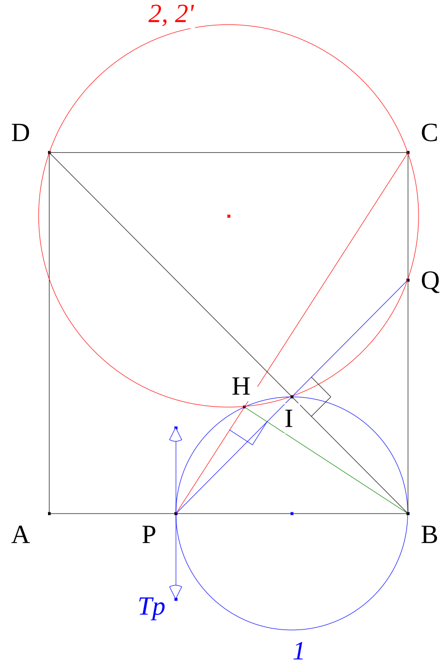


- Notons I le point d'intersection de (PQ) et (BD);
  et *1* le cercle de diamètre [BP] ; il passe par I et H.

- **Scolie :** (BP) est parallèle à (DC).

- Le cercle *1*, les points de base H et I, les moniennes naissantes (BID) et (PHC), les parallèles (BP) et (DC), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
  en conséquence, H, I, C et D sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle.



- Notons *Tp* la tangente à *1* en P.

- Par définition d'une tangente, *Tp* ⊥ (BP) ;

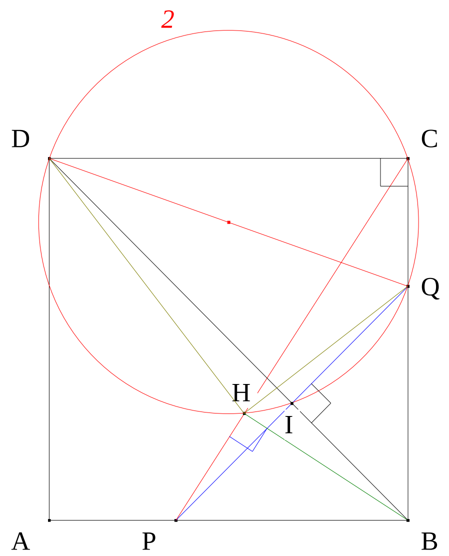
par hypothèse, (BP) ⊥ (BQC) ;
d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, *Tp* // (CQ).

- Le cercle *1*, les points de base H et I, les moniennes naissantes (PHC) et (PIQ), les parallèles *Tp* et (CQ), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
  en conséquence, H, I, C et Q sont cocycliques.

- Notons *2'* ce cercle.

- *2* et *2'* ayant trois points distincts en communs, sont confondus.

- **Conclusion partielle :** H, I, C, D et Q sont cocycliques.



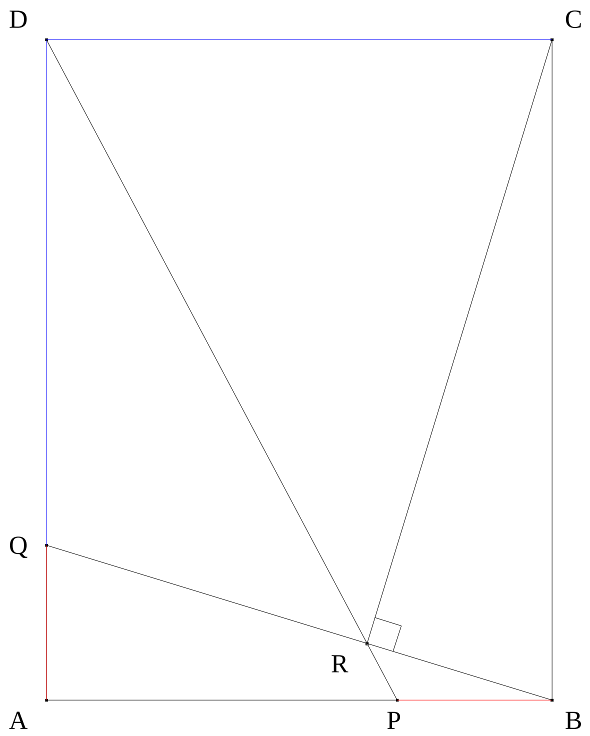
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle",
  le triangle CDQ étant C-rectangle, *2* est le cercle de diamètre [DQ] ;
  en conséquence, le triangle HDQ est H-rectangle.

- **Conclusion :** (HQ) est perpendiculaire à (HD).

3. Deux droites perpendiculaires dans un rectangle

VISION

Figure :

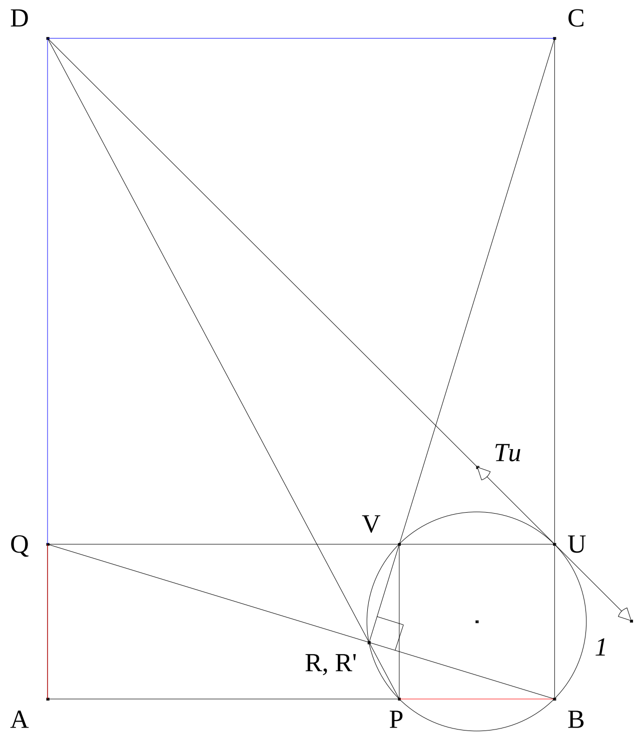


Traits :	ABCD	un rectangle,
	P, Q	deux points appartenant resp. à [AB], [AD] tels que DQ = BQ et BP = AQ,
et	R	le point d'intersection de (BQ) et (DP).

Donné : (CR) est perpendiculaire à (BQ). [6]

VISUALISATION

[6] Perpendicular segment, *Mathlinks* du 23/10/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=57468.



- Notons U, V deux points tels que QDCU et BPVU soient resp. deux carrés,
  1 le cercle circonscrit à BPVU
  et *Tu* la tangente à *1* en U.

- **Scolie :** *Tu* passe par D.

- Notons R' le second point d'intersection de (DP) avec *1*.

- D'après "L'équivalence d'Aubert-MacKensie" (Cf. Annexe **1**)

  (1) appliqué à l'hexagone dégénéré *Tu* BPR'VU, R', V et C sont alignés

  (2) appliqué à l'hexagone dégénéré *Tu* BR'PVU, B, R' et Q sont alignés ;

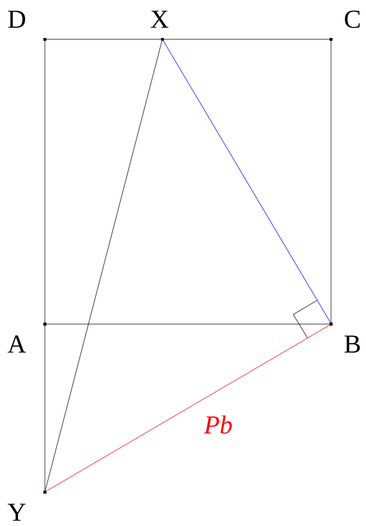
  en conséquence, R' est confondus avec R.

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (CR) est perpendiculaire à (BQ).

4. Un triangle isocèle

VISION

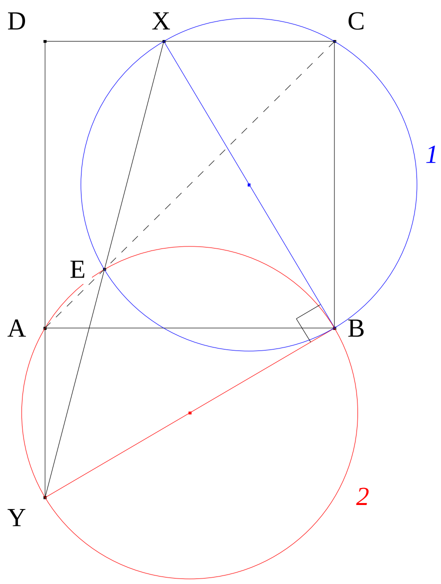
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	X	un point de [CD],
	Pb	la perpendiculaire à (BX) en B
et	Y	le point d'intersection de *Pb* avec (AD).

Donné : le triangle BXY est B-isocèle.

VISUALISATION



- Notons *1*, *2* les cercles de diamètre resp. [BX], [BY],
  et E le second point d'intersection de *1* et *2*.

- **Scolie :** X, E et Y sont alignés.

- Les moniennes brisées (YBX) et (ABC) étant rectangulaires en B,
  d'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe **2**), A, E et C sont alignés.

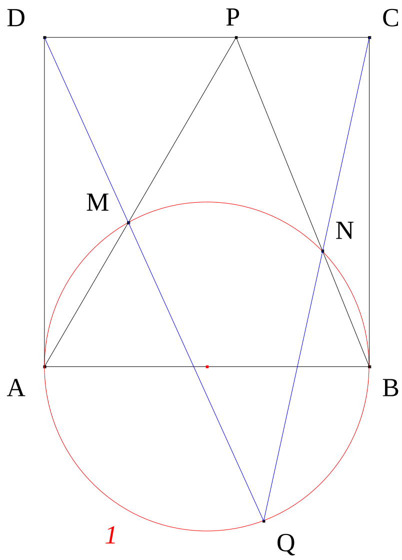
- D'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe **2**), le triangle BXY est semblable au triangle B-isocèle BCA.

- **Conclusion :** le triangle BXY est B-isocèle.

5. Intersection sur un cercle

VISION

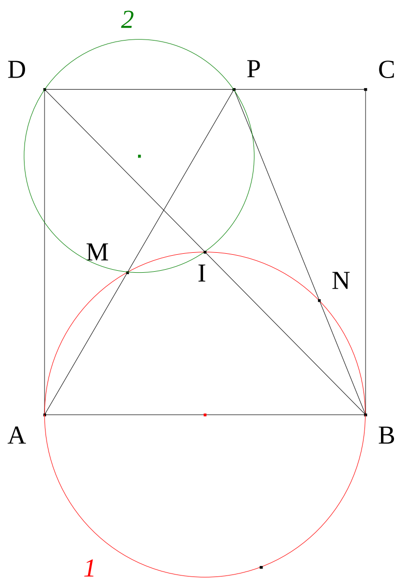
Figure :



Traits :	ABCD	un triangle carré,
	P	un point de]CD[,
	1	le cercle de diamètre [AB],
	M, N	les seconds points d'intersection resp. de (PA), (PB) avec *1*
et	Q	le point d'intersection de (CN) et (DM).

Donné : Q est sur *1*.[7]

VISUALISATION

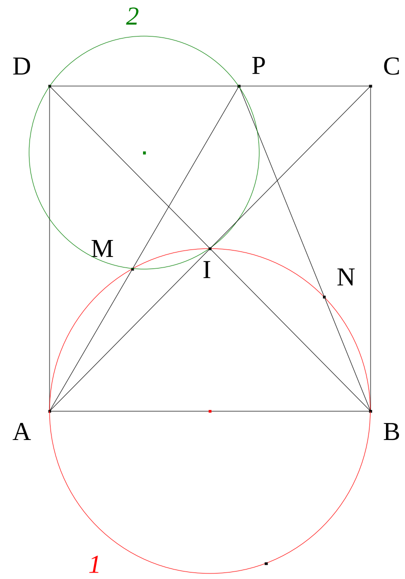


[7] Geometry Problem (22), *Mathlinks* du 19/08/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=362839.
Point on a circle, *Mathlinks* du 30/04/2005 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=35359.

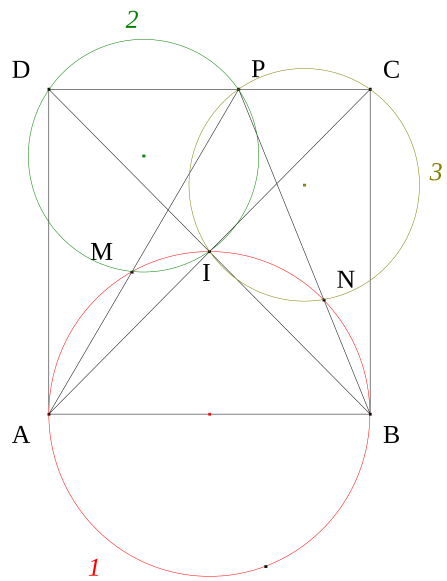
- Notons *2* le cercle circonscrit au triangle MPD
  et I le second point d'intersection de *1* et *2*.

- **Scolie :** (AB) est parallèle à (PD).

- Les cercles *1* et *2*, les points de base M et I, la monienne (AMP), les parallèles (AB) et (PD), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, B, I, D sont alignés.



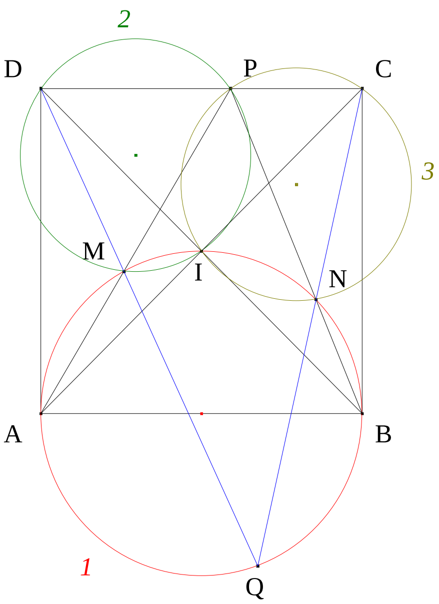
- **Scolie :** (AC) et (BD) sont sécantes en I.



- **Scolie :** (AB) est parallèle à (CP).

- Le cercle *1*, les points de base I et N, les moniennes (AIC) et (BNP), les parallèles (AB) et (CP), conduisent au théorème **0"** de Reim ; en conséquence, I, N, C et P sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.



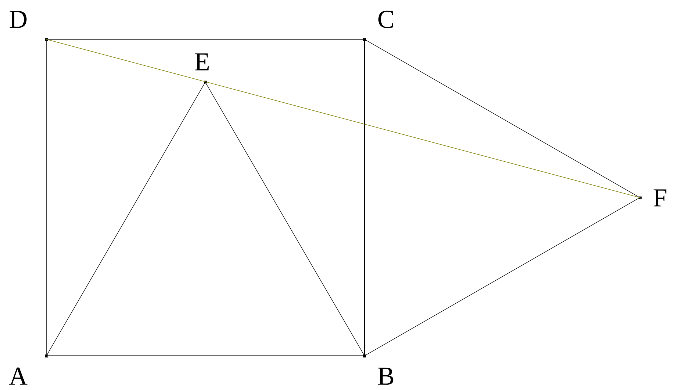
- **Scolie :** I est le pivot du triangle CDQ.

- **Conclusion :** d'après Miquel "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe **3**) appliqué à CDQ, Q est sur *1*.

6. Un carré et deux triangles équilatéraux

VISION

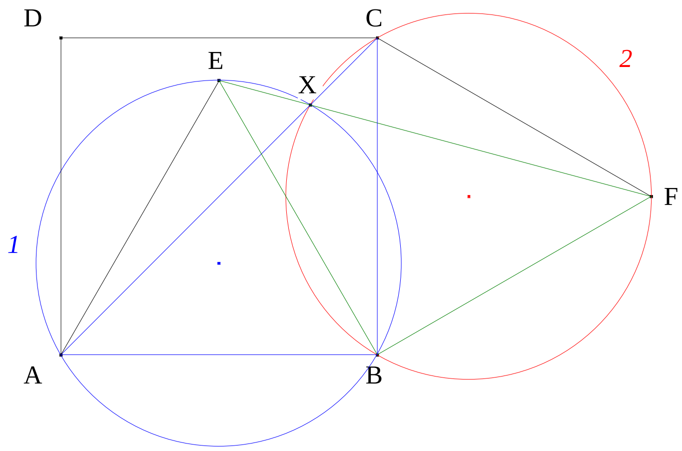
Figure :



Traits : ABCD un carré,
et ABE, BCF deux triangles équilatéraux resp. intérieur, extérieur à ABCD.

Donné : D, E et F sont alignés.

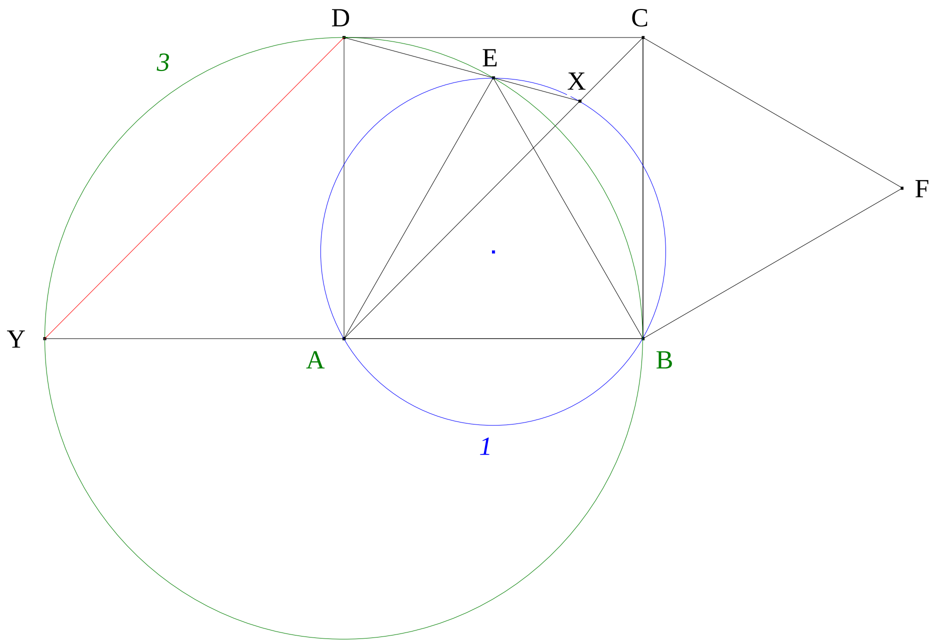
VISUALISATION



- Notons 1, 2 les cercles circonscrits resp. aux triangles ABE, BCF
  et X le second point d'intersection de *1* et *2*.

- D'après Descartes "Rotation d'un triangle" (Cf. Annexe **4**)
  appliqué à ABE et CBF extérieurs au triangle BCE, (AC) et (EF) passent par X.

- **Conclusion partielle :** E, X et F sont alignés.



- Notons *3* le cercle de centre A passant par B ; il passe par E et D ;
  et Y le second point d'intersection de (AB) avec *3*.

- Le quadrilatère ACDT ayant deux côtés opposés parallèles, est un parallélogramme;
  en conséquence, (AXC) // (YD).

- Les cercles *1* et *3*, les points de base B et E, la monienne (ABY) et les parallèles (AX) et (YD),
  conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, X, E et D sont alignés.

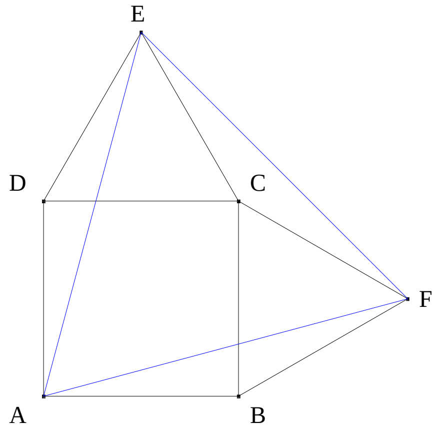
- D'après l'axiome d'incidence Ia, (EXF) et (XED) sont confondues.

- **Conclusion :** D, E et F sont alignés.

7. Une miniature de Victor Thébault

VISION

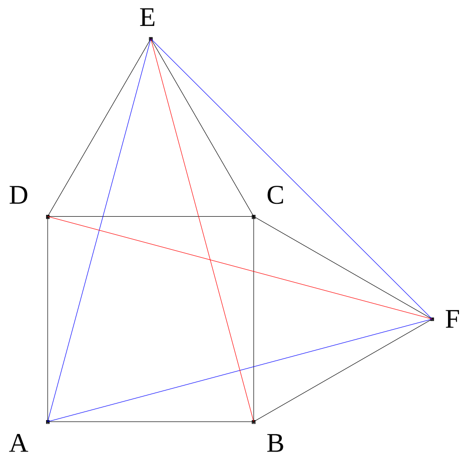
Figure :



Traits : ABC un triangle,
et BFC, CED deux triangles équilatéraux, extérieurs à ABCD.

Donné : le triangle AEF est équilatéral.[8]

VISUALISATION



- D'après Descartes "Rotation d'un triangle" (Cf. Annexe **4**) appliqué aux triangles CEB et CDF, BE = DF.

- **Scolies :** **(1)** la médiatrice de [AB] est celle de [CD] ; elle passe par E
  (2) la médiatrice de [AD] est celle de [CB] ; elle passe par F.

- D'après "Le théorème de la médiatrice", BE = AE et DF = AF;
  en conséquence, AE = AF.

[8] Thébault V. (1937).

- Par une chasse angulaire, nous montrerions que (CE) ⊥ (BF) ;
  en conséquence, (CE) est la médiatrice de [BF].

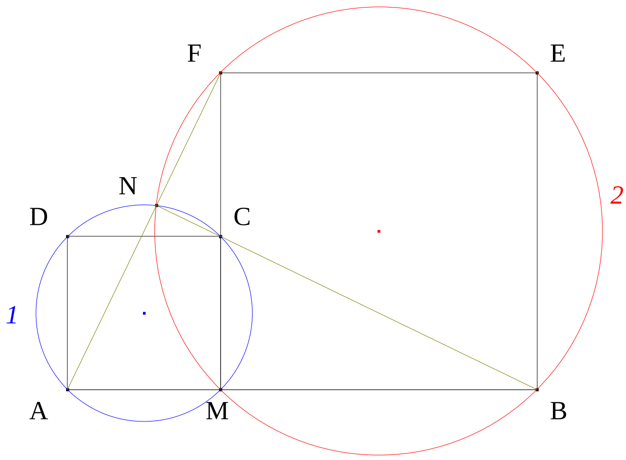
- D'après "Le théorème de la médiatrice", BE = FE.

- **Conclusion :** le triangle AFE est équilatéral.

8. Première O.I.M. (1959)

VISION

Figure :



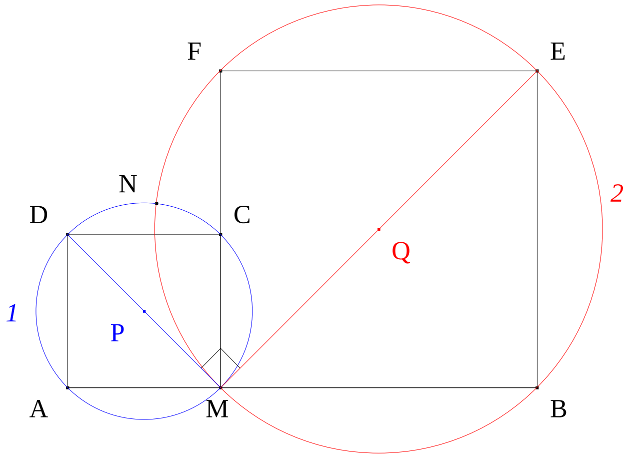
Traits :	[AB]	un segment,
	M	un point de]AB[,
	AMCD	un carré,
	MBEF	un carré situé du même côté que AMCD par rapport à (AB),
	1, *2*	les cercles circonscrits resp. à AMCD, MBEF
et	N	le second point d'intersection de *1* et *2*.

Donné : N est le point d'intersection de (AF) et (BC).[9]

VISUALISATION

---

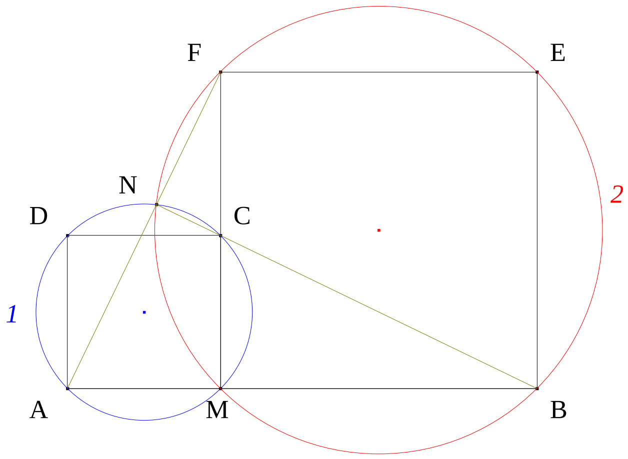
[9] First OIM (1959) Bucarest (Roumanie) Day 2, Problem **5**.



- Notons P, Q les centres resp. des carrés AMCD et MBEF.

- **Scolie :** (MPD) ⊥ (MQE).

- **Conclusion partielle :** *1* et *2* sont orthogonaux.



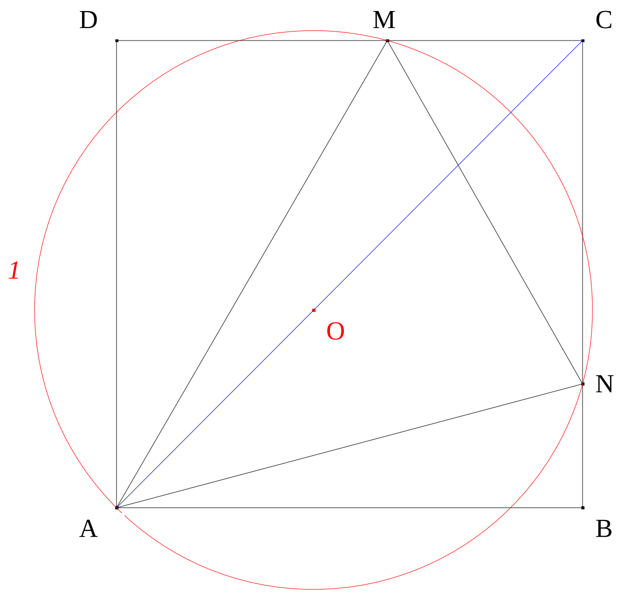
- Par hypothèses, (MA) ⊥ (MCF) et (MC) ⊥ (MB) ;
  d'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe **2**) **(1)** A, N et F sont alignés
  (2) C, N et B sont alignés.

- **Conclusion :** N est le point d'intersection de (AF) et (BC).

9. ***Baltic way*** **(2003) Problème 12**

VISION

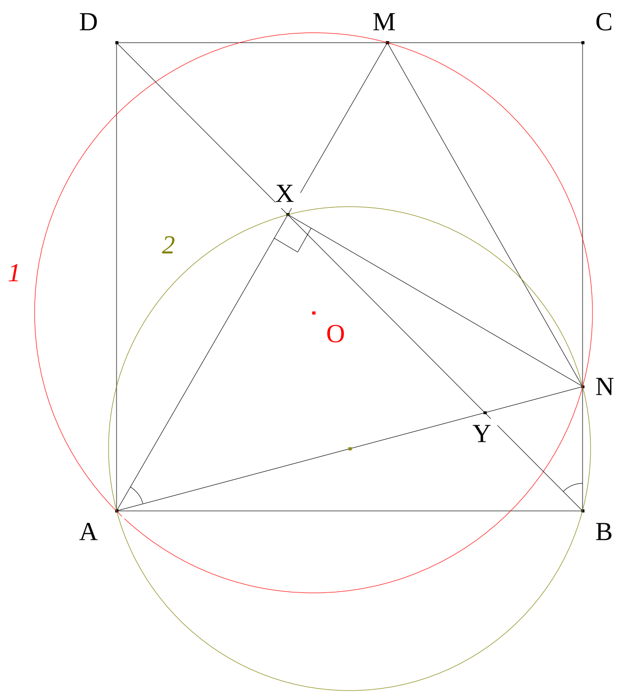
Figure :



Traits : ABCD un carré,
M un point de]CD[,
N un point de]BC[tel que <NAM = 45°,
1 le cercle circonscrit au triangle AMN
et O le centre de *1*.

Donné : O est sur (AC).[10]

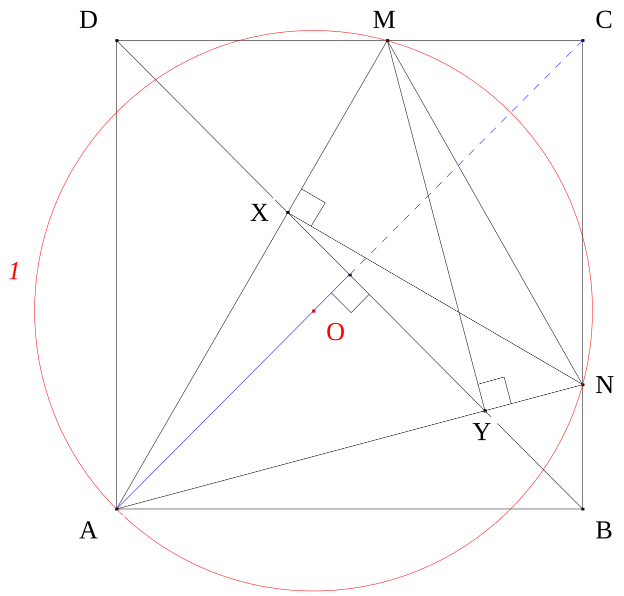
VISUALISATION



- Notons X, Y les points d'intersection de (BD) resp. avec (AM), (AN).

[10] Points M and N on the square ABCD [Baltic way 2003], *Mathlinks* du 06/11/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=376339.

- **Scolie :** <NAM = <NBX (= 45°).
- D'après "Le théorème de l'angle inscrit", A, B, N et X sont cocycliques.
- Notons *2* ce cercle.
- (AN) étant un diamètre de *2*, (NX) ⊥ (AX).
- **Conclusion partielle :** (NX) est la N-hauteur de AMN.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que (MY) est la M-hauteur de AMN.
- D'après von Nagel "Un rayon"[11], (AO) ⊥ (DXYB).[12]
- (AO) étant perpendiculaire à la diagonale (BD) de ABCD, (AO) passe par C.
- **Conclusion :** O est sur (AC).

Note historique : ce problème a été posé lors du *Baltic way* qui s'est déroulé le 2 novembre 2003 à Riga (Lettonie).

Baltic Way team competition est le nom d'un concours régional de mathématiques initié en 1990 et s'adressant à des lycéens de onze pays proche de la mer Baltique où du nord de l'Europe : les trois pays fondateurs, Estonie, Lettonie, Lituanie auxquels s'ajoutent Danemark, Finlande, Suède, Norvège, Pologne, Allemagne (représentant sa partie la plus au nord avec Rostock et Hambourg), Russie (représentant la région de St.-Petersbourg), Islande (pour avoir été le premier pays à reconnaître l'indépendance des états baltes). A la discrétion des organisateurs, des pays sont invités comme Israël en 2001, Biélorussie en 2004, Belgique en 2005.
Chaque équipe est composée de 5 lycéens qui sont confrontés à résoudre 20 problèmes en 4h 30.

---

11 Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 19 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

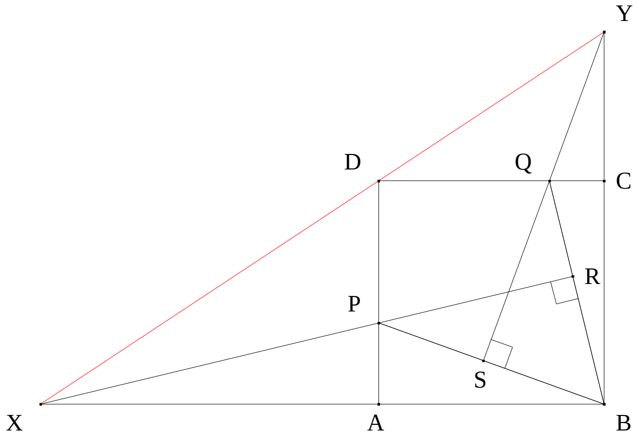
12 Ayme J.-L., Four collinear points, *Mathlinks* du 10/11/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=376897.
Indian Regional MO (1999) Problem 3 ;
Mortici C., Folding a square to identify adjacent sides, *Forum Geometricorum* **9** (2009) 100 ;
http://forumgeom.fau.edu/FG2009volume9/FG200908index.html

Cette compétition a lieu en général en automne. Elle commémore la *Baltic chain* du 23 août 1989 (date du 50-ème anniversaire du pacte germano-soviétique) où deux millions environ de personnes se sont données la main pour former une chaîne humaine de plus de 600 km traversant les trois états baltes de Tallinn à Vilnius pour protester contre le communisme et réclamer l'indépendance de leurs pays.

10. Deux points alignés avec un sommet d'un carré

VISION

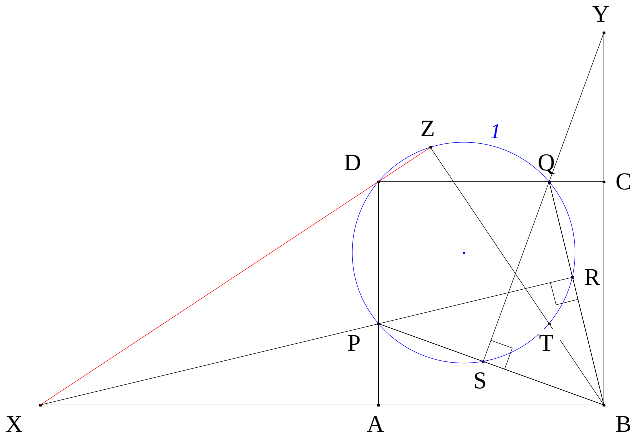
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	P, Q	deux points de]AD[,]CD[
	R	le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur (BQ),
	S	le pied de la perpendiculaire abaissée de Q sur (BP),
	X	le point d'intersection de (PR) et (AB),
et	Y	le point d'intersection de (QS) et (BC).

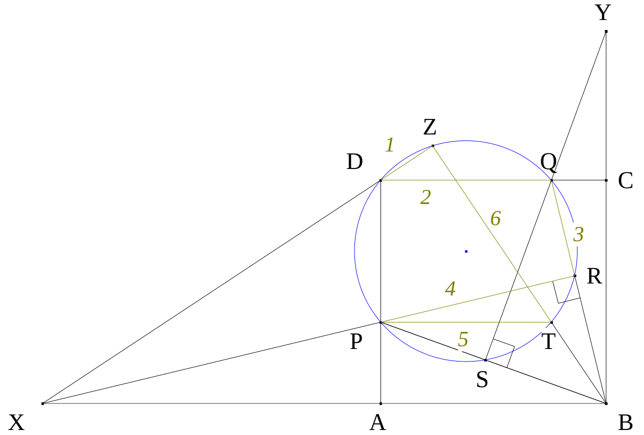
Donné : X, Y et D sont alignés.[13]

VISUALISATION

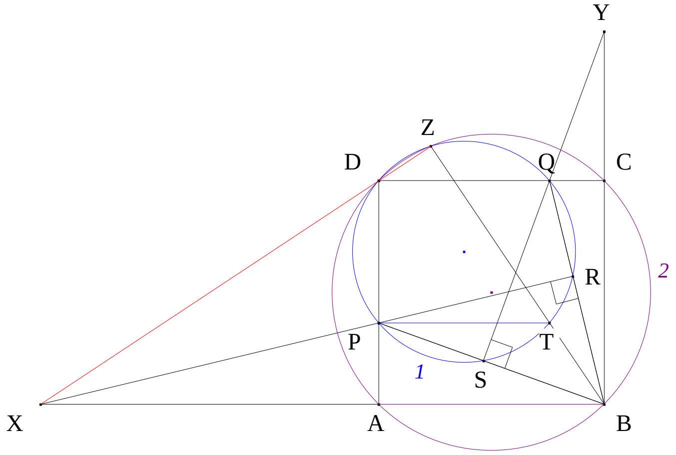


[13] Collinear points, *Mathlinks* du 30/07/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=359606.

- Notons *1* le cercle de diamètre [PQ] ; il passe par D, R et S ;
  Z le second point d'intersection de (DX) avec *1*
  et T le second point d'intersection de (BZ) avec *1*.

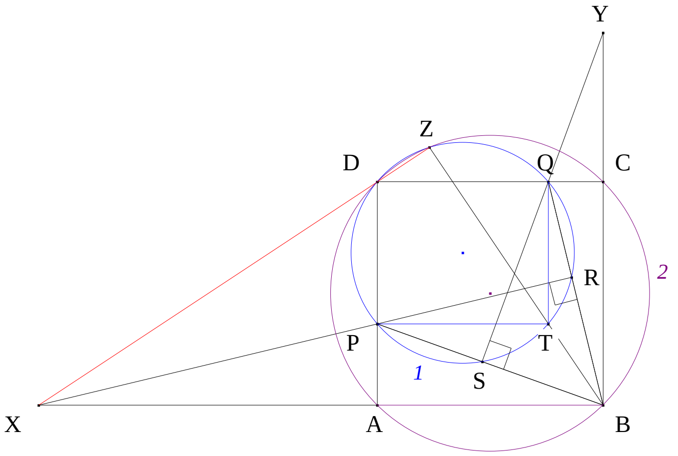


- D'après "L'équivalence d'Aubert" (Cf. Annexe **1**)
  appliqué à l'hexagone cyclique ZDQRPTZ, la pascalienne (XB) est parallèle à (PT).

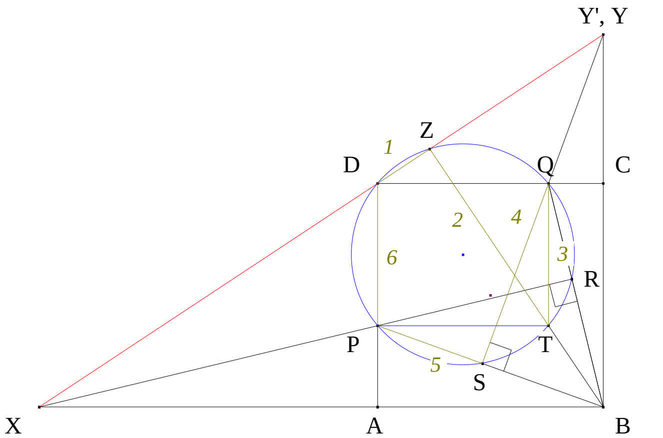


- Notons *2* le cercle de diamètre [AC] ; il passe par D et B.

- Les cercles *2* et *1*, le point de base D, la monienne (ADP), les parallèles (AB) et (PT),
  conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, *2* passe par Z.



- **Scolie :** (QT) est parallèle à (BCY).



- Notons Y' le point d'intersection de (DZ) et (BC).

- D'après "L'équivalence d'Aubert" (Cf. Annexe **1**)
  appliqué à l'hexagone cyclique DZTQSPD, **(1)** (BY) est la pascale
  (2) (BY) est parallèle à (QT) ;

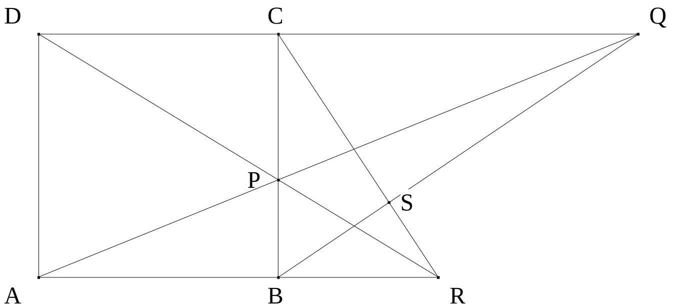
  en conséquence, Y' et Y sont confondus.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, X, Y et D sont alignés.

11. Deux droites perpendiculaires

VISION

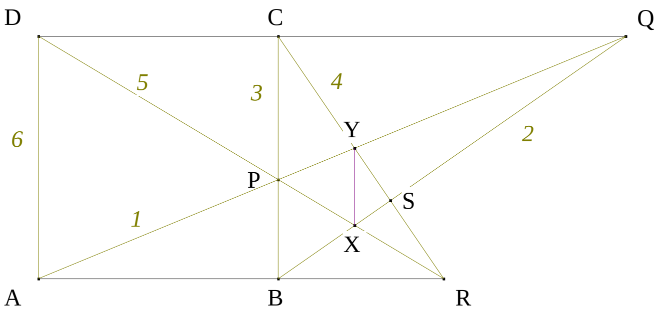
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	P	un point de]BC[,
	Q, R	les points d'intersection de (AP) et (CD), (DP) et (AB),
et	S	le point d'intersection de (BQ) et (CR).

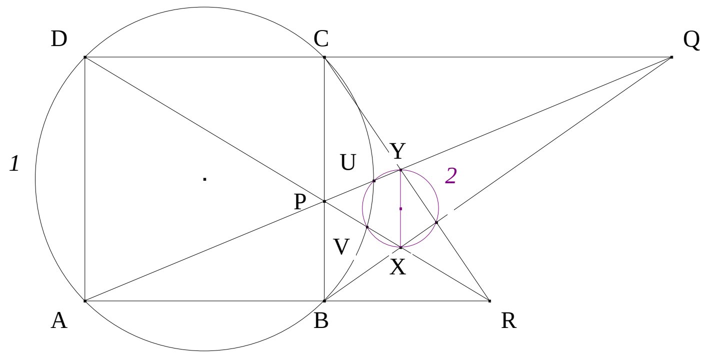
Donné : (BQ) est perpendiculaire à (CR).[14]

VISUALISATION



- Notons X, Y les points d'intersection resp. de (BQ) et (DR), (AQ) et (CR).

- D'après "L'équivalence d'Aubert" (Cf. Annexe **1**)
  appliqué à l'hexagone cyclique AQBCRDA, **(1)** (XY) est la pascale
  (2) (XY) // (AD).

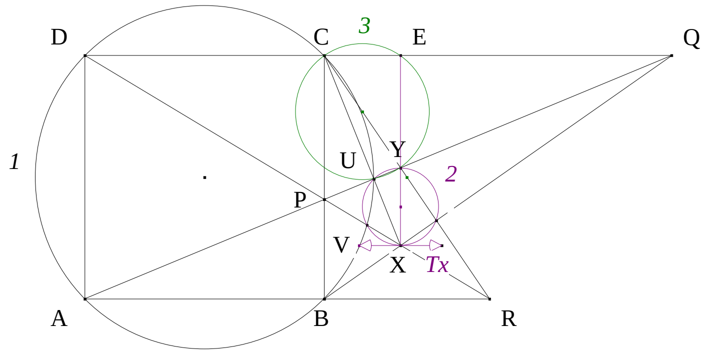


- Notons *1* le cercle circonscrit à ABCD
  et U, V les seconds points d'intersection resp. de (AQ), (DR) avec *1*.

[14] Can you solve this problem without circle and cyclic quad?, *Mathlinks* du 27/07/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=359124.

- Le cercle *1*, les points de base U et V, les moniennes naissantes (AUY) et (DVX), les parallèles (AD) et (YX), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
  en conséquence, U, V, X et Y sont cocycliques.

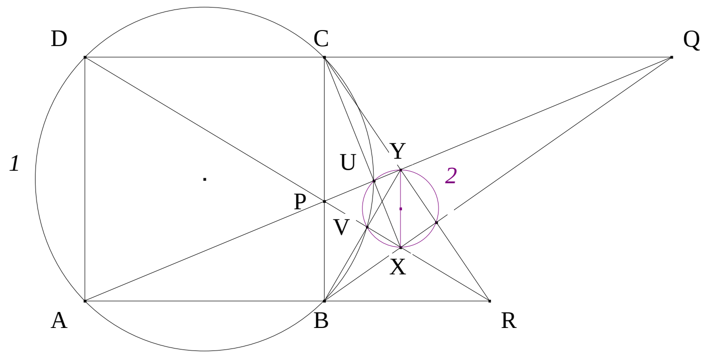
- Notons *2* ce cercle.



- Notons *Tx* la tangente à *2* en X,
  3 le cercle de diamètre [CY] ; il passe par U ;
  et E le second point d'intersection de (CQ) avec *3*.

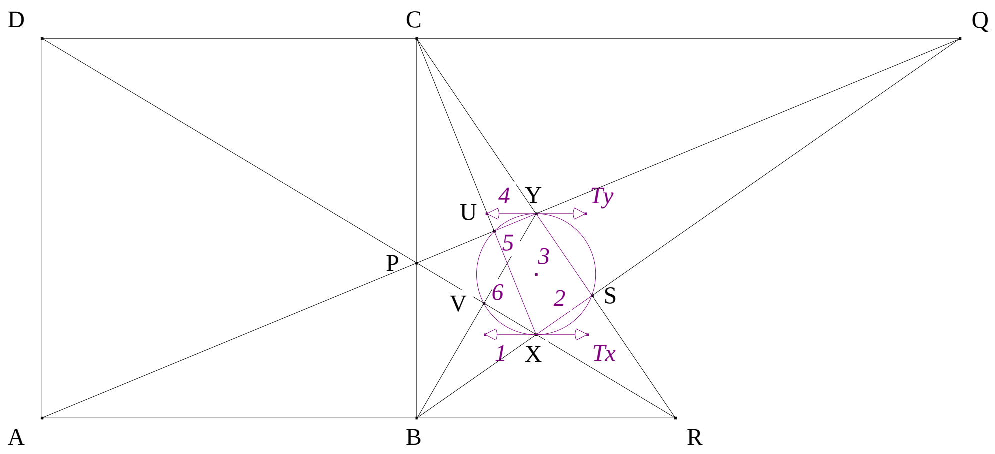
- **Scolies :** **(1)** X, Y et E sont alignés
  (2) (EC) // *Tx*.

- Les cercles *2* et *3*, les points de base Y et U, la monienne (EYX), les parallèles (EC) et *Tx*, conduisent au théorème **1'** de Reim ; en conséquence, C, U et X sont alignés.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que B, V et Y sont alignés.

- **Conclusion partielle :** *2* est le cercle de diamètre [XY].



- Notons *Ty* la tangente à *2* en Y.

- **Scolie :** *Tx*, *Ty* et (CQ) sont parallèles entre elles.

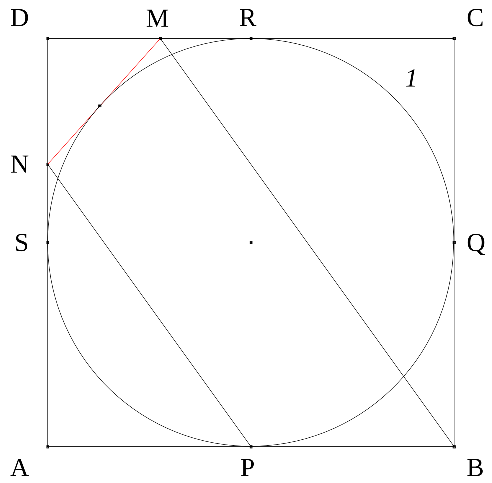
- D'après MacLaurin "Tetragramma mysticum" (Cf. Annexe **5**) appliqué à l'hexagone *Tx* SY *Ty* UX, S est sur *2*.

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (BQ) est perpendiculaire à (CR).

12. Compétition *Kürschak* de Hongrie (1960)

VISION

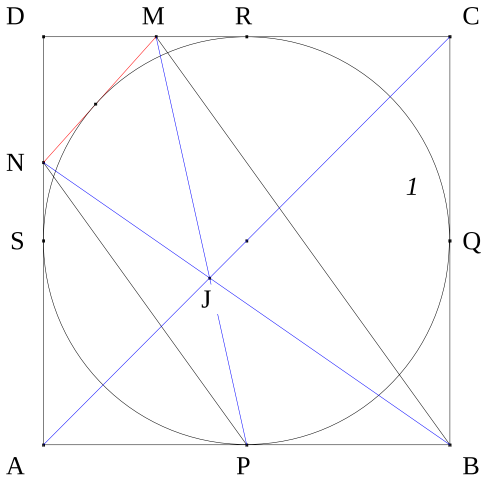
Figure :



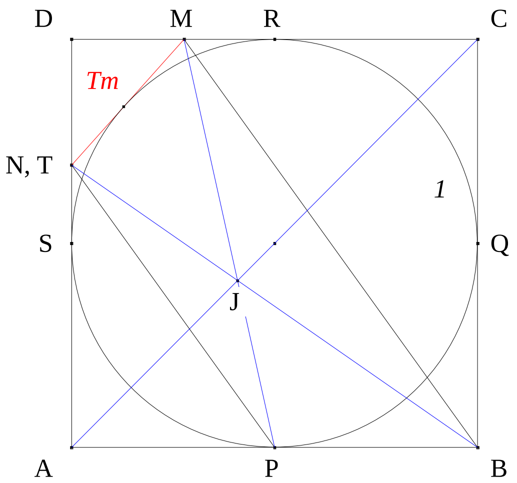
Traits :	ABCD	un carré,
	1	le cercle inscrit de ABCD,
	P, Q, R, S	les milieux de [AB], [BC], [CD], [DA],
	M	un point de]DR[,
et	N	le point d'intersection de la parallèle à (BM) avec [DS].

Donné : (MN) est tangente à *1*.[15]

VISUALISATION

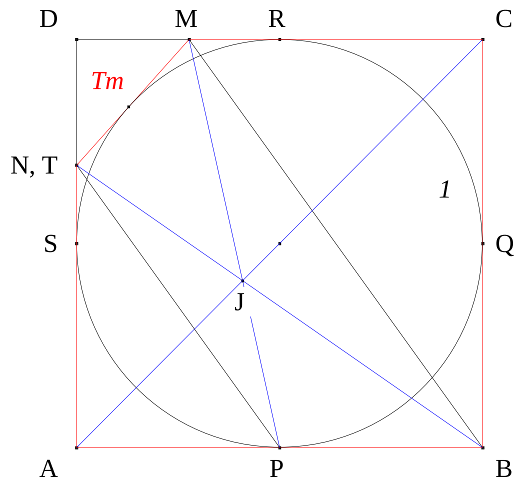


- Le quadrilatère BMNP est un trapèze.
- Notons J le point d'intersection de (PM) et (NB).
- Les triangles APN et CMB étant homothétiques,
  d'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe **6**), (AC), (PM) et (NB) sont concourantes en J.
- **Conclusion partielle :** B, J et N sont alignés.



- Raisonnons par l'absurde en affirmant que (MN) n'est pas tangente à *1*.
- Notons *Tm* la seconde tangente à *1* issue de M
  et T le point d'intersection de *Tm* et (AD).
- **Scolie :** T et N sont distincts.

[15] ABCD is a square and PQ is tangent to its incircle, *Mathlinks* du 21/10/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=373081.

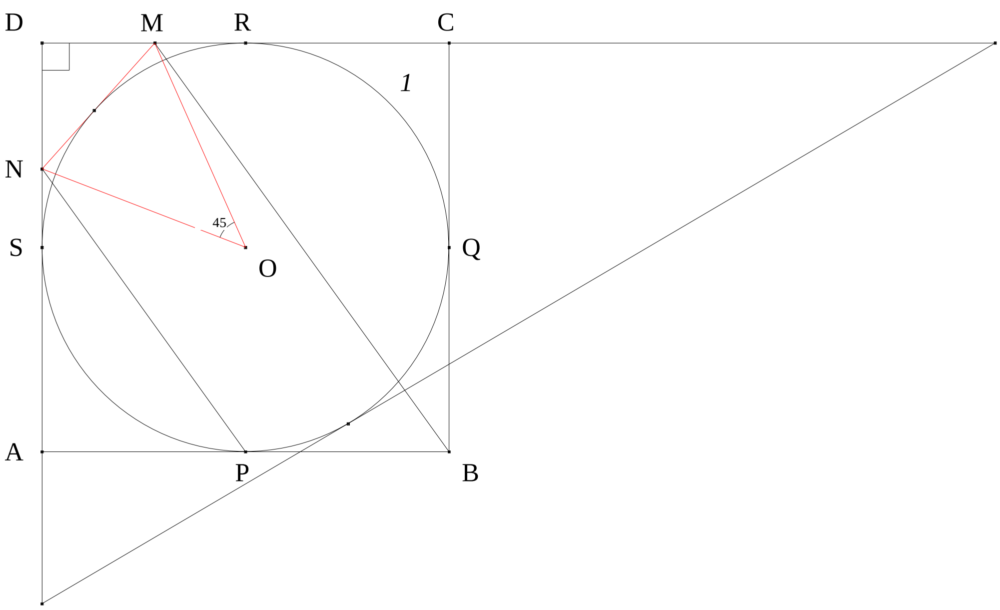


- Le quadrilatère ABCMT étant tangentiel à *1*,
  d'après Carnot "Un pentagone tangentiel" (Cf. Annexe **6**), (AC), (BT) et (PM) sont concourantes en J.

- D'après le postulat d'Euclide, (BJN) et (BJT) sont confondues ;
  en conséquence, T et N sont confondus, ce qui est contradictoire.

- **Conclusion :** (MN) est tangente à *1*.

Scolies : **(1)** angle au centre



- Notons O le centre de *1*.

- **Conclusion :** d'après Poncelet "L'angle au centre" (Cf. Annexe **10**), <MON = 45°.

(2) Une équivalence

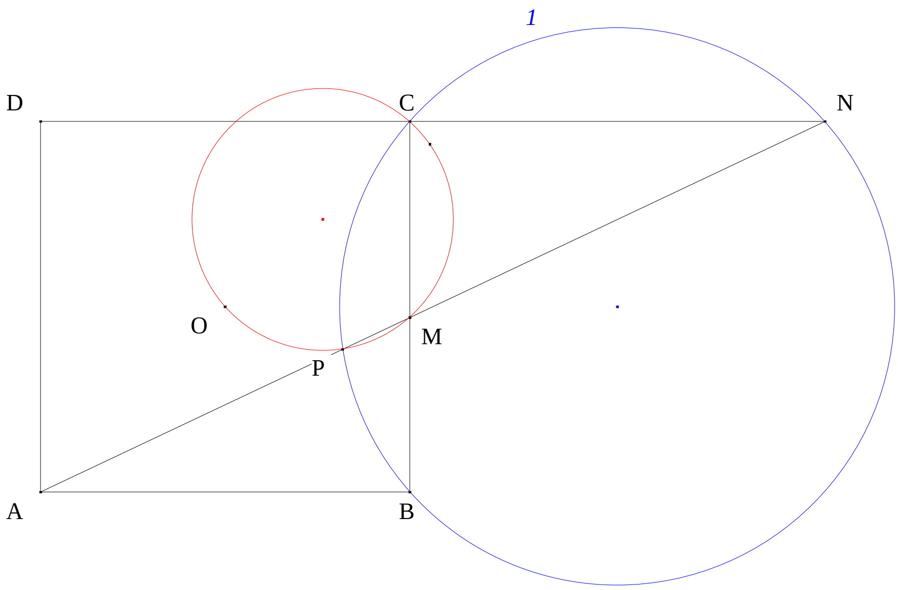
(BM) est parallèle à (PN) *si, et seulement si*, (MN) est tangente à *1*.

La réciproque se prouve par un raisonnement par l'absurde.

13. Une miniature de l'auteur

VISION

Figure :

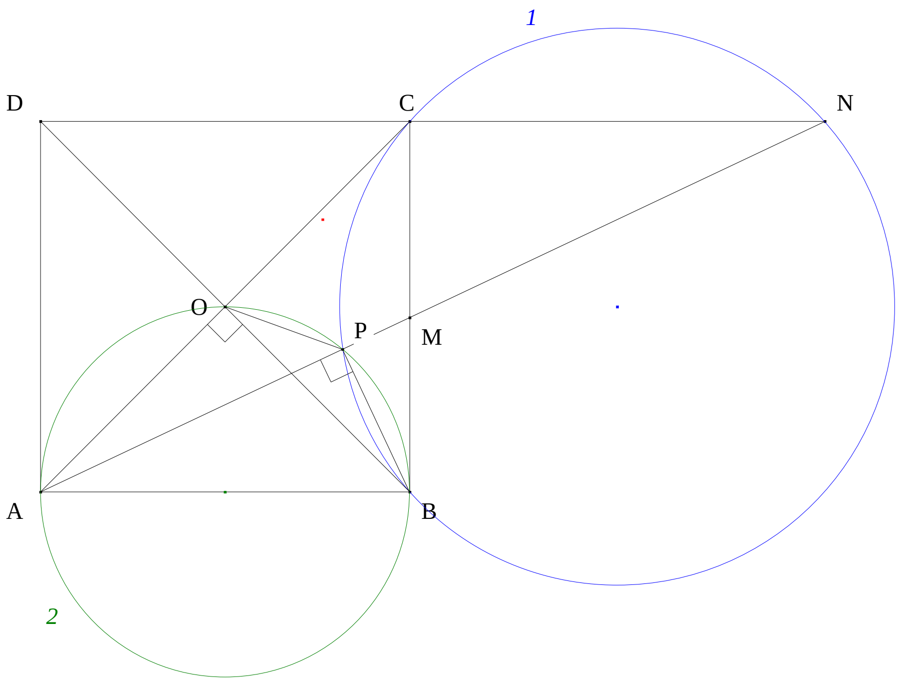


Traits :	ABCD	un carré,
	O	le centre de ABCD,
	M	un point de [BC],
	N	le point d'intersection de (AM) et (CD),
	1	le cercle de diamètre [BN] ; il passe par C ;
et	P	le second point d'intersection de (AN) avec *1*.

Donné : O, C, M et P sont cocycliques.[16]

VISUALISATION

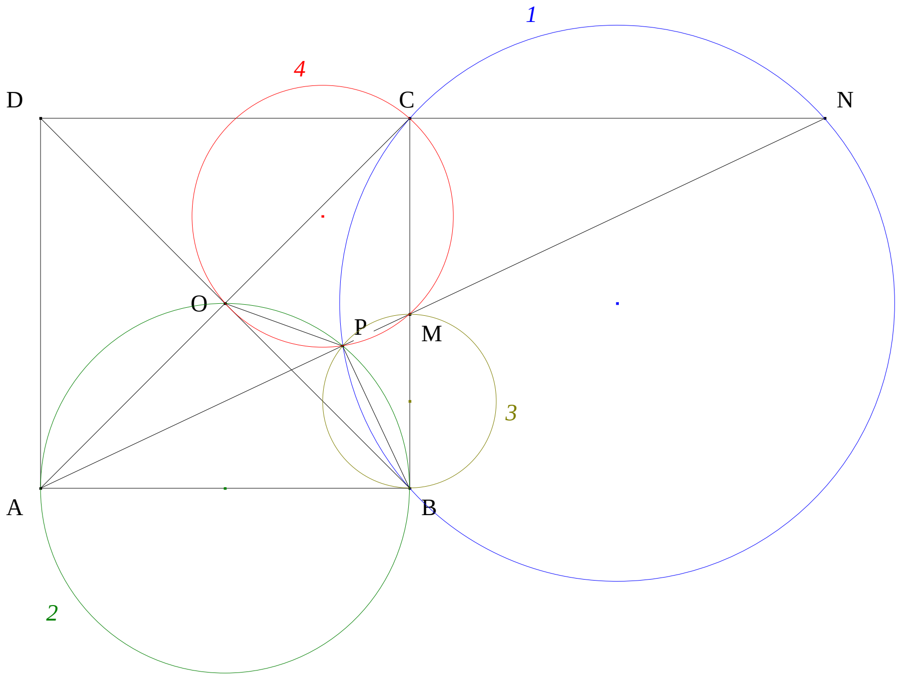
[16] Ayme J.-L., Four concyclic points, *Mathlinks* du 13/11/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=377408.



- **Scolies :** **(1)** (AC) ⊥ (BD)
  (2) (BP) ⊥ (APN).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", A, B, O et P sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle.

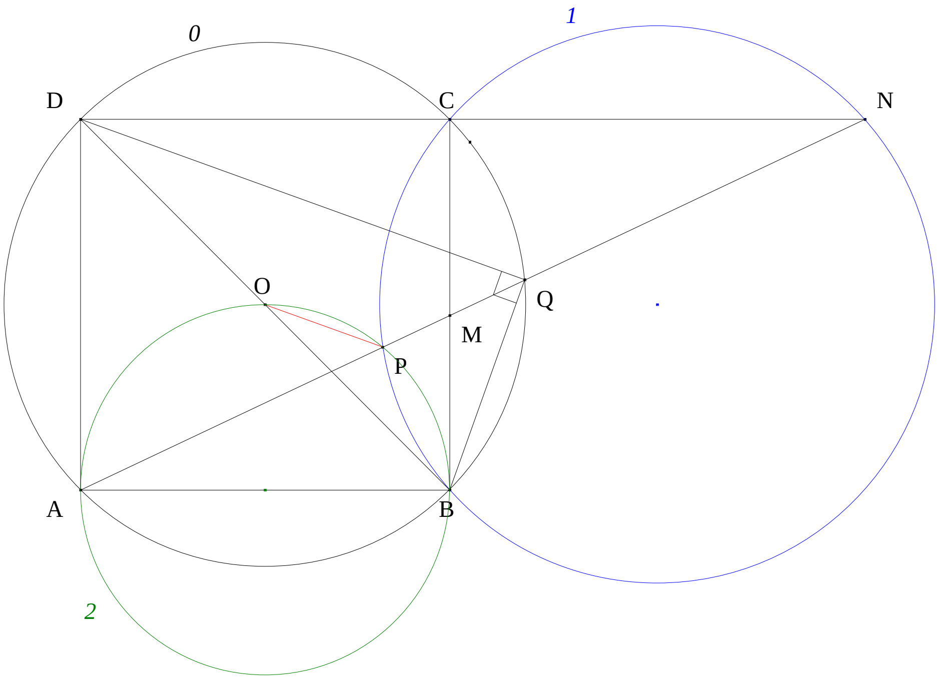


- Notons *3* le cercle de diamètre [BM] ; il passe par P ;
  et *4* le cercle passant par C, O et M.

- D'après "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe **3**)
  appliqué au triangle CAB avec O sur (CA), B sur (AB) et M sur (BC), *4* passe par P.

- **Conclusion :** O, C, M et P sont cocycliques.

Scolie : deux perpendiculaires [17]



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABCD
  et Q le second point d'intersection de (AN) avec *0*.

- Les cercles *2* et *0*, les points de base B et A, les moniennes (OBD) et (PAQ), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (OP) // (DQ) ;
  d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (DQ) ⊥ (BQ) ;

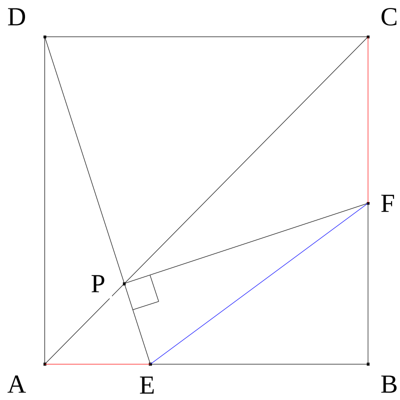
- **Conclusion :** d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (OP) ⊥ (BQ).

14. Une relation

VISION

Figure :

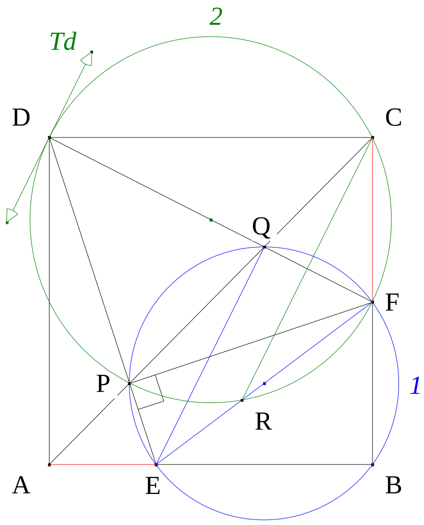
17 Ayme J.-L., Two perpendicular lines, *Mathlinks* du 13/11/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&p=2084327.



Traits :	ABCD	un carré,
	E	un point de]AB[,
	P	le point d'intersection de (DE) et (AC),
	Pp	la perpendiculaire à (DE) en P
et	F	le point d'intersection de *Pp* et (BC),

Donné : EF = EA + FC.[18]

VISUALISATION



- Notons *1* le cercle de diamètre [EF] ; il passe par B et P ;
  Q le second point d'intersection de *1* avec (AC),
  2 le cercle de diamètre [DF] ; il passe par C et P ;
  et *Td* la tangente à *2* en D.

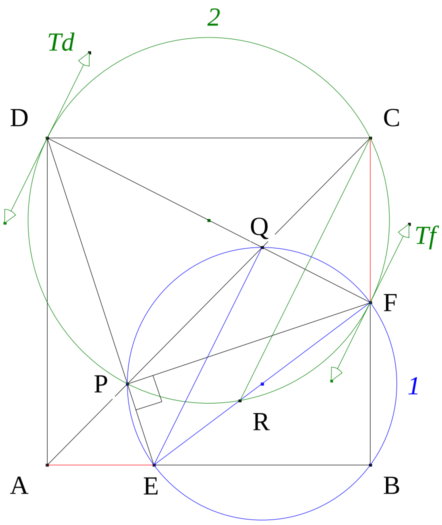
- Les cercles *2* et *1*, les points de base P et F, les moniennes (DPE) et (DFQ), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que *Td* // (EQ).

- Les cercles *1* et *2*, les points de base F et P, les moniennes (EFR) et (QPC), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (EQ) // (RC) ;
  par transitivité de la relation //, *Td* // (RC).

- **Conclusion partielle :** (FD) et la F-bissectrice intérieure du triangle FCR.

---

18 A problem, *Mathlinks* du 05/10/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=327164.
Square and sum of lines, *Mathlinks* du 01/03/2008 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=191669.



- Notons *Tf* la tangente à *2* en F.

- [DF] étant un diamètre de *2*, *Tf* // (RC) ;
  en conséquence, FRC est F-isocèle.

- **Conclusion partielle :** FR = FC.

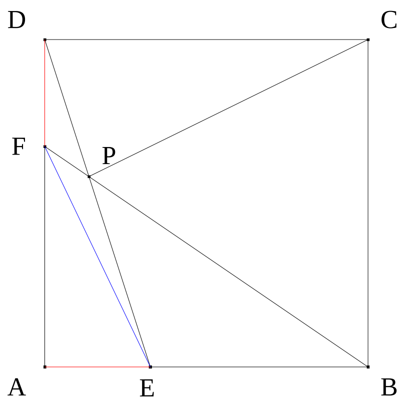
- Mutatis mutandis, nous montrerions que ER = EA.

- **Conclusion :** par addition membre à membre, EF = EA + FC.

15. Un problème des Olympiades Mathématique de Biélorussie

VISION

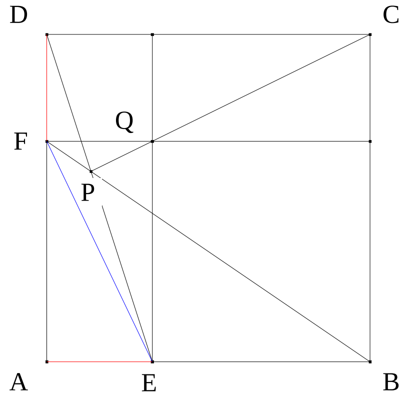
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	E	un point de]AB[,
	F	un point de]AD[tel que DF = AE
et	P	le point d'intersection de (DE) et (BF).

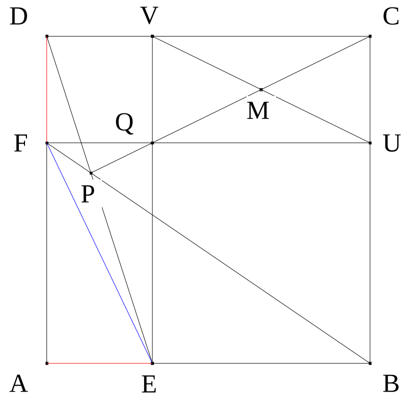
Donné : AE = DF *si, et seulement si,* (CP) est perpendiculaire à (EF).[19]

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons Q le point d'intersection de la parallèle à (AD) passant par E
  et de la parallèle à (AB) passant par F.

- D'après "Une rêverie de Pappus"[20], P, Q et C sont alignés.

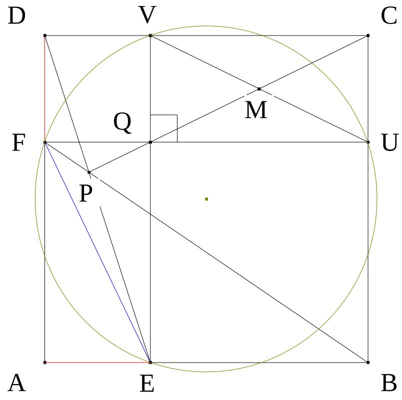


- Notons U, V les points d'intersection resp. de (QF) et (BC), de (QE) et (CD)
  et M le point d'intersection de (QC) et (UV).

- **Scolie :** M est le milieu de [UV].

19 A problem from Belarussian olympiad, *Mathlinks* du 26/12/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=320885.

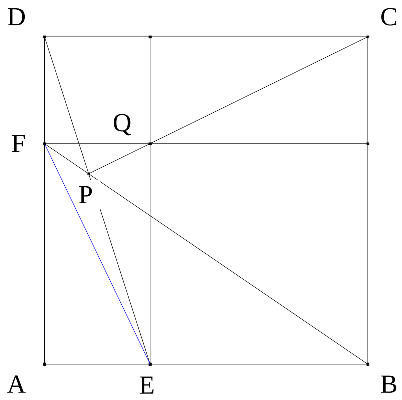
20 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 21 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



- **Scolie :** E, F, U et V sont cocycliques.

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Brahmagupta"[21], (CP) est perpendiculaire à (EF).

VISUALISATION SUFFISANTE

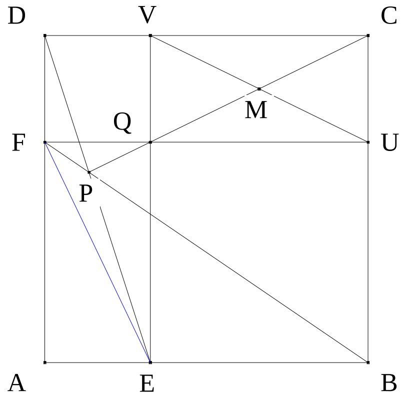


- Notons Q le point d'intersection de la parallèle à (AD) passant par E
  et de la parallèle à (AB) passant par F.

- D'après "Une rêverie de Pappus"[22], P, Q et C sont alignés.

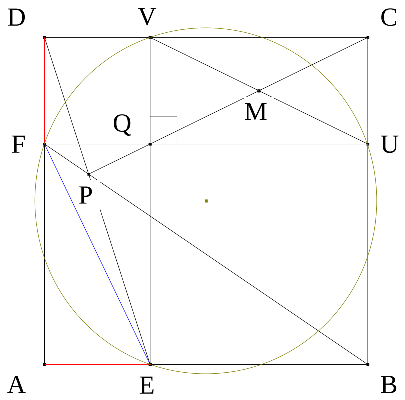
[21] Ayme J.-L., Le théorème de Brahmagupta, G.G.G. vol. **7** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

[22] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 21 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



- Notons U, V les points d'intersection resp. de (QF) et (BC), de (QE) et (CD)
  et M le point d'intersection de (QC) et (UV).

- **Scolie :** M est le milieu de [UV].



- Par une réciproque du "Théorème de Brahmagupta"[23], E, F, U et V sont cocycliques.

- **Scolies :** **(1)** le quadrilatère cyclique EFVU ayant ses diagonales égales, est un trapèze isocèle
  (2) par symétrie axiale, QF = QV.

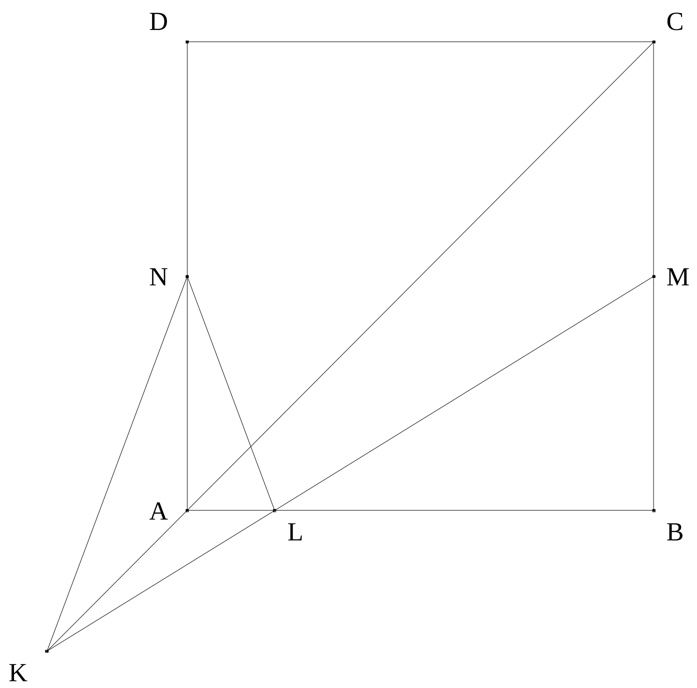
- **Conclusion :** par symétrie axiale, AE = DF.

16. Spring 2005 Tournament of Towns Junior and Senior O-level test #4

VISION

Figure :

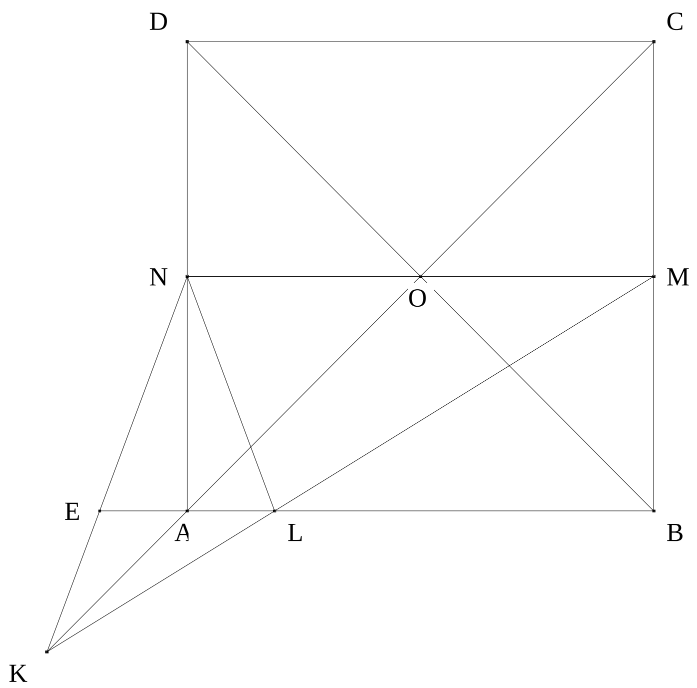
[23] Ayme J.-L., Le théorème de Brahmagupta, G.G.G. vol. **7** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



Traits :	ABCD	un carré,
	M, N	les milieux resp. de [BC], [DA],
	K	un point de (AC) comme indiqué sur la figure
et	L	le point d'intersection de (KM) et (AB).

Donné : (NA) est la N-bissectrice intérieure du triangle NKL.[24]

VISUALISATION



[24] O-level geometry question, *Mathlinks* du 10/04/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=33120
Equal Angles, AoPS du 20/03/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1064948_equal_angles

- Notons O le centre de ABCD
  et E le point d'intersection de (AB) et (KN).

- **Scolie :** **(1)** le quadrilatère ELMN est un trapèze
  (2) O est le milieu de [MN].

- D'après "Le trapèze complet" appliqué à ELMN, A est le milieu de [EL].

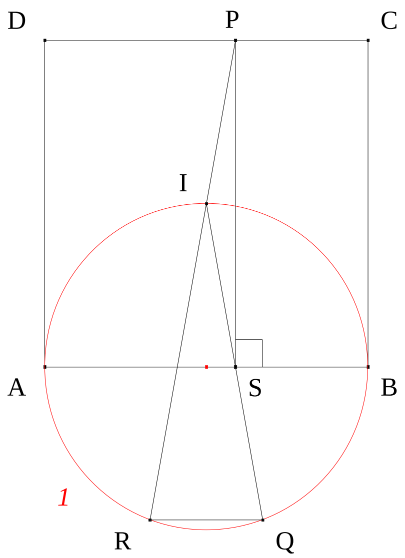
- (NA) étant la N-médiane et hauteur du triangle NEL, NEL est N-isocèle ;
  en conséquence, (NA) est la N-bissectrice intérieure de NEL.

- **Conclusion :** (NA) est la N-bissectrice intérieure du triangle NKL.

17. Un remarque de Darij Grinberg

VISION

Figure :

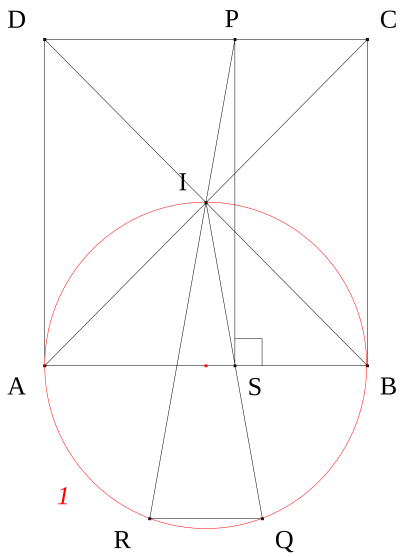


Traits : ABCD un triangle carré,
I le centre de ABCD,
P un point de]CD[,
S le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur (AB)
1 le cercle de diamètre [AB] ; il passe par I ;
et Q, R les seconds points d'intersection resp. de (PI), (IS) avec *1*.

Donné : (QR) est parallèle à (AB).[25]

VISUALISATION

[25] Point on a circle, *Mathlinks* du 30/04/2005 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=35359.



- **Scolie :** <SIB = <CIP ou encore <QIB = <AIR.

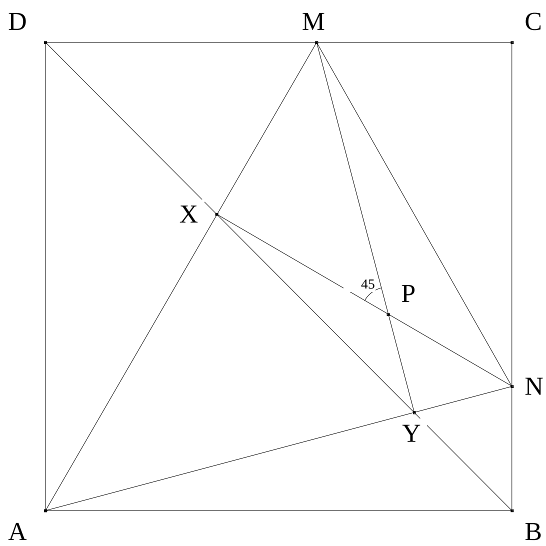
- **Conclusion :** (IQ) et (IR) étant deux I-isogonales du triangle IAB, (QR) est parallèle à (AB).

Commentaire : ce résultat permet une nouvelle approche de **B. 5.** Intersection sur un cercle.

18. Square 45°

VISION

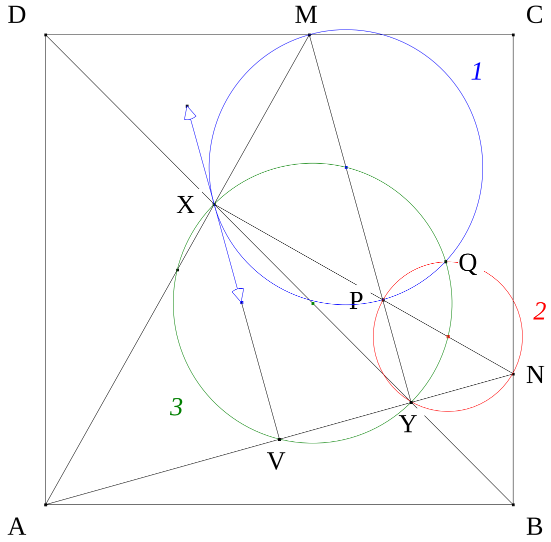
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	M, N	deux points resp. de]CD[,]BC[
	X, Y	les points d'intersection de (BD) resp. avec (AM), (AN)
et	P	le point d'intersection de (MY) et (NX).

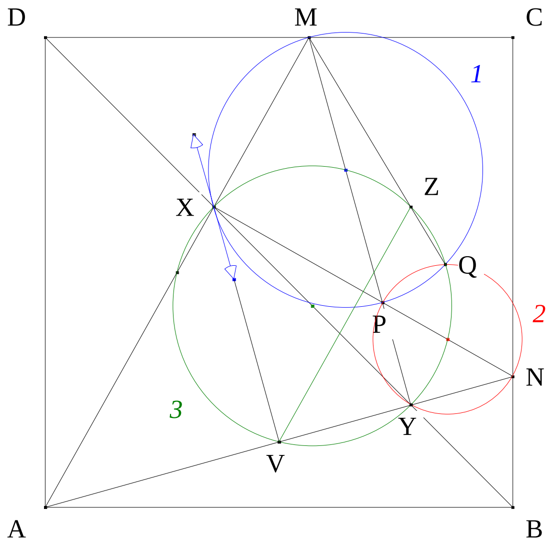
Donné : *si*, <MPX = 45° *alors* <MAN = 45°.[26]

VISUALISATION



- Notons *1*, *2* les cercles circonscrits resp. aux triangles MPX, NPY,
  Q le second point d'intersection de *1* et *2*,
  3 le cercle circonscrit au triangle QSY
  et V le second point d'intersection de *3* avec (AN).

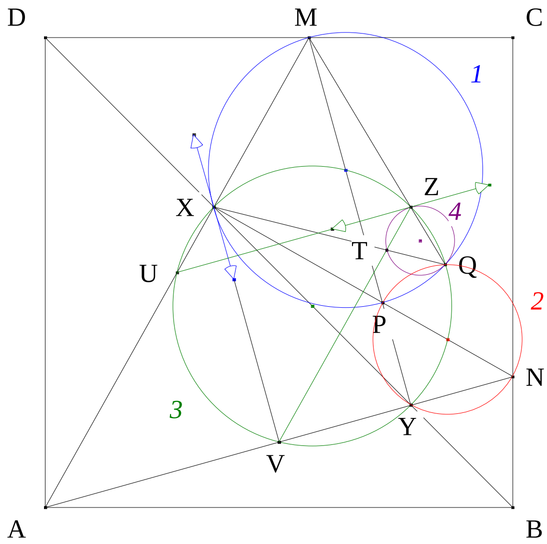
- D'après "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe **3**)
  appliqué au triangle VNX avec Y sur (VN), P sur (NX), X sur XV et avec *1*, *2* et *3* sécants en Q,
  (VX) est tangente à *1* en X.



- Notons Z le second point d'intersection de (QM) avec *1*.

- Les cercles *1* et *3*, les points de base Q et X, les moniennes (MQZ) et (XXV),
  conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (MX) // (ZV).

[26] Square 45°, *Mathlinks* du 03/10/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=169010.



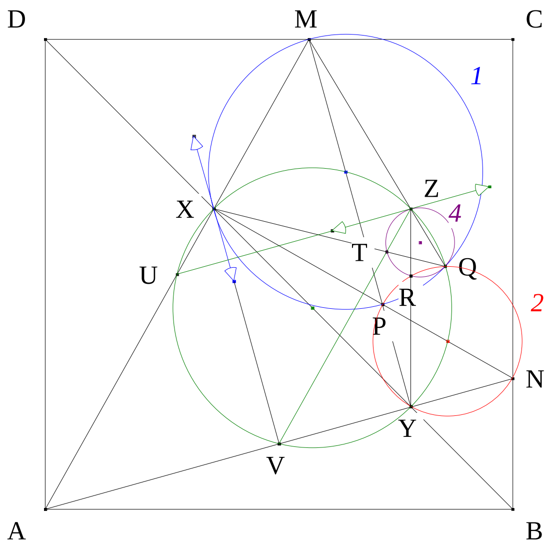
- Notons U le second point d'intersection de (XM) avec *3*,
  T le point d'intersection de (ZV) et (QX),
  et *4* le cercle passant par Q, Z, T.

- Le cercle *1*, le point de base Q, les moniennes naissantes (MQZ) et (XQT), les parallèles (MX) et (ZT), conduisent au théorème de Reim ; en conséquence, *4* est tangente à *1* en Q.

- D'après "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe **3**)
  appliqué au triangle ZMU avec Q sur (ZM), X sur (MU) et avec *4*, *1* et *3* sécant en Q,
  (UZ) est tangente à *4* en Z.

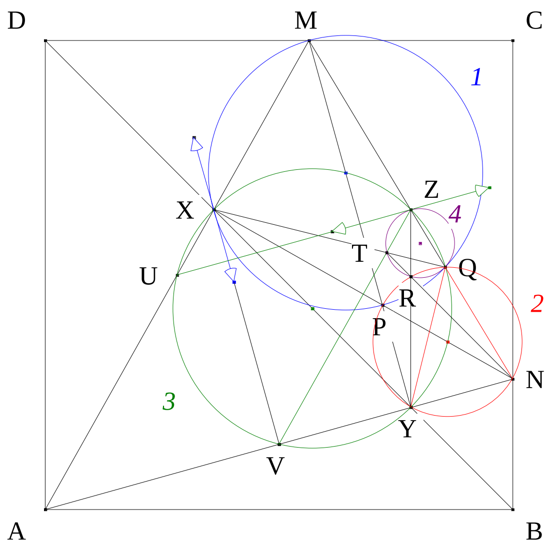
- **Scolies :** <MPX = <MQX = <ZQT = 45°

- **Conclusion partielle :** d'après "Le théorème de la tangente", <UZV = 45°.



- Notons R le second point d'intersection de *2* et *4*.

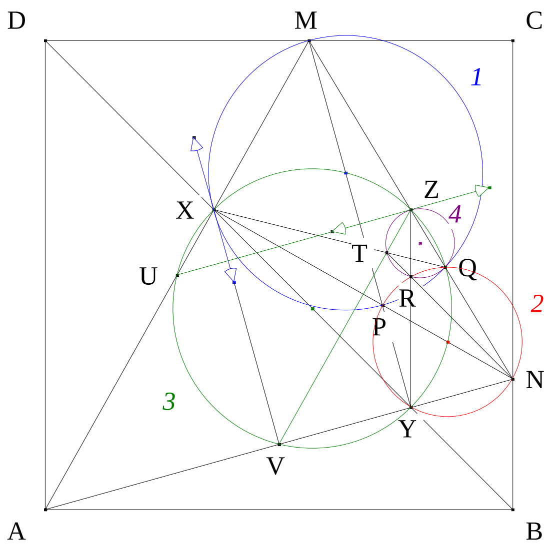
- D'après "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe **3**)
  appliqué au triangle ZMY avec Q sur (MZ), P sur (MY) et avec *4*, *1*, *2* sécant en Q,
  Y, R et Z sont alignés.



- D'après "Le théorème du pivot" (Cf. Annexe **3**) appliqué au triangle TVN avec Z sur (TV), Y sur (VN) et avec *4*, *3*, *2* sécant en Q, N, R et T sont alignés.

- **Scolies :** **(1)** <MPX = <MQX = <ZQT = 45°
  (2) <MPX = <YPN = <YQN = 45°.

- D'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe **2**) appliqué à *2* et *4*, **(1)** <ZQY = <TQN = <NRZ = 135°
  (2) Z, Q et N sont aligné.



- Les cercles *3* et *2*, les points de base Q et Y, les moniennes (ZQN) et (UYY), conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (ZU) // (NY).

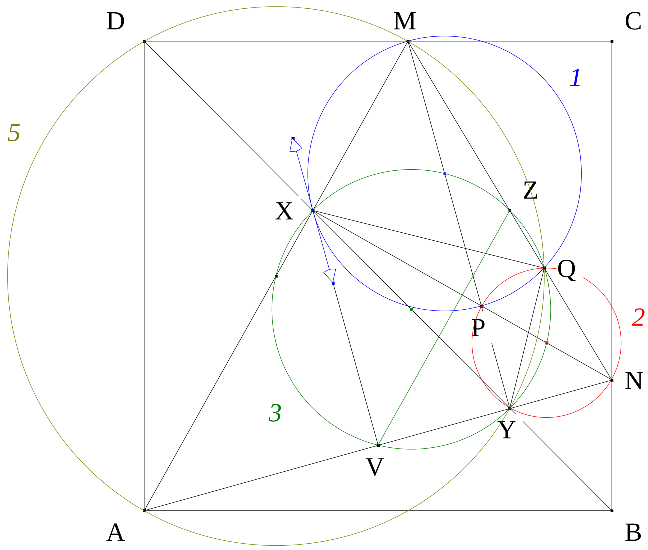
- Le quadrilatère AVZU étant un parallélogramme, <VAU = <UZV = 45°

- **Conclusion :** *si*, <MPX = 45° *alors* <MAN = 45°.

Commentaire : ce résultat a été difficile à prouver synthétique par une voie directe. La difficulté pour l'auteur a été de trouver le cercle *4*, la clef de la preuve.

Une preuve indirecte a été établie par Kostas Vittas.

Scolie : cinq points cocycliques [27]



- Le cercle *3*, les points de base Q et Y, les moniennes naissantes (ZQM) et (VYA), les parallèles (ZV) et (MA), conduisent au théorème **0"** de Reim ;
  en conséquence, Q, Y, M et A sont cocycliques.

- Notons *5* ce cercle.

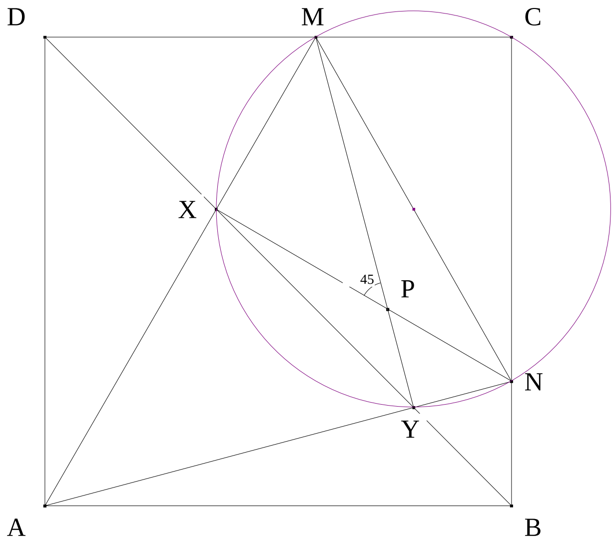
- D'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe **2**)
  appliqué à *1* et *2*, <MQY = <XQN = 135°.

- Le quadrilatère YQMD ayant deux angles opposés supplémentaires, est cyclique ;
  en conséquence, *5* passe par D.

- **Conclusion :** A, Y, Q, M et D sont cocycliques.

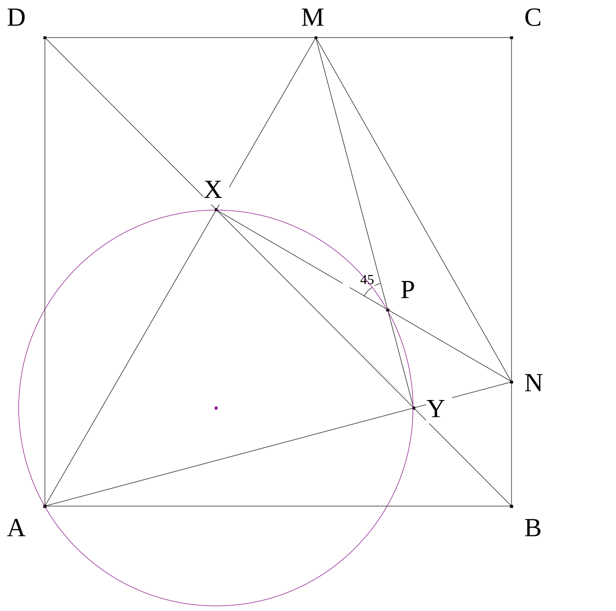
Application 1 :

27 Ayme J.-L., Five concyclic points, *Mathlinks* du 17/11/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=378150.



Montrer que M, N, X, Y et C sont cocycliques.[28]

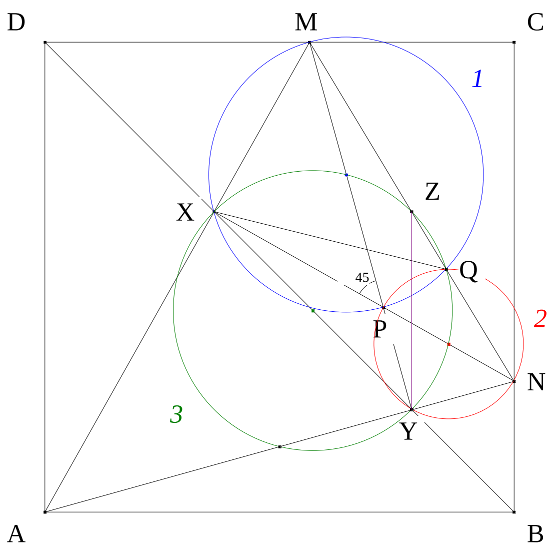
Application 2 :



Montrer que A, X, Y et P sont cocycliques.

Application 3 :

[28] 45 in a square, *Mathlinks* du 24/10/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=440751

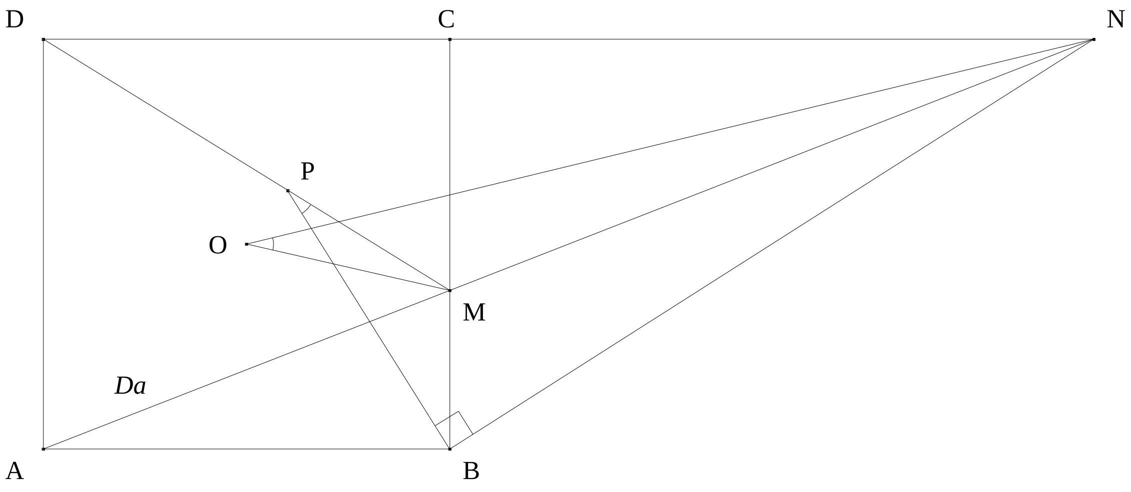


Montrer que (YZ) est parallèle à (BC).

19. Un autre problème de l'auteur

VISION

Figure :

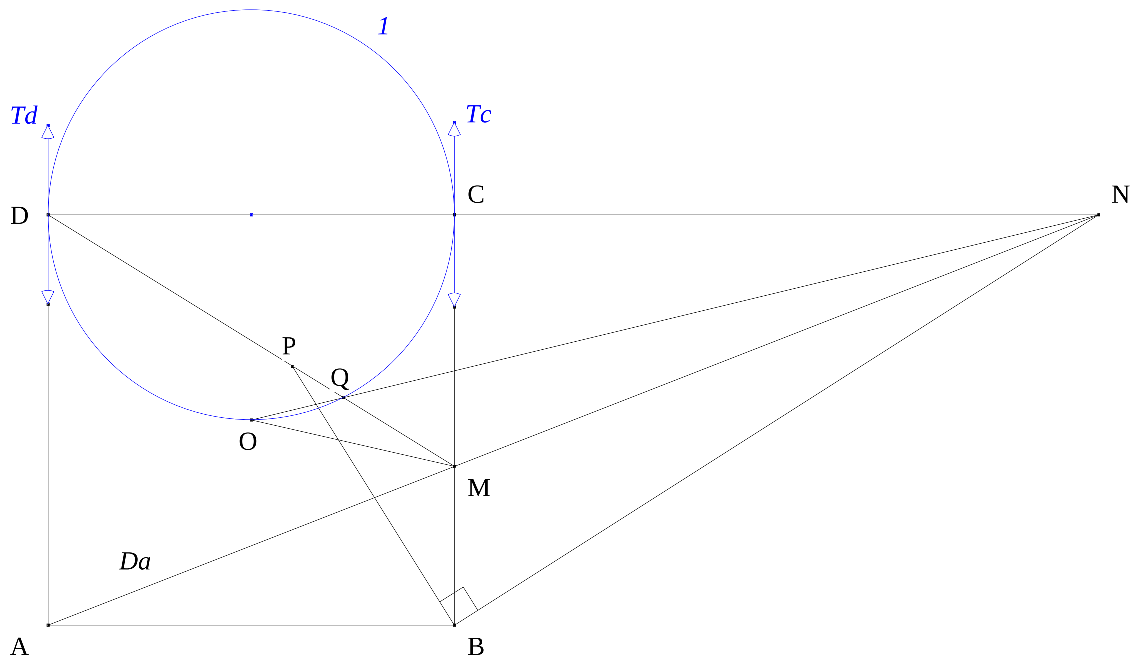


Traits :	ABCD	un carré,
	O	le centre de ABCD,
	Da	une droite passant par A,
	M, N	les points d'intersection milieux de *Da* resp. [BC],]CD[
et	P	le point d'intersection de la perpendiculaire à (BN) en B avec (DM).

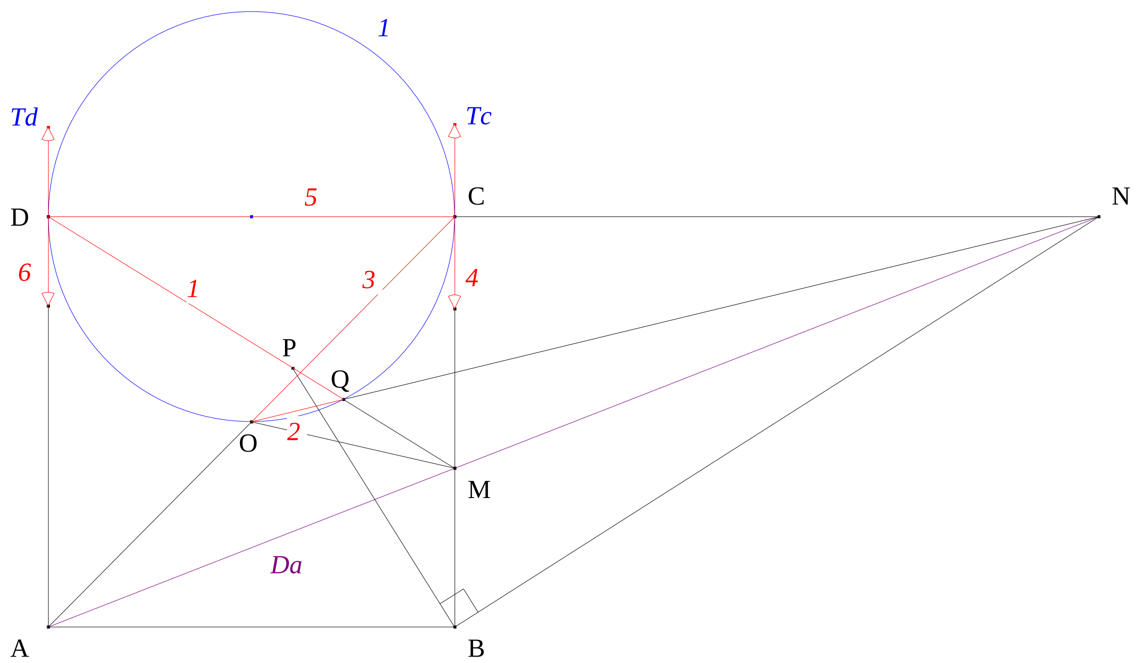
Donné : <MON = <BPM.[29]

VISUALISATION

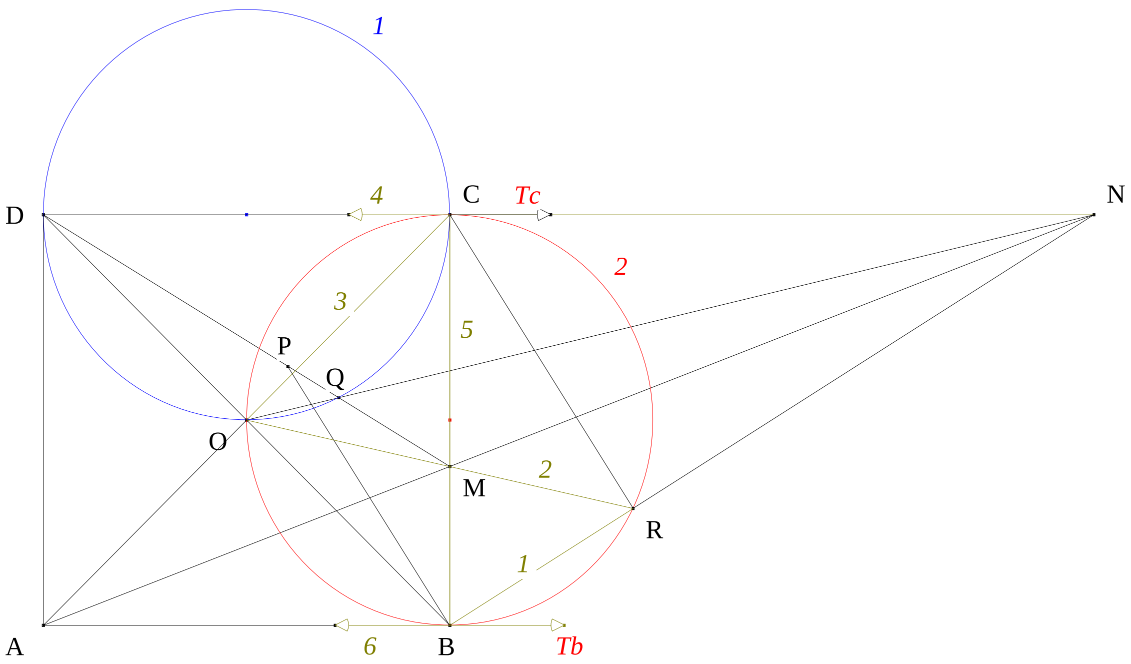
[29] Ayme J.-L., Two equal angles, *Mathlinks* du 18/11/2009 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=378323.



- Notons 1 le cercle de diamètre [CD] ; il passe par O ;
  Tc, *Td* les tangentes à *1* resp. en C, D,
  et Q le point d'intersection de (PM) et (ON).



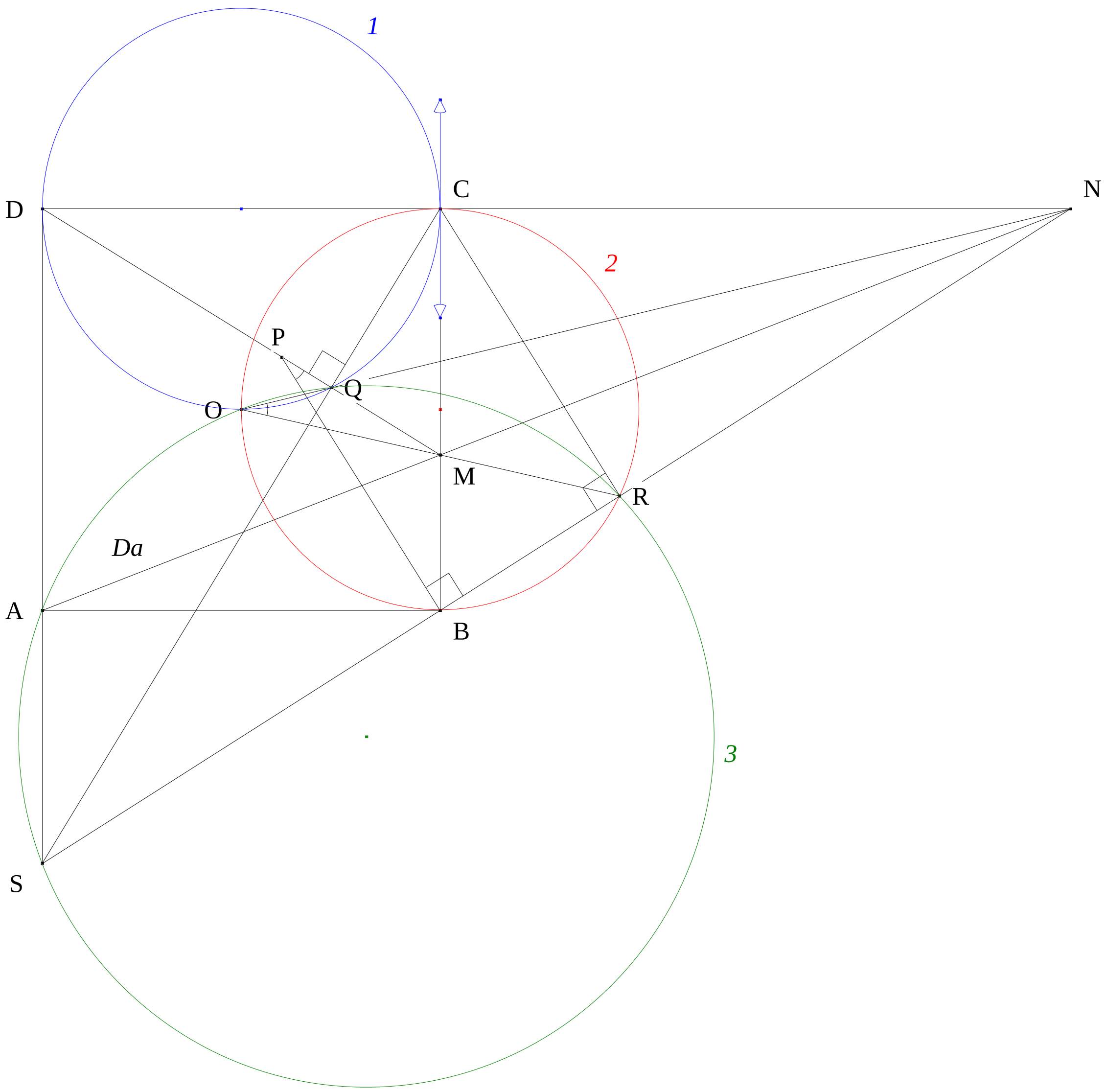
- D'après MacLaurin "Tetragramma mysticum" (Cf. Annexe **5**),
  (MNA) étant la pascale de l'hexagone dégénéré DQOC *Tc* D *Td*, Q est sur *1*.



- Notons $\quad$ *2* $\quad$ le cercle de diamètre [BC] ; il passe par O ;
  R $\quad$ le point d'intersection de (BN) et (OM),
  et $\quad$ *Tb*, *Tc* $\quad$ les tangentes à *2* resp. en B, C.

- D'après MacLaurin "Tetragramma mysticum" (Cf. Annexe **5**),
  (NMA) étant la pascale de l'hexagone BROC *Tc* B *Tb*, $\quad$ R est sur *2*.

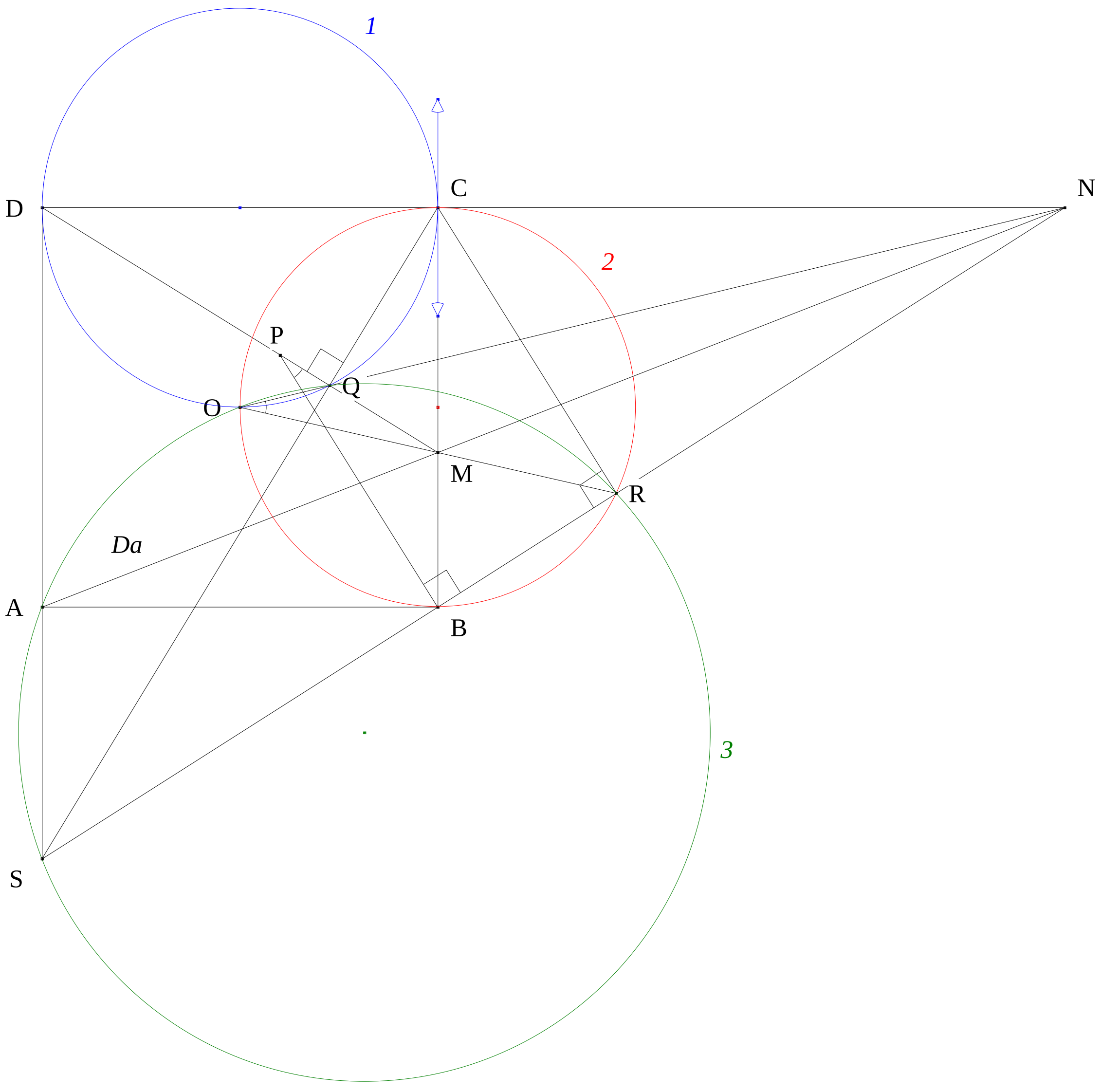
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", $\quad$ (BR) ⊥ (CR).



- Notons S le point d'intersection de (QC) et (BR).

- D'après "Une monienne brisée" (Cf. Annexe **8**) appliqué à *1* et *2*, à la monienne brisée QOR et à la monienne (BCC), Q, O, R et S sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle.



- Une chasse angulaire à π près :
  Nous avons : <MON = <ROQ ;
  d'après "Le théorème de l'angle inscrit", <ROQ = <RSQ ;
  d'après "Le théorème angles à côtés perpendiculaires", <RSQ = <BPQ
  ou encore <BPQ = <BPM.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, <MON = <BPM.

Note historique : la solution précédente s'inspire largement sur celle de *Lym*.
Une autre preuve intéressante a été présentée par *skytin*.

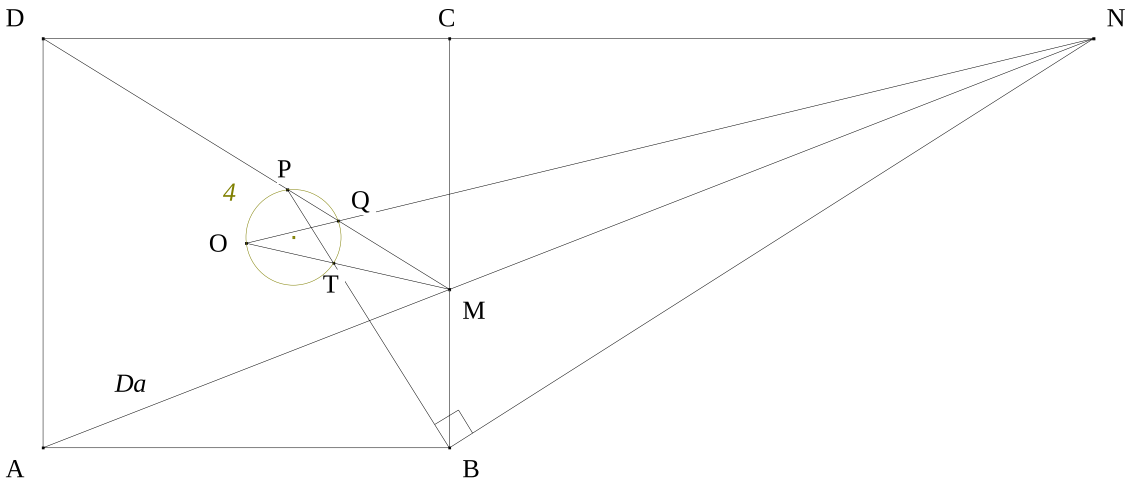
Scolies : **(1)** Compétition *Kürschak* de Hongrie (1960)

- Une chasse angulaire à π près : <MON = <NSC ;
  <NSC = <DCS - <CNS ;
  d'après "Le théorème angles à côtés perpendiculaires", <DCS = <CMD ;

- **Conclusion :** par substitution, <MON = <CMD - <CNB.[30]

(2) <DQO = 45°.

(3) Quatre points cocycliques



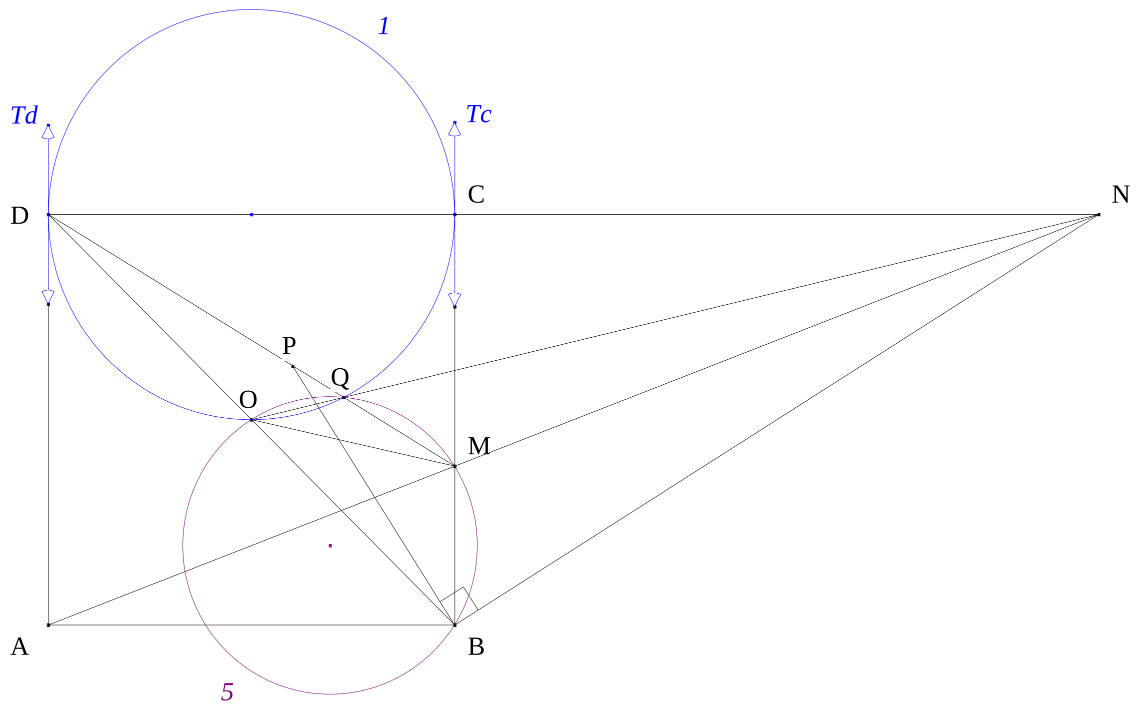
- Notons T le point d'intersection de (OM) et (BP).
- **Conclusion :** O, P, T et Q sont cocycliques.
- Notons *4* ce cercle.

(4) <BTM = 45°.[31]

(5) Quatre autres points cocycliques

[30] A secant to a square through one vertex, *Mathlinks* du 05/10/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=229680.

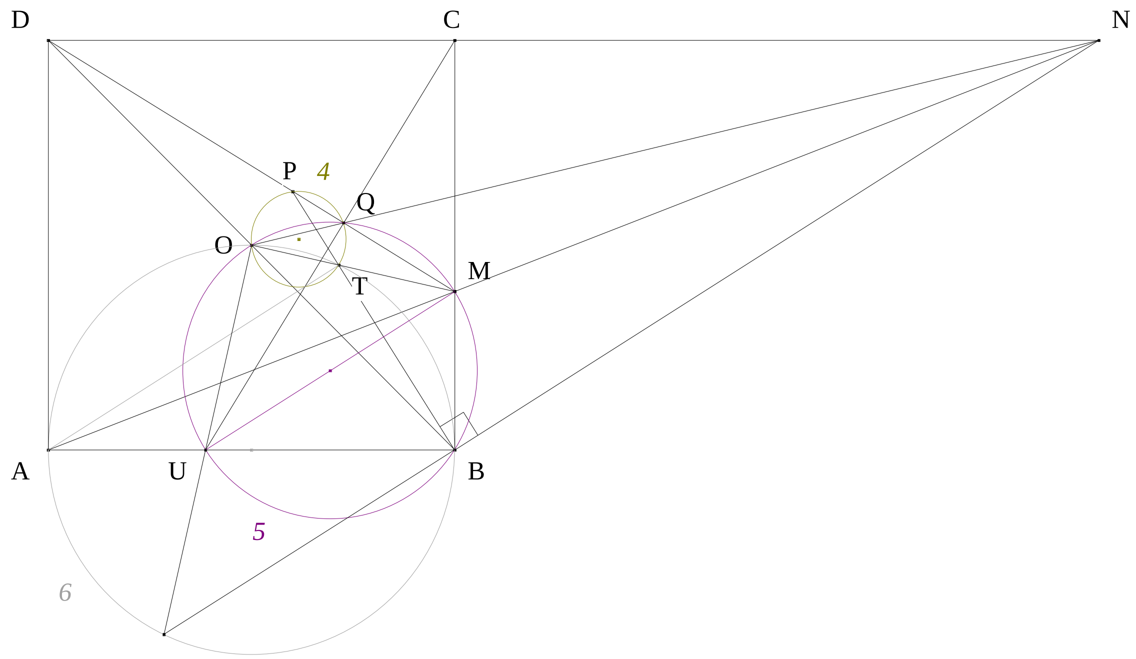
[31] Ayme J.-L., A remarkable angle in a square, *Mathlinks* du 22/11/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=379054.



- **Conclusion :** le cercle *1*, les points de base O et Q, les moniennes naissantes DOB) et (DQM), les parallèles (*Td* et (BM), conduisent au théorème **1"** de Reim ; en conséquence, O, Q, B et M sont cocycliques.

- Notons *5* ce cercle.

(6) Position de T



- Notons *6* le cercle de diamètre [AB] ; il passe par O ;
  et U le second point d'intersection de (AB) avec *5*.

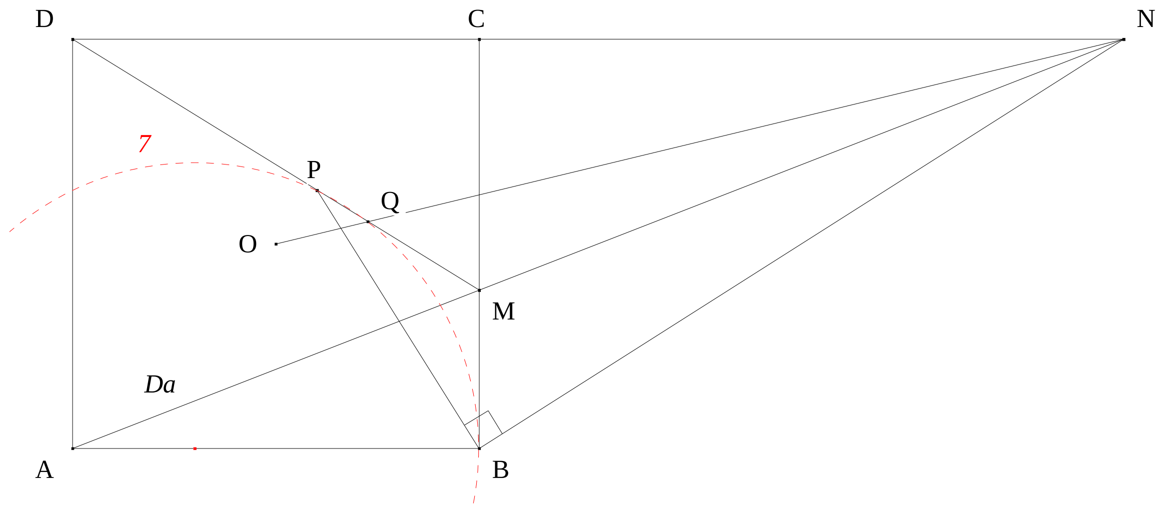
- **Conclusion :** T est sur *6*.

(7) (AT), (UM) et (BN) sont parallèles entre elles.[32]

(8) U, Q et C sont alignés.

(9) (OU) et (BN) se coupent sur *6*.

(10) Un cercle tangent



- Notons *7* le cercle passant par P, Q et B.

- **Conclusion :** *7* est tangent à (BC) en B.[33]

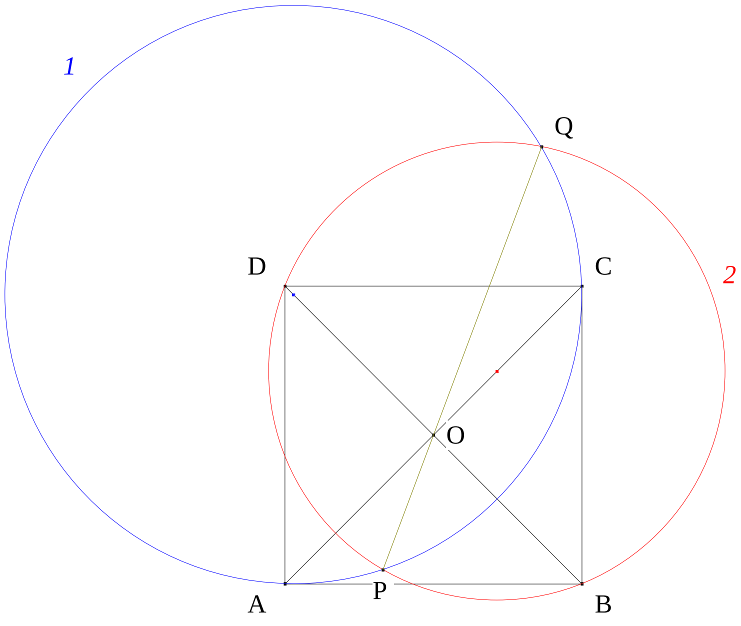
20. ***Baltic Way* (2010) Problème 11**

VISION

Figure :

[32] Ayme J.-L., Two parallels, *Mathlinks* du 22/11/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=378968.

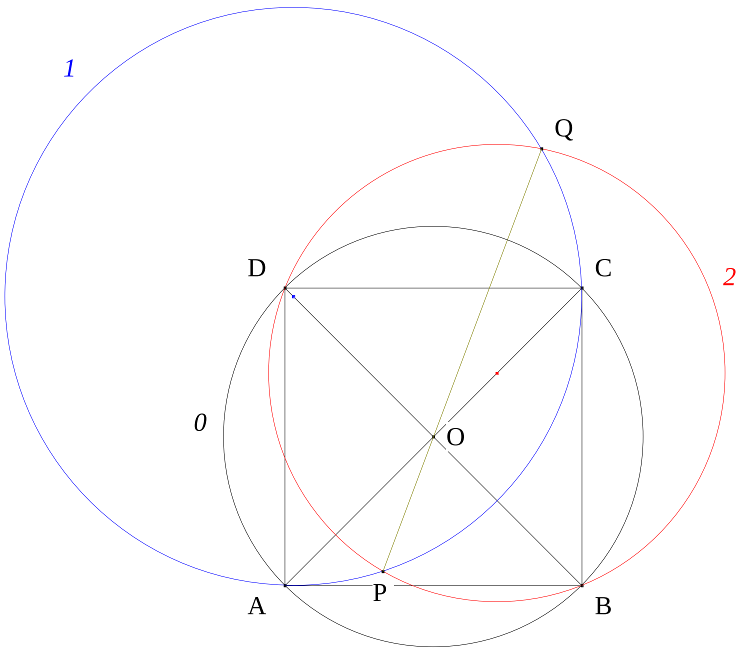
[33] Ayme J.-L., A circle tangent to a side of a square, *Mathlinks* du 22/11/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=378966.



Traits :	ABCD	un carré,
	O	le centre de ABCD,
	1, *2*	deux cercles passant resp. par A et C, par B et D,
et	P, Q	les points d'intersection de *1* et *2*.

Donné : P, Q et O sont alignés. [34]

VISUALISATION



[34] Baltic Way (06/11/2010) Reykjavik Problem **11** ;
Centre of square is collinear with intersections of k and k', *Mathlinks* du 19/11/2010 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=378559

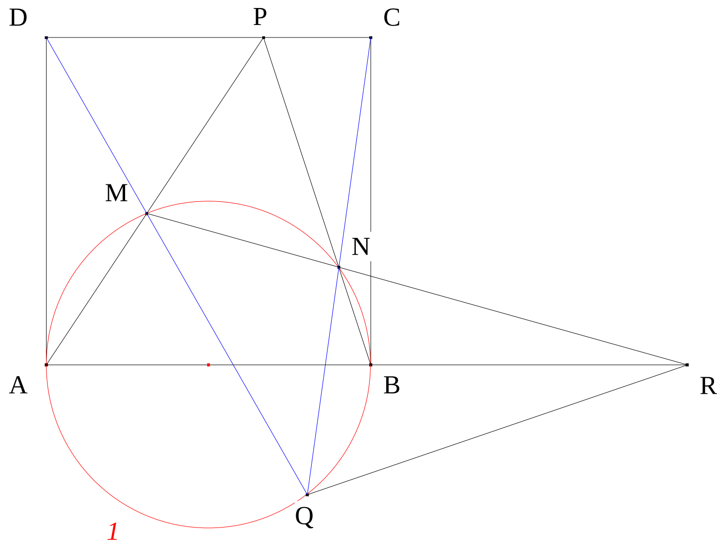
- Notons *0* le cercle circonscrit à ABCD.

- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes"[35] appliqué à *0*, *1* et *2*, P, Q et O sont alignés.

21. Square 45° again

VISION

Figure :



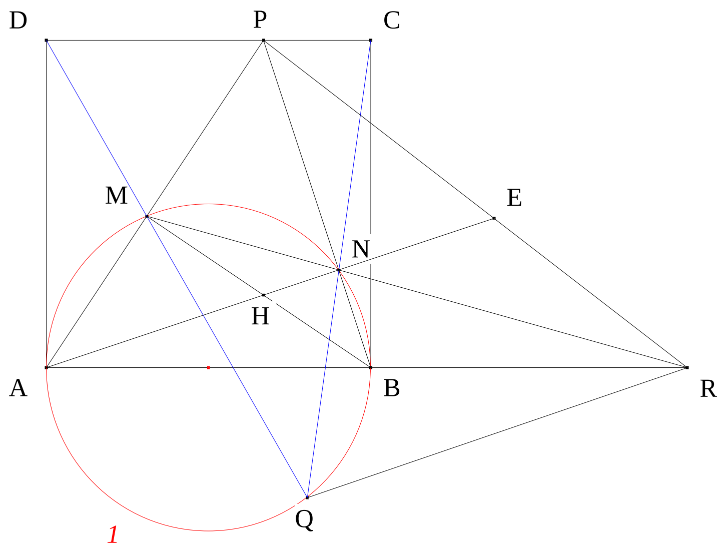
Traits : ABCD un triangle carré,
P un point de]CD[tel que PB < PA,
1 le cercle de diamètre [AB],
M, N les seconds points d'intersection resp. de (PA), (PB) avec *1*,
Q le point d'intersection de (CN) et (DM),
et R le point d'intersection de (MN) et (AB).

Donné : <RQC = 45°.[36]

VISUALISATION

35 Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

36 Geometry Problem (22), *Mathlinks* du 19/08/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=362839.

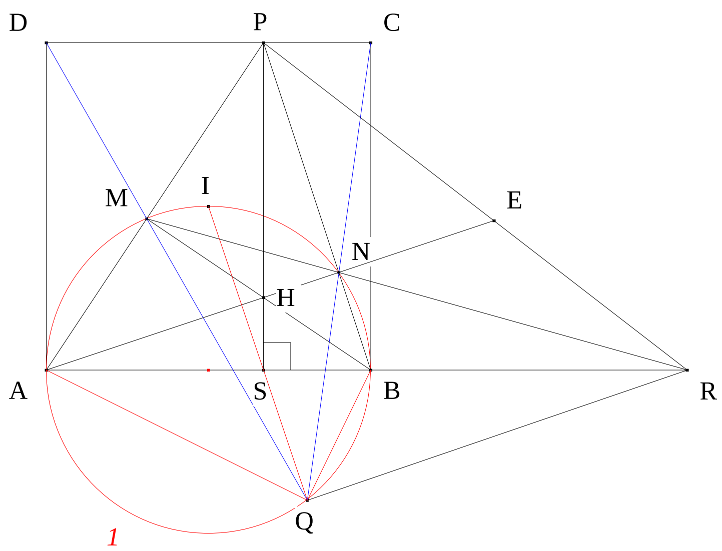


- D'après **B. 5.** Intersection sur un cercle, Q est sur *1*.

- Notons H, E les points d'intersection de (AN) resp. avec (BN), (PR).

- **Scolie :** H est l'orthocentre du triangle PAB.

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère complet", le quaterne (A, N, H, E) est harmonique.



- Notons I le centre de ABCD
  et S le point d'intersection de (AH) et (AB).

- **Scolies :** **(1)** I est sur *1*
  (2) (QI) est la Q-bissectrice intérieure du triangle QAB.

- D'après **B. 5.** Un remarque de Darij Grinberg, I, S et Q sont alignés.

- Par définition, le faisceau (P ; A, N, H, E) est harmonique ;
  en conséquences, le quaterne (A, B, S, R) est harmonique.

- Par changement d'origine en Q, le faisceau (Q ; A, B, S, R) est harmonique.

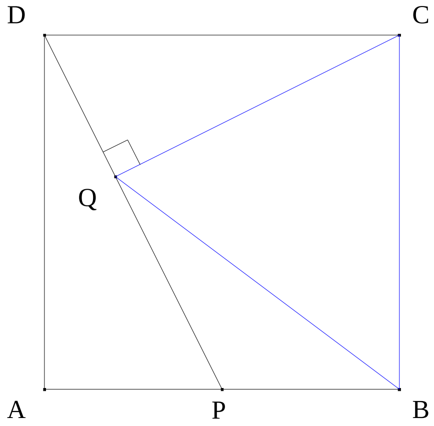
- Le rayon (QSI) étant la bissectrice intérieure de l'angle déterminé par (QA) et (QB), le rayon conjugué (QR) en est la bissectrice extérieure.

- **Conclusion :** <RQC = 45°.

22. Un triangle isocèle

VISION

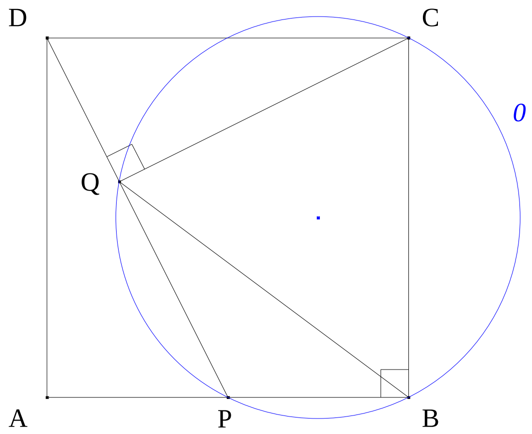
Figure :



Traits :		ABCD	un triangle carré,
		P	le milieu de [AB]
	et	Q	le pied de la perpendiculaire à (PD) passant par C.

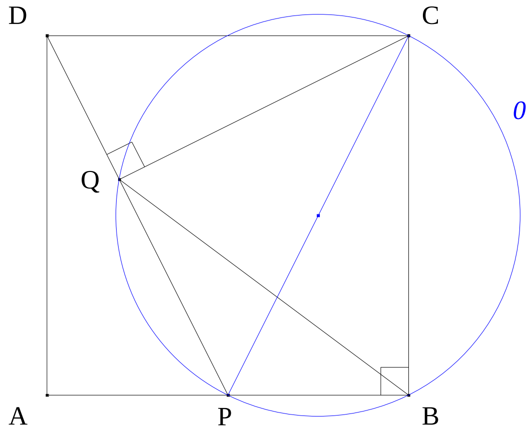
Donné : le triangle BCQ est B-isocèle.[37]

VISUALISATION



[37] Prove that\triangle BQC is isosceles triangle, *Mathlinks* du 10/05/2011 ; OSP Indonesian 2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=406063
Prove, AoPS du 03/03/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=578928
Parallelogram, AoPS du 06.04/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1423260_parallelogram

- **Scolie :** le quadrilatère BCQP est cyclique.
- Notons *0* le cercle circonscrit à BCQP.

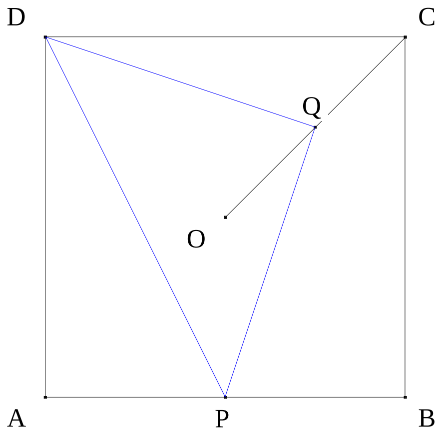


- **Scolie :** (PB) est la P-bissectrice extérieure du triangle PCD ou encore du triangle PCQ
- **Conclusion :** B étant le premier P-perpoint de PCQ, le triangle QBCQ est B-isocèle.

23. Un triangle rectangle isocèle

VISION

Figure :

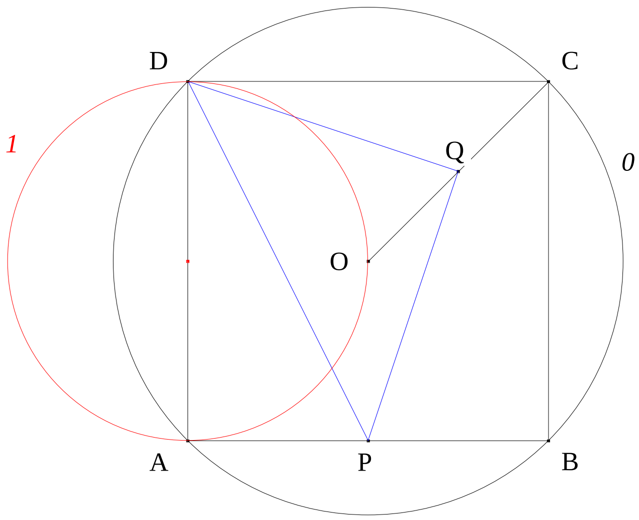


Traits : ABCD un triangle carré,
O le centre de ABCD
et P, Q les milieux resp. de [AB], [OC].

Donné : le triangle QDO est Q-rectangle isocèle.[38]

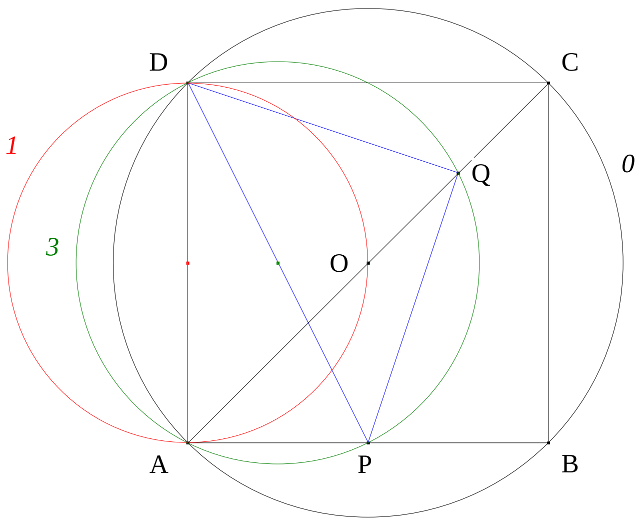
VISUALISATION

[38] Triangle isocèle rectangle, *Les Mathématiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/list.php?8
Rectangular and isoceles, AoPS du 14/09/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=553970



- Notons *0* le cercle circonscrit à ABCD
  1 le cercle de diamètre [AD].

- **Scolie :** *1* passe par O et est resp. tangent à (AB) en A, à (CD) en D.



- Notons *3* le cercle de diamètre [PD] ; il passe par P milieu de [AB].

- *3* étant "le cercle des milieux relativement à *0* et *1*" (Cf. Annexe **9**), *3* passe par Q.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", le triangle QDO est Q-rectangle.

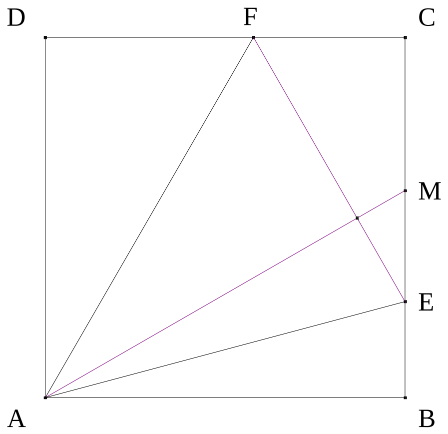
- D'après "Le théorème de l'angle inscrit", <QPD = 45°.

Conclusion : le triangle QDO est Q-rectangle isocèle.

24. Deux perpendiculaires

VISION

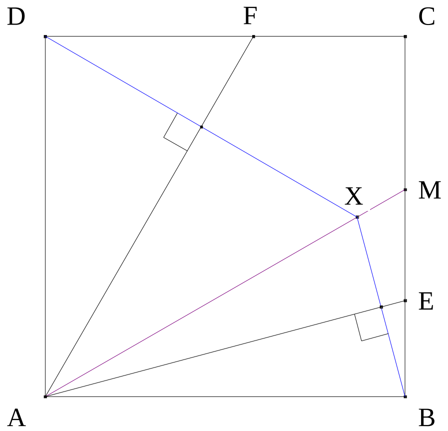
Figure :



Traits : ABCD un triangle carré,
M un point de [BC],
E le point d'intersection de la bissectrice intérieure de <BAM avec (BC)
et F le point d'intersection de la bissectrice intérieure de <MAD avec (CD).

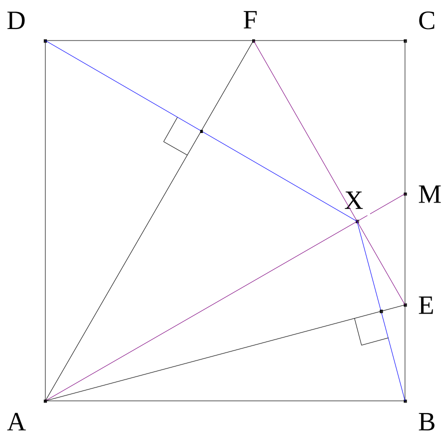
Donné : (AM) est perpendiculaire à (EF).[39]

VISUALISATION



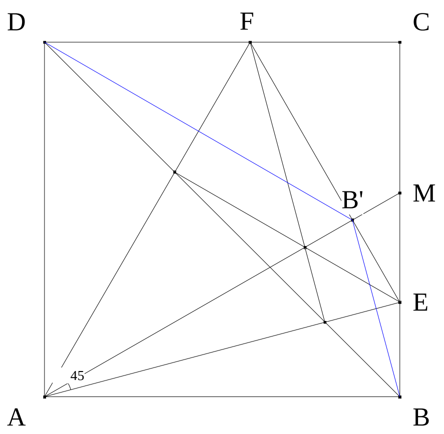
- **Scolie :** <EAF = 45°.
- Notons X le symétrique de B par rapport à (AE).
- **Scolie :** X est aussi le symétrique de D par rapport à (AF).

39 Perpendicular problem?, *Mathlinks* du 25/12/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=383620



- Par une chasse angulaire, nous montons que <FXE = 180° i.e. F, X et E sont alignés.
- **Conclusion :** par symétrie par rapport à (AF), (AM) est perpendiculaire à (EF).

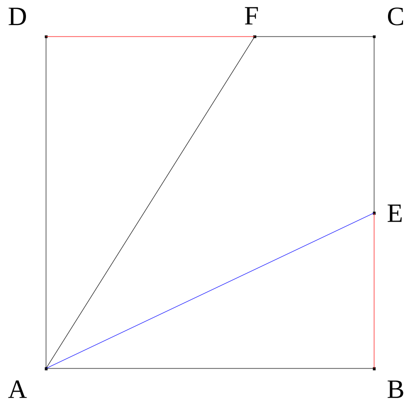
Scolie : un lien avec **B. 18.** Square 45°



25. Une relation

VISION

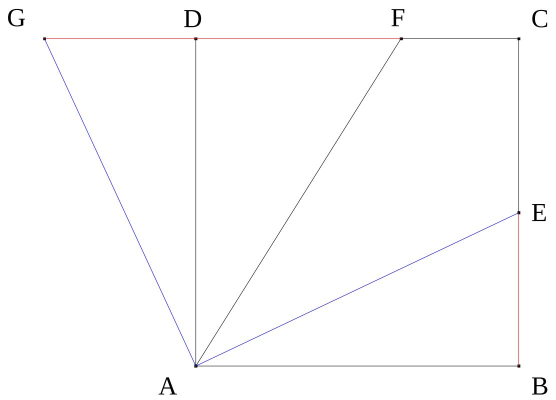
Figure :



Traits : ABCD un triangle carré,
E un point de [BC],
et F le point de [CD] tel que <EAF = <FAD.

Donné : AE = BE + DF.[40]

VISUALISATION



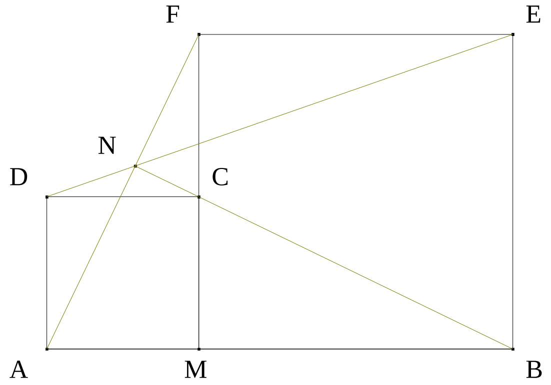
- Notons G le point de (CD) tel que **(1)** D soit entre C et G
  (2) DG = BE.
- D'après "Le théorème de Pythagore", AG = AE.
- Par une chasse angulaire, nous montrerions que <FAG = <GFA ;
  en conséquence, le triangle GAF est G-isocèle et GA = GF.
- **Conclusion :** par substitution, AE = BE + DF.

26. Deux carrés et trois droites concourantes I

VISION

Figure :

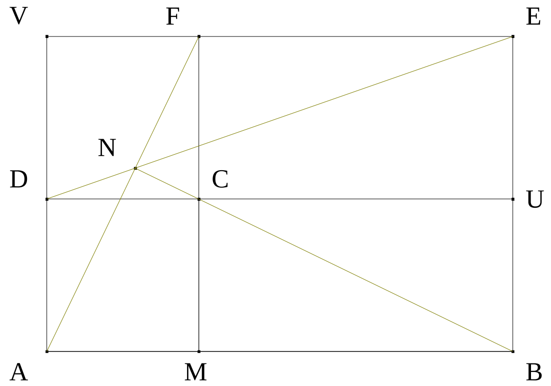
[40] ABCD quadratic, *Mathlinks* du 08/12/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=381424



Traits : [AB] un segment,
M un point de]AB[,
AMCD un carré
et MBEF un carré situé du même côté que AMCD par rapport à (AB).

Donné : (AF), (BC) et (DE) sont concourantes.

VISUALISATION



- Notons U, V les points d'intersection resp. de (BE) et (CD), (AD) et (EF).

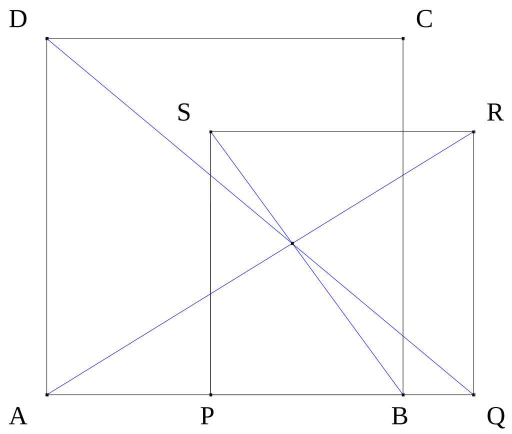
- **Conclusion :** d'après Pappus ''Un hexagone avec deux sommets à l'infini'' [41],
(AF), (BC) et (DE) sont concourantes.

27. Deux carrés et trois droites concourantes II

VISION

Figure :

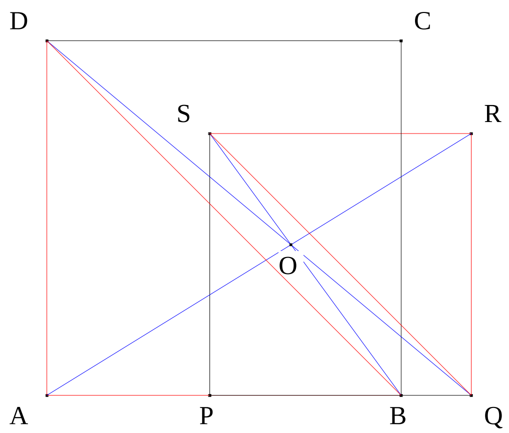
[41] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 21 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits :	ABCD	un carré,
	P	un point du segment [BC],
	Q	un point de (AB) tel que B soit entre P et Q,
et	R, S	deux points tels que le quadrilatère PQRS soit un carré.

Donné : (AR), (BS) et (DQ) sont concourantes. [42]

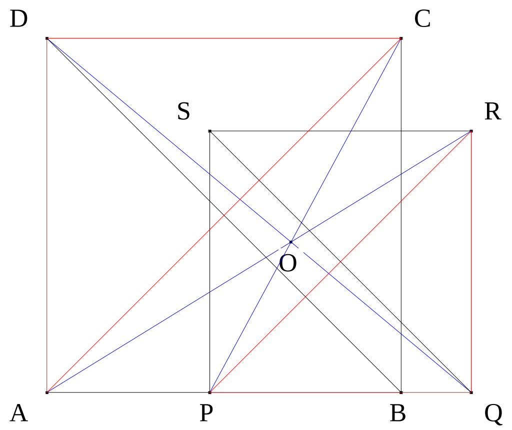
VISUALISATION



- ABCD et PQRS étant homothétiques, (BD) // (QS).
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible"
  appliqué aux triangles homothétiques ABD et RSQ,
  (AR), (BS) et (DQ) sont concourantes.
- Notons O ce point de concours.

Scolie : une autre droite passant par O

[42] *Kvant*, janvier 1987.



- ABCD et PQRS étant homothétiques, (AC) // (RP).

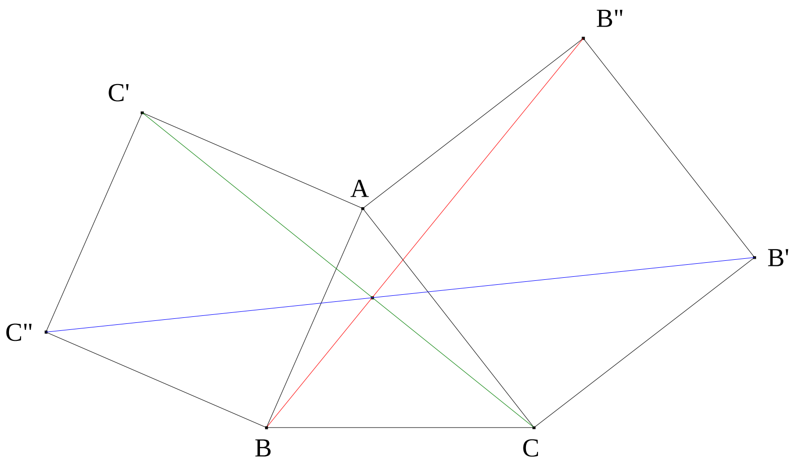
- D'après Desargues "Le théorème faible" appliqué aux triangles homothétiques ACD et RPQ, (AR), (CP) et (DQ) sont concourantes en O.

- **Conclusion :** (CP) passe par O.

28. Deux carrés et trois droites concourantes III ou la proposition 3 de Vecten

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
CB'B"A, AC'C"B, BA'A"C trois carrés resp. extérieurs à ABC,
2, *3* les cercles circonscrits resp. à CB'B"A, AC'C"B
et U le second point d'intersection de *2* et *3*.

Donné : (B'C") passe par U. [43]

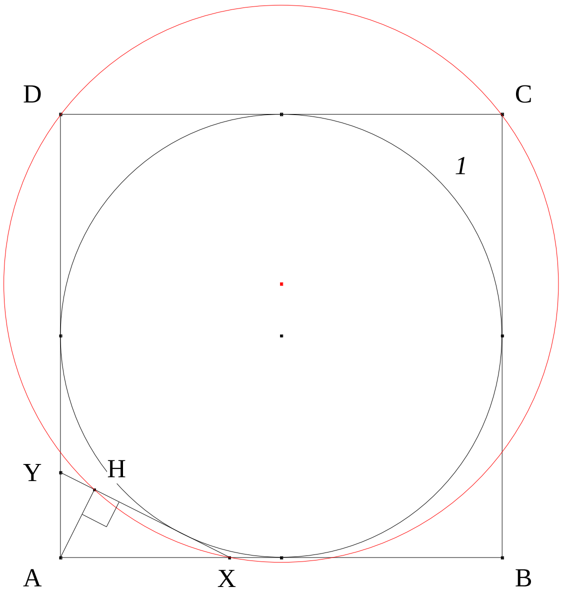
---

[43] Vecten, Géométrie élémentaire. Extrait d'une lettre au rédacteur des Annales, *Annales* de Gergonne **VII** (1816-17) 321-324, proposition **3** ;
BWM, exercice **1** (1979) ;
Ayme J.-L., La figure de Vecten, vol. **5**, p. 10-11 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

29. Quatre points cocycliques

VISION

Figure :

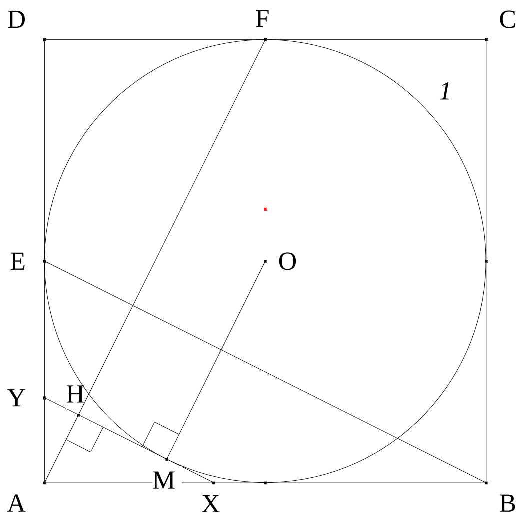


Traits :	ABCD	un carré,		
	1	le cercle inscrit de ABCD,		
	X , Y	deux points resp. de [AB], [AD] tel que	**(1)**	(XY) soit tangent à *1*
			(2)	2.AX = AY
et	H	le pied de la perpendiculaire à (XY) passant par A.		

Donné : H, X, C et D sont cocycliques. [44]

VISUALISATION

[44] *Kvant*, janvier 1987.



Une construction de X et Y

- Supposons la figure résolue.

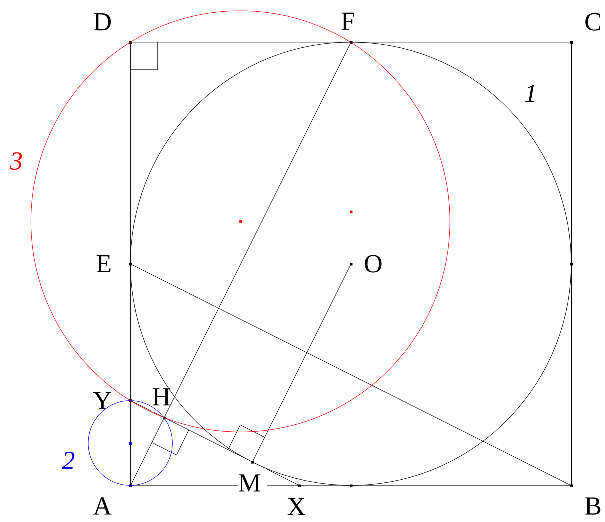
- Notons E, F, M les points de contact de *1* resp. avec (AD), (CD), (XY)
  et O le centre de *1*.

- Par homothétie, (BE) // (XY).

- Les triangle AXY et YAH étant homothétiques, 2.AY = HY ;
  en conséquence, A, H et F sont alignés.

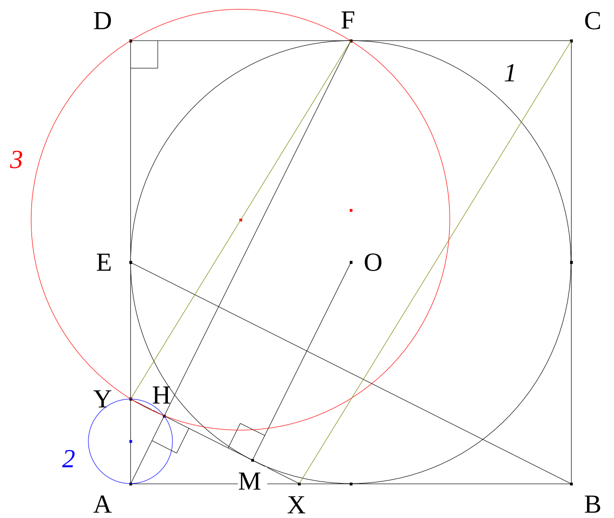
- **Conclusion :** en remarquant que (OM) est parallèle à (AF), nous pouvons construire X et Y.

H, Y, C et D sont cocycliques

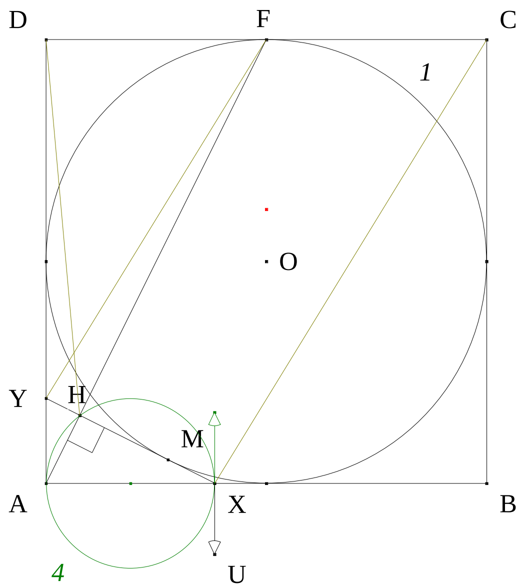


- Notons *2* le cercle de diamètre [AY] ; il passe par H ;
  et *3* le cercle de diamètre [FY] ; il passe par H et D;

- D'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe **11**), <DHA = <AYF.

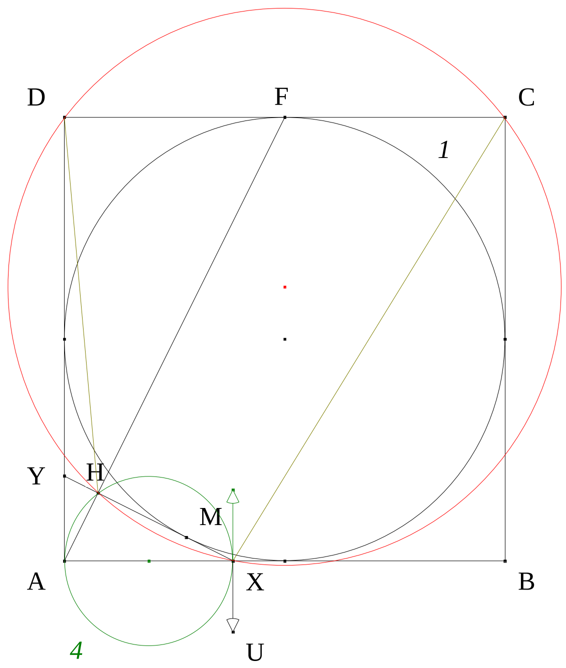


- D'après **B. 12.** Compétition *Kürschak* de Hongrie (1960), (YF) // (XC).



- Notons *4* le cercle de diamètre [AX] ; il passe par H ;
  et U un point de la tangente à *4* en X situé à l'extérieur de ABCD.

- Nous avons : <DHA = CXU.

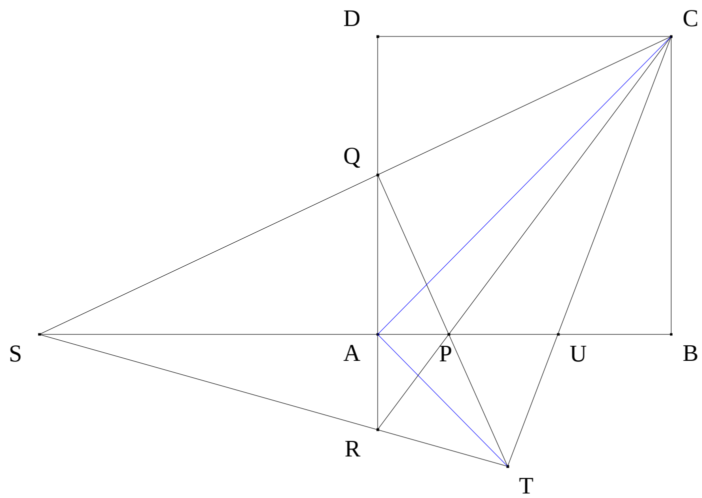


- **Conclusion :** le cercle *4*, les points de base H et X, les moniennes brisée à angles égaux (AHD) et (XXC), Les parallèles (AX) et (DC), conduisent au théorème généralisé de Reim [45] ;
  en conséquence, H, X, C et D sont cocycliques.

30. Deux perpendiculaires

VISION

Figure :

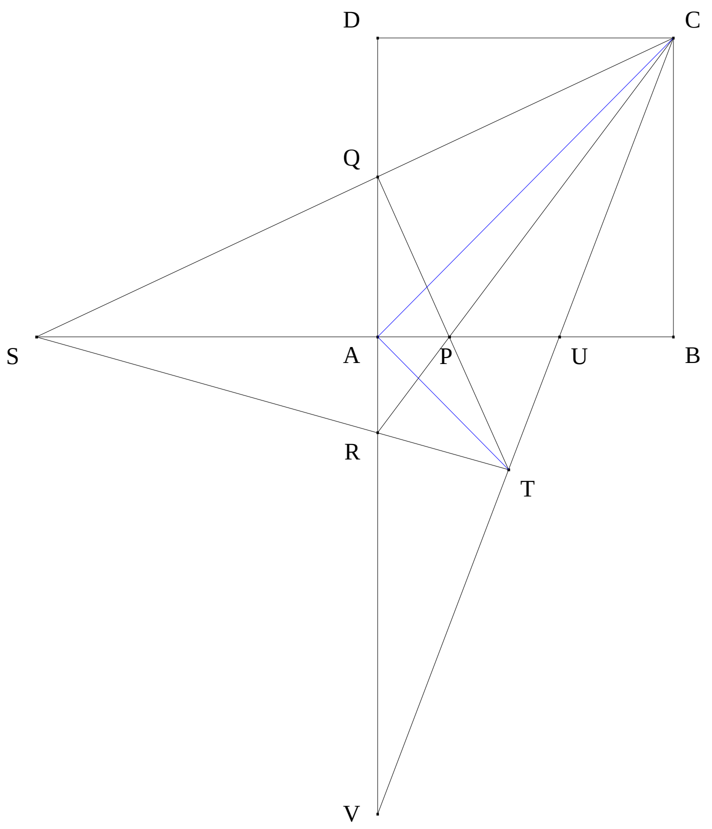


Traits : ABCD un triangle carré,
P, Q deux points resp. de [AB], [AD],
R, S les points d'intersection resp. de (CP) et (AD), (CQ) et (AB),
et T le point d'intersection de (PQ) et (RS).

[45] Ayme J.-L., A propos de deux cercles sécants, G.G.G. vol. **12**, p. 9 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Donné : (AC) est perpendiculaire à (AT).[46]

VISUALISATION



- Notons U, V les points d'intersection resp. de (PS) et (CT), (CT) et (QR).

- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" appliqué au quadrilatère PQSR, le quaterne (C, T, U, V) est harmonique ;
  il s'en suit que **(1)** le quaterne (U, V, T, C) est harmonique

  (2) (AC) étant la bissectrice extérieure de <UVA,
  (AT) étant la bissectrice intérieure de <UVA.

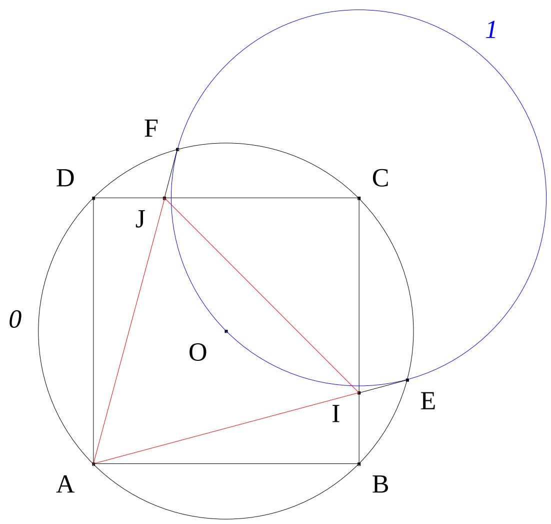
- **Conclusion :** (AC) est perpendiculaire à (AT).

31. Le triangle équilatéral de Muhammad Abul Wafa

VISION

Figure :

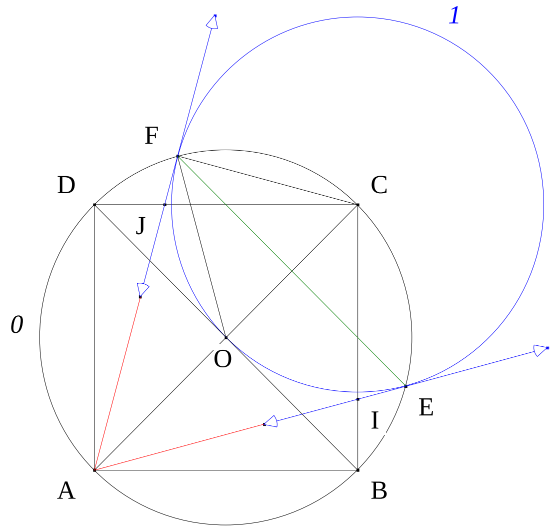
[46] A square, *Mathlinks* du 10/01/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=385846



Traits : ABCD un carré,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
O le centre de *0*,
1 le cercle de centre C passant par O,
E, F les points d'intersection de *0* et *1*,
et I, J le point d'intersection resp. de (AE) et (BC), (AF) et (CD).

Donné : le triangle AIJ est équilatéral. [47]

VISUALISATION

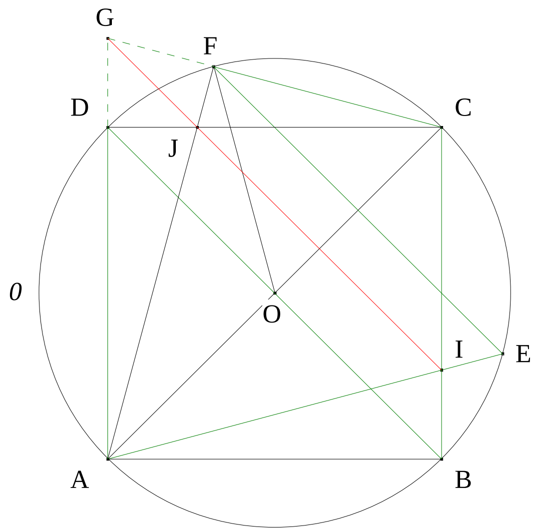


- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", les triangles FAC et ECA sont resp. F, E-rectangles ; par définition d'une tangente, (AF) et (AE) sont resp. tangentes à *1* en F, E.

- D'après Euclide "Tangentes égales", (EF) ⊥ (AC) ;
  les diagonales d'un carré étant perpendiculaires, (AC) ⊥ (BD) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (EF) // (BD).

[47] Abul Wafa, mathématicien et astronome persan (940-15/07/ 998).

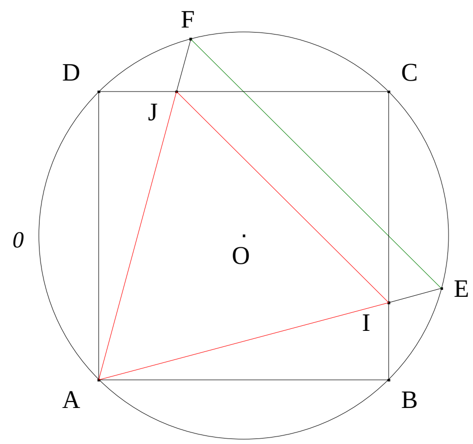
- D'après Euclide "Proposition **1**, Livre **I**", le triangle FOC est équilatéral;
  d'après Möbius "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe **11**), le triangle FAE est équilatéral.



- Notons G le point d'intersection de (AD) et (CF).

- D'après "L'équivalence d'Aubert" (Cf. Annexe **12**),
  (IG) étant la pascale de l'hexagone DBCFEAD, (IG) // (EF) ;
  d'après Euclide "Tangentes égales", (EF) ⊥ (AC) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (IG) ⊥ (AC) ;
  en conséquence, (IG) est la G-hauteur du triangle GAC.

- D'après Archimède "L'orthocentre", (IG) passant par l'orthocentre J de GAC, (IJ) // (EF).

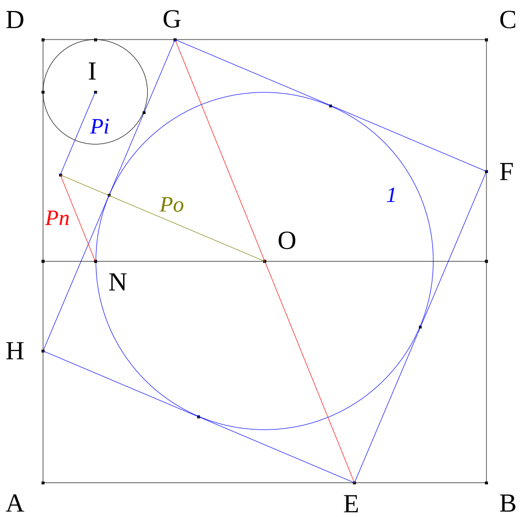


- **Conclusion :** le triangle AIJ est équilatéral.

32. Trois droites concourantes

VISION

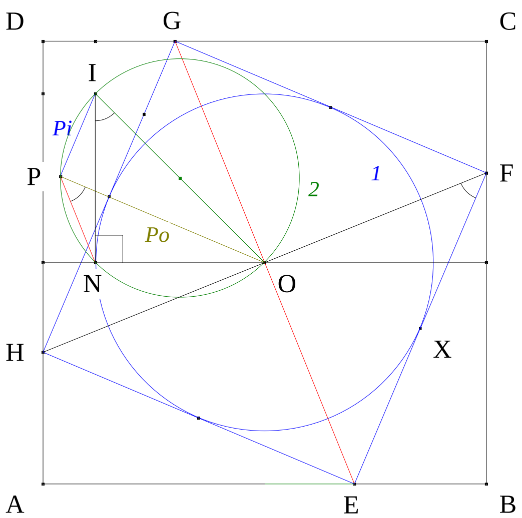
Figure :



Traits : ABCD un carré,
EFGH un carré inscrit dans ABCD,
1 le cercle inscrit de EFGH,
O le centre de *1*,
2 le cercle inscrit du triangle AEH,
I le centre de *2*,
N le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par O avec *1* comme indiqué sur la figure,
Pi la droite parallèle à (EH) passant par J,
Po la droite perpendiculaire à (GH) passant par O
et *Pn* la droite parallèle à (EG) passant par N.

Donné : *Pn*, *Po* et *Pi* sont concourantes.[48]

VISUALISATION [49]



- **Scolie :** (IN) ⊥ (ON).

- Notons P le point d'intersection de *Pi* et *Po*,

[48] Well known (?) fact, *Mathlinks* du 20/12/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=383164
[49] C'est celle de Kostas Vittas.

et 2 le cercle de diamètre [OI].

- D'après "Le théorème de l'angle inscrit", <NPO = <NIO (= 45°)
  en conséquence, <NPO = <OFE.

- Nous avons : (PO) ⊥ (EF) et

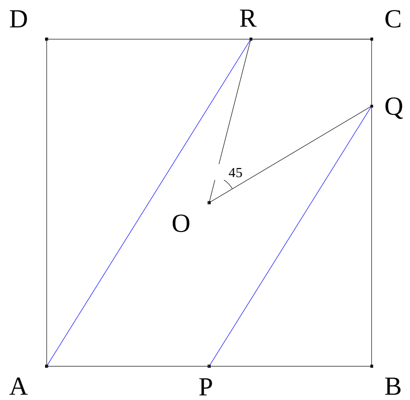
- D'après le théorème "Angles à côtés perpendiculaires", (PN) ⊥ (HF) ;
  nous savons que (HF) ⊥ (EG) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (PN) // (EG) ;
  en conséquence, (PN) = *Pn*.

- **Conclusion :** *Pn*, *Po* et *Pi* sont concourantes en P.

33. Deux parallèles

VISION

Figure :

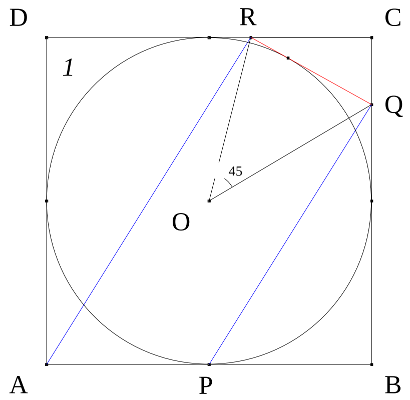


Traits : ABCD un triangle carré,
O le centre de ABCD,
P le milieu de [AB]
Q un point de (BC)
et R le point de (CD) tel que <QOR = 45°.

Donné : (PQ) est parallèle à (OR).[50]

VISUALISATION

[50] Skytin, Square, *Mathlinks* du 04/07/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=416303

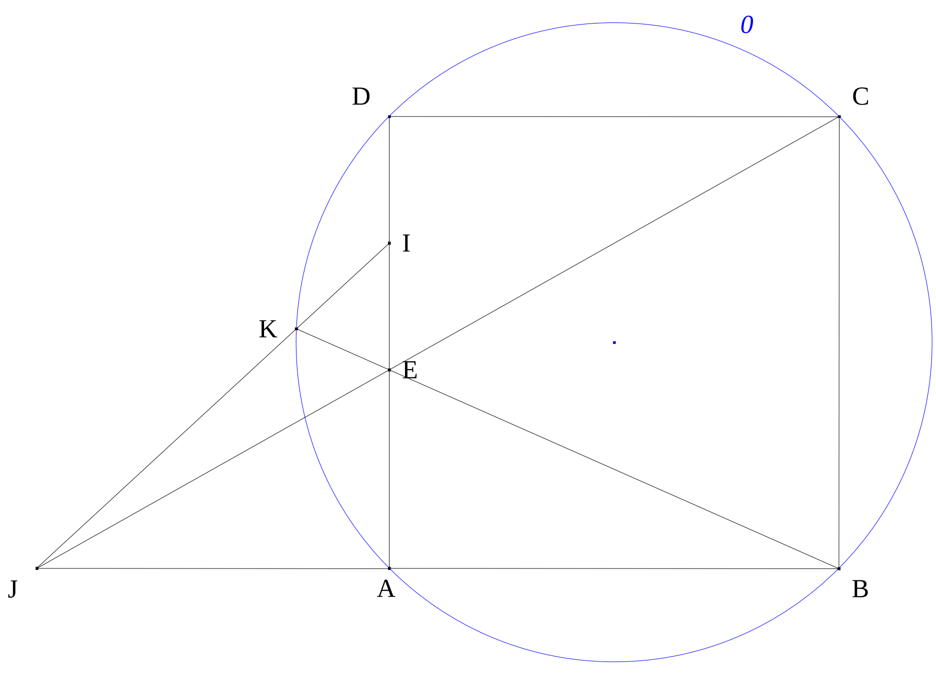


- Notons *1* le cercle inscrit de ABCD.
- D'après Poncelet "L'angle au centre constant" (Cf. Annexe **10**), (QR) est tangente à *1*.
- **Conclusion :** d'après **B. 12.** Compétition *Kürschak* de Hongrie (1960), (PQ) est parallèle à (OR).

34. A small problem

VISION

Figure :

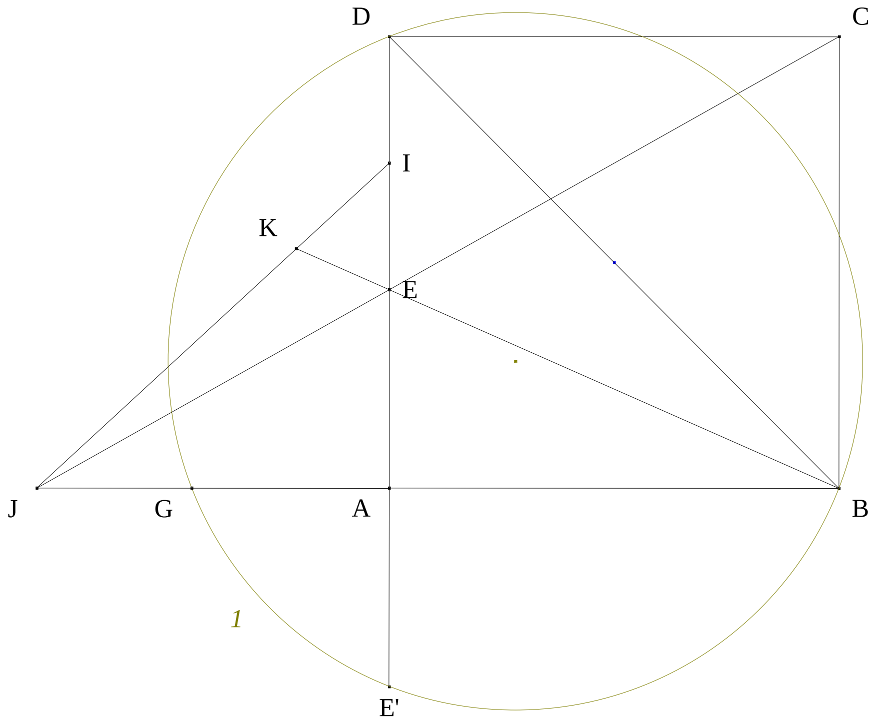


Traits :	ABCD	un carré,
	E	un point de [AD],
	J	le point d'intersection de (CE) et (AB),
	I	le milieu de [DE],
	K	le point d'intersection de (IJ) et (BE),
et	*0*	le cercle circonscrit à ABCD.

Donné : K est sur *0*. [51]

VISUALISATION

- **Commentaire :** E peut être envisagé comme l'orthocentre d'un triangle à définir.

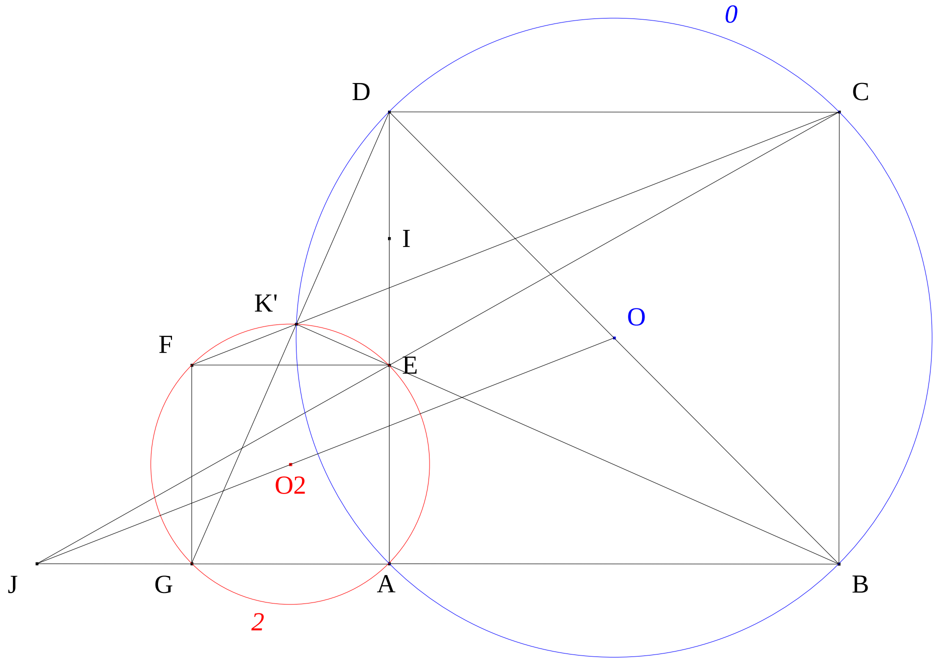


- Notons E' le symétrique de E par rapport à (AB),
  1 le cercle passant par E', B et D.
  et G le second point d'intersection de (AB) avec *1*.

- D'après Steiner "Puissance d'un point par rapport à un cercle", AG = AE' ;
  par construction, AE' = AE ;
  par transitivité de la relation =, AG = AE.

- **Scolie :** E est comme l'orthocentre du triangle DBG.

[51] Morel A. (à Void), Question **2156**, *Journal de Mathématiques Élémentaires* N° **20** (juillet 1888), p.160
Gibert B., A small problem, Message *Hyacinthios* # **19822** du 07/02/2011 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/
Ayme J.-L., Square-square, *Mathlinks* 17/07/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=418659

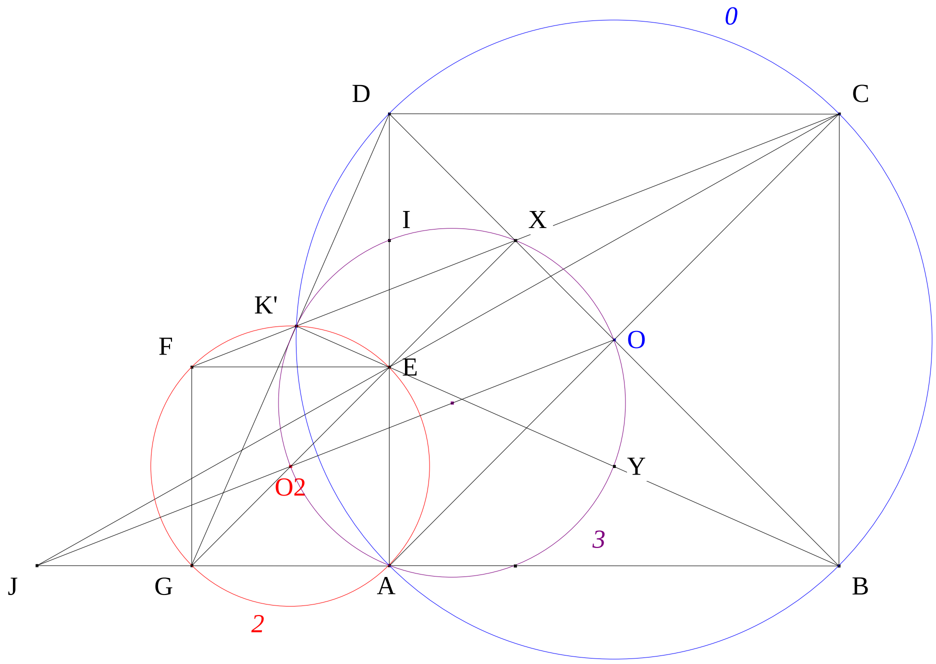


- Notons F le point tel que AEFG soit un carré,
  2 le cercle circonscrit à AEFG,
  K' le second point d'intersection de *0* et *2*,
  et O, O2 les centres resp. de *0*, *2*.

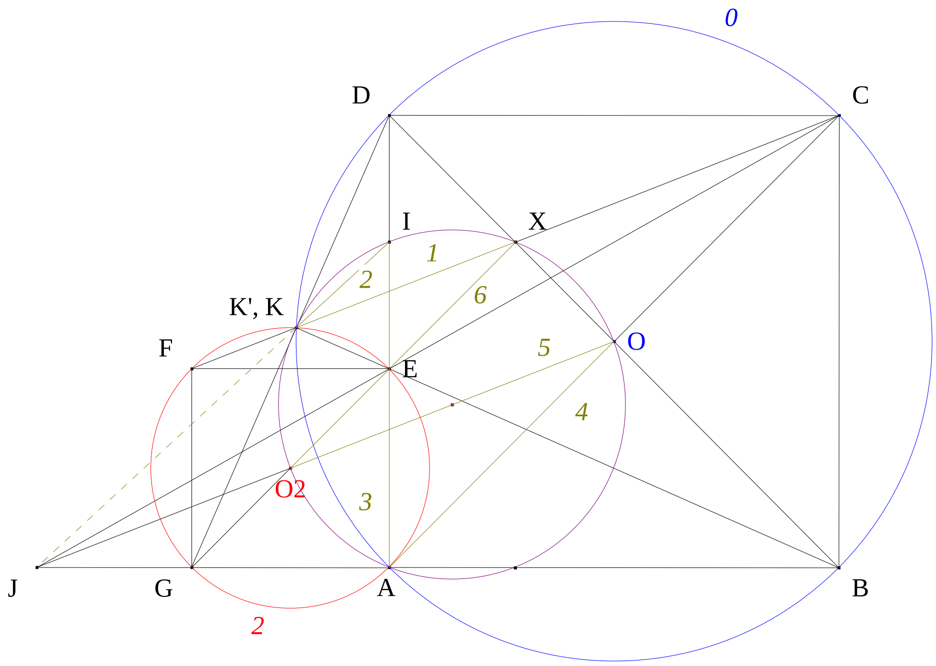
- D'après **B. 8.** Première O.I.M. (1959), (BE) et (DG) se coupent en K'.

- **Scolies :** **(1)** (BE) ⊥ (DG)
  (2) E est l'orthocentre du triangle DGB
  (3) par homothétie, J, O2 et O sont alignés.

- Les cercles *0* er *2*, les points de base A et K', la monienne (BAG), les parallèles (BC) et (GF), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, C, K' et F sont alignés.



- Notons X le pied de la G-hauteur de DGB,
  et *3* le cercle d'Euler[52] de DGB ; il passe par I, K', O2, A, Y et O.



- D'après Pascal "Hexagrammamysticum"[53],
  (EC) étant la pascal de l'hexagone cyclique XK'IAOO2X, (IK') et (OO2) se coupent sur (EC) i.e. en J ;
  En conséquence, K et K' sont confondus.

- **Conclusion :** K est sur *0*.

Commentaire : ce "small problem" a pour "squelette" le problème de première O.I.M. (1959).

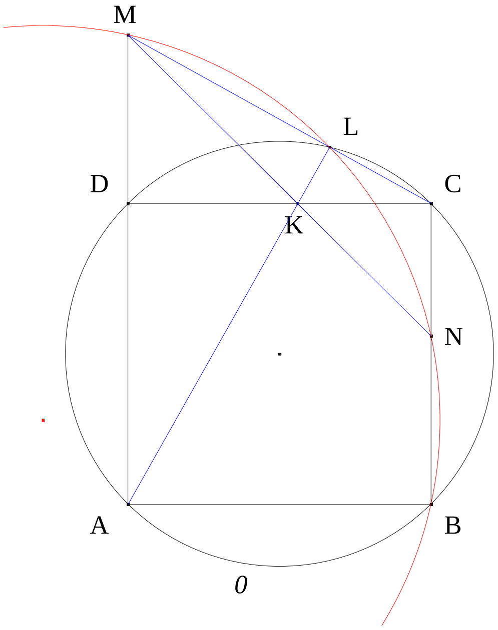
35. Czech and Slovak third round (2004) Problem 5

VISION

Figure :

[52] Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler,… G.G.G. vol. **2** p. 3-5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

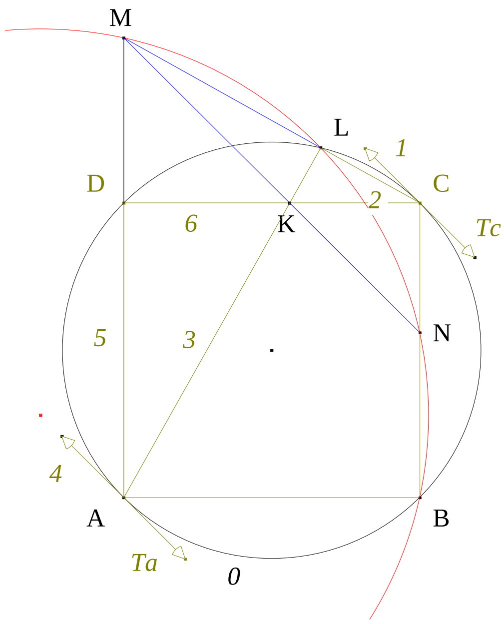
[53] Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. **12** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits :	ABCD	un carré,
	L	un point de l'arc CD ne contenant pas A,
	K, M	les points d'intersection de (AL) et (CD), (CL) et (AD),
et	N	le point d'intersection de (MK) et (BC).

Donné : B, L, N et M sont cocycliques. [54]

VISUALISATION



- Notons *Ta*, *Tc* les tangentes à *0* resp. en A, C.

- **Scolie :** *Ta* // *Tc*.

---

54 Four points are concyclic in a square, Mathlinks du ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=467479

- D'après "L'équivalence d'Aubert-MacKensie" (Cf. Annexe **1**),

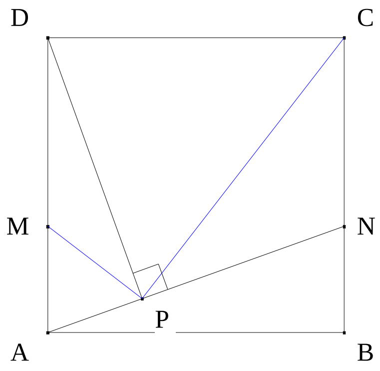
  (1) (MK) est la pascale de l'hexagone dégénéré *Tc* LA *Ta* DC
  (2) *Tc* // (MKM).

- **Conclusion :** le cercle *0*, les points de base B et L, les moniennes naissantes (CBN) et (CLM), les parallèles *Tc* et (NM), conduisent au théorème **1''** de Reim ; en conséquence, B, L, N et M sont cocycliques.

36. Un angle droit

VISION

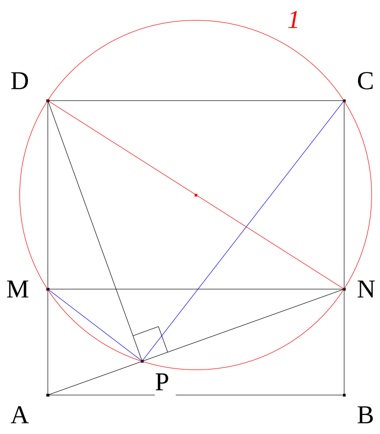
Figure :



Traits : ABCD un carré,
M, N deux points resp. de [AD], [BC] tels que AM = BN
et P le pied de la perpendiculaire à (AN) issue de D.

Donné : <MPC est droit. [55]

VISUALISATION



- Notons *1* le cercle de diamètre [DN] ; il passe par P et C.

[55] Square, *Mathlinks* du 13/02/2010 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=331584

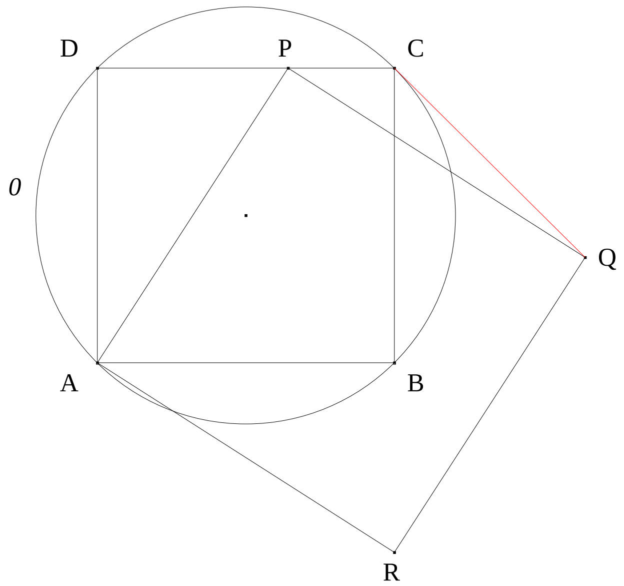
- Le quadrilatère MNCD étant un rectangle, *1* passe par M ;
  en conséquence, [CM] est un diamètre de *1*.

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", <MPC est droit.

37. XI Olimpíada Matemática del Cono Sur (2000)

VISION

Figure :

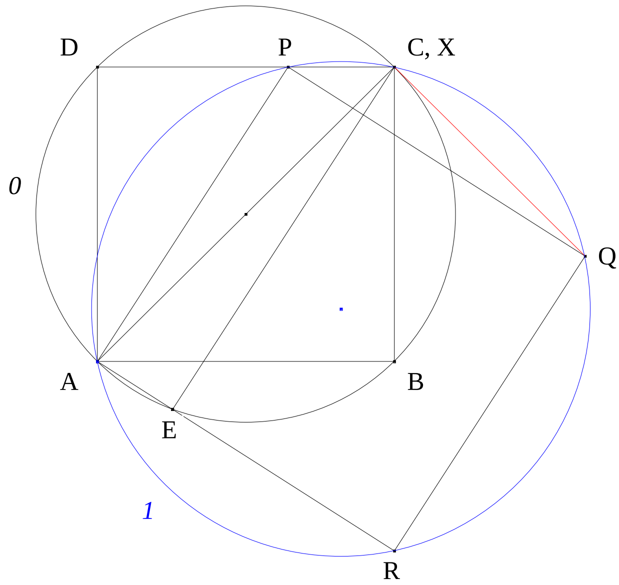


Traits : ABCD un carré,
0 le cercle circonscrit à ABCD,
P un point de [CD]
et APQR le carré comme indiqué sur la figure.

Donné : (CQ) est tangente à *0* en C. [56]

VISUALISATION

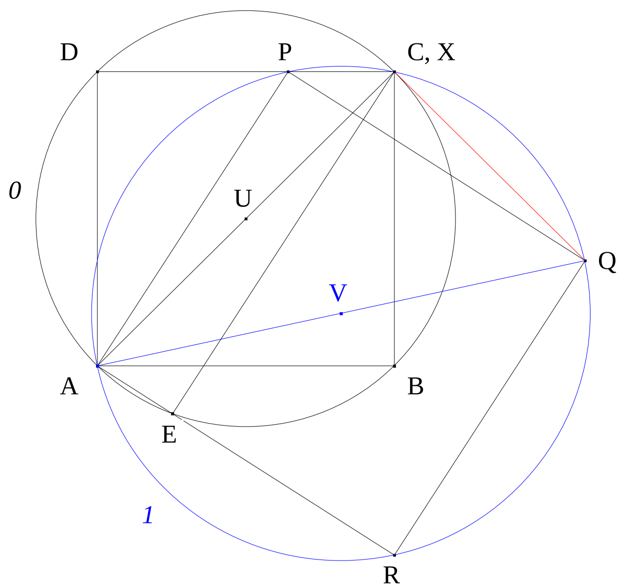
[56] Line through vertices of two squares tangent to circumcircle, mathlinks du 25/07/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=420202



- Notons E le second point d'intersection de (AR) avec *0*,
  1 le cercle circonscrit à APQR
  et X le second point d'intersection de *0* et *1*.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (EC) ⊥ (AER) ;
  par hypothèse, (AER) ⊥ (RQ) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (EC) // (RQ).

- Les cercles *0* et *1*, les points de base A et X, la monienne (EAR), les parallèles (EC) et (RQ), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, C, X et Q sont alignés.



- Notons U, V les centres resp. de ABCD, APQR.

- **Scolie :** [AQ] est un diamètre de *1*.

- D'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe **2**), <UVW = <XAQ ;
  en conséquence, C et X sont confondus ;

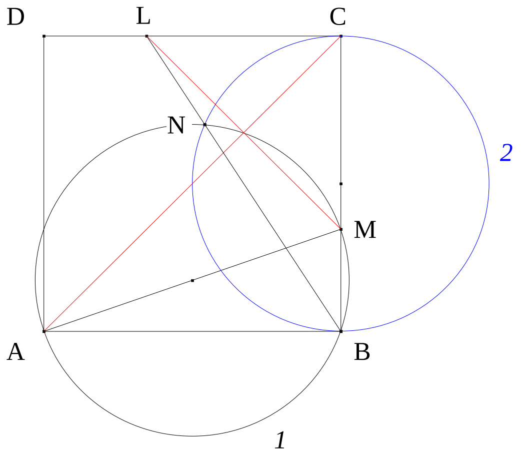
il s'en suit que (CQ) ⊥ (AC).

- **Conclusion :** (CQ) est tangente à *0* en C.

38. Perpendiculaire à une diagonale

VISION

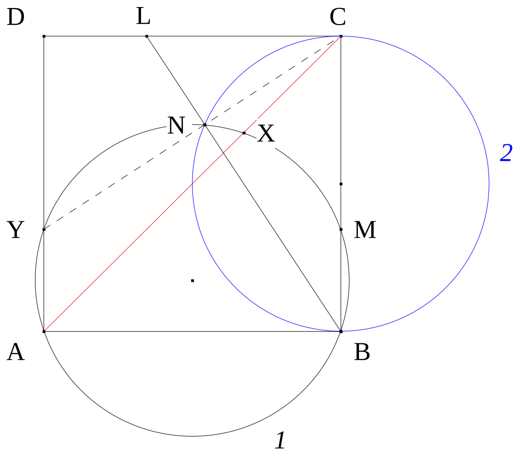
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	M	un point de [BC],
	1, *2*	les cercles de diamètre resp. [AM], [BC],
	N	le second point d'intersection de *1* et *2*,
et	L	le point d'intersection de (BN) et (CD).

Donné : (ML) est perpendiculaire à (AC). [57]

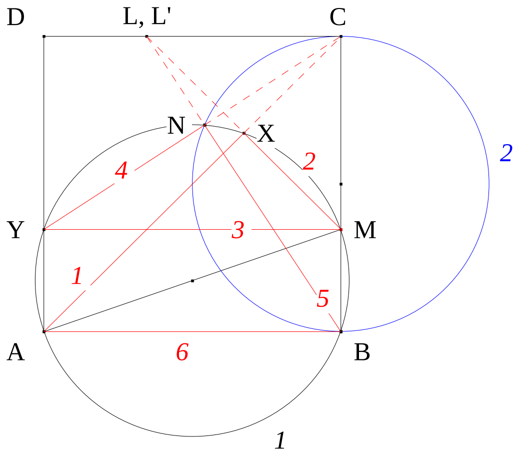
VISUALISATION



[57] Perpendicular problem?, *Mathlinks* du 15/12/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=452343

- Notons X, Y les seconds points d'intersection resp. de (AC), (BD) avec *1*.

- Les cercles *1* et *2*, les points de base B et N, la monienne (ABB), les parallèles (AY) et (BC), conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, Y, N et C sont alignés.



- Notons L' le point d'intersection de (MX) et (BN).

- **Scolie :** (MY) // (AB).

- D'après "L'équivalence d'Aubert-MacKensie" (Cf. Annexe **1**),

  (1) (CL') est la pascale de l'hexagone AXMYNBA
  (2) (CL') // (AB) ou encore (CL') // (CD) ;

  d'après le postulat d'Euclide, (CL') = (CD) i.e. C, L' et D sont alignés ;
  en conséquence, L et L' sont confondus.

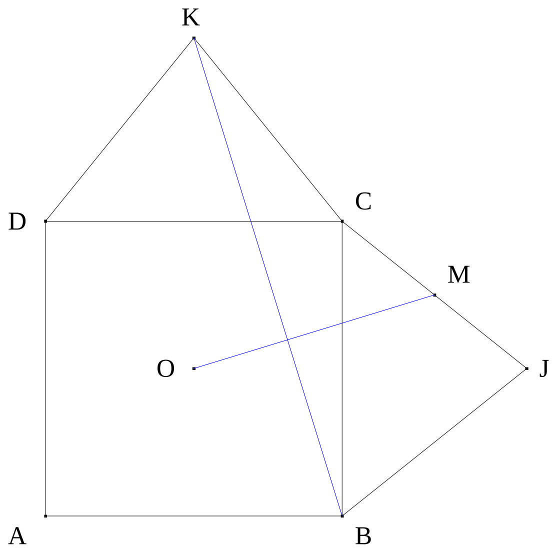
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", (MXL) ⊥ (AXC).

- **Conclusion :** (ML) est perpendiculaire à (AC).

39. ITAMO (2009) Problème 2

VISION

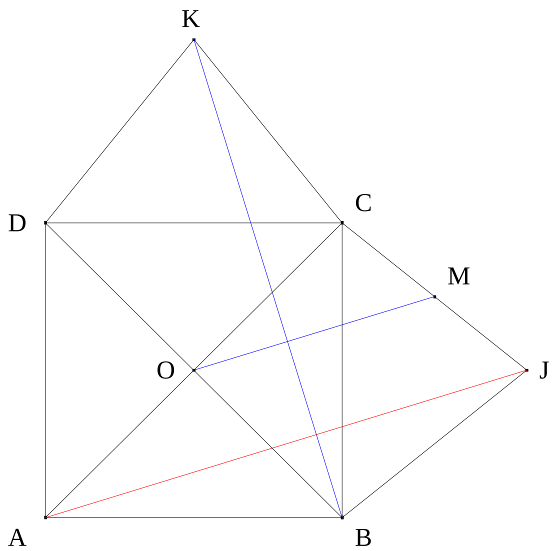
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	O	le centre de ABCD,
	BCJ, CDK	deux triangles isocèles, égaux et extérieur à ABCD
et	M	le milieu de [CJ].

Donné : (OM) est perpendiculaire à (BK). [58]

VISUALISATION



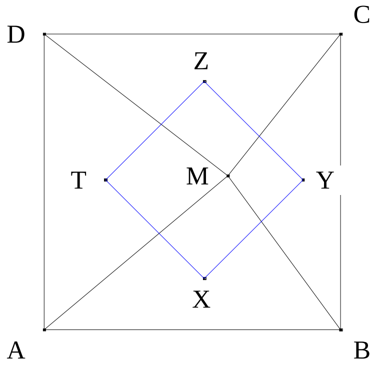
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle AJC, (OM) // (AJ).
- Les quadrilatères ABJC et BCKD étant semblables et orthologiques, (AJ) ⊥ (BK) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (OM) ⊥ (BK).
- **Conclusion :** (OM) est perpendiculaire à (BK).

[58] ABCD is a square with centre O, *Mathlinks* du 16/02/2012 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=464487

40. Le carré des points médians

VISION

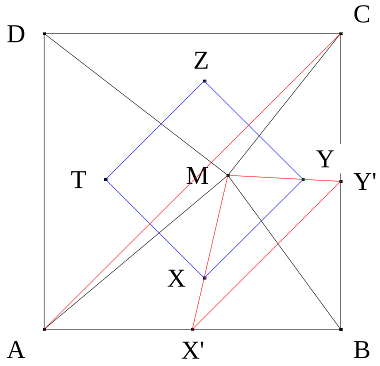
Figure :



Traits :	ABCD	un carré,
	M	un point intérieur à ABCD,
	X, Y, Z, T	les points médians resp. des triangles MAB, MBC, MCD, MDA.

Donné : le quadrilatère XYZT est un carré. [59]

VISUALISATION



- Notons X', Y' les milieux resp. de [AB], [BC].
- **Scolie :** X est deuxième tiers-point de [MX'] à partir de M
  Y est deuxième tiers-point de [MY'] à partir de M.
- D'après Thalès "Rapports", 3.XY = 2.X'Y' ;
  d'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle ABC, 2.X'Y' = AC ;
  en conséquence, 3.XY = AC.
- Mutatis mutandis, nous montrerions que 3.ZT = AC
  3.YZ = BD

[59] A problems, *Mathlinks* du 04/08/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=422460

3.TX = BD

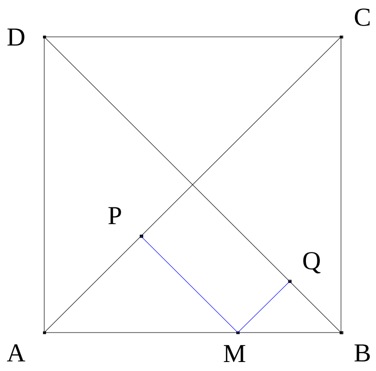
- Sachant que AC = BD, XY, ZT, YZ et TX sont égaux.

- **Conclusion :** le quadrilatère XYZT est un carré.

41. Cono Sur Olympiad 1989, Day 2, Problème 2

VISION

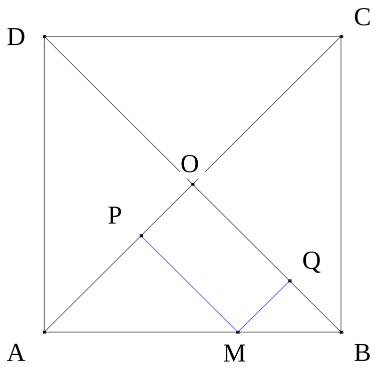
Figure :



Traits : ABCD un carré,
M un point de [AB]
et P, Q les pieds des perpendiculaires resp. à (AC), (BD) issue de M.

Donné : la somme MP + MQ est constante. [60]

VISUALISATION



- Notons O le point d'intersection de (AC) et (BD).

- **Scolies :** (MP) // (BOD) et (MQ) // (AOC).

[60] Cono Sur Olympiad 1989, Day **2**, Problème **2** ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php?c=1&cid=97&year=1989

- Le triangle OAB étant O-isocèle, le triangle PAM est P-isocèle ;
  en conséquence, MP = AP.

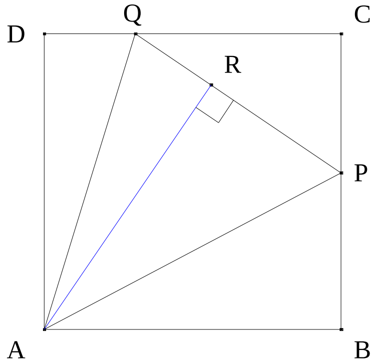
- Le quadrilatère MPOQ étant un rectangle, MQ = PO ;
  par addition membre à membre, MP + MQ = AO.

- **Conclusion :** la somme MP + MQ est constante.

42. Question 496 du Journal de Mathématiques Élémentaire de 1892

VISION

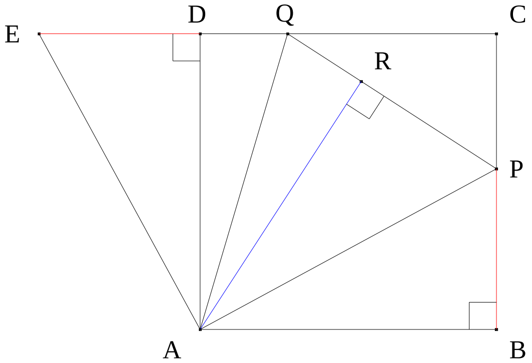
Figure :



Traits : ABCD un carré,
P, Q deux points resp. de [BC], [CD] tels que <PAQ = 45°,
et R le pied de la perpendiculaire à (PQ) issue de A.

Donné : AR = AD. [61]

VISUALISATION

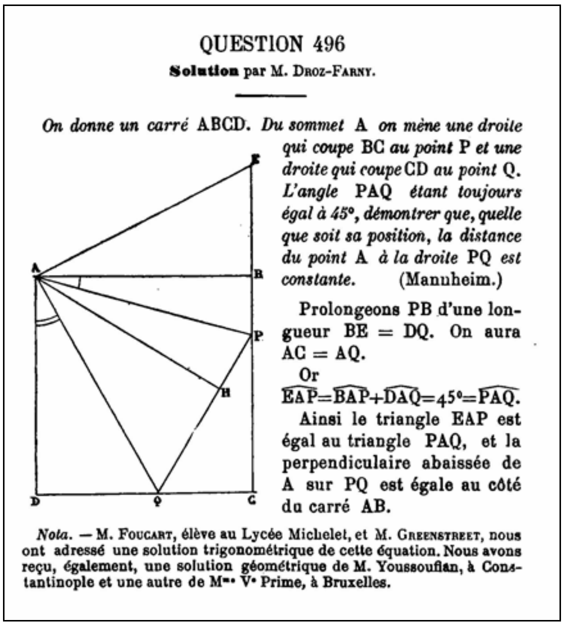


- Notons E le point de (CD) extérieur à [CD] tel que DE = BP.

- D'après "Le théorème c.a.c." appliqué aux triangles ABP et ADE, ceux-ci sont égaux ;
  en conséquence, AP = AE.

[61] J.M.E. (1892) 286, Question n° **496**.

- Une chasse angulaire montrerait que <EAQ = 45°.
- D'après "Le théorème c.a.c." appliqué aux triangles APQ et AEQ, ceux-ci sont égaux.
- **Conclusion :** AR = AD.



QUESTION 496

Solution par M. Droz-Farny.

On donne un carré ABCD. *Du sommet* A *on mène une droite qui coupe* BC *au point* P *et une droite qui coupe* CD *au point* Q. *L'angle* PAQ *étant toujours égal à 45°, démontrer que, quelle que soit sa position, la distance du point* A *à la droite* PQ *est constante.* (Mannheim.)

Prolongeons PB d'une longueur BE = DQ. On aura AC = AQ.

Or

$\widehat{EAP} = \widehat{BAP} + \widehat{DAQ} = 45° = \widehat{PAQ}$.

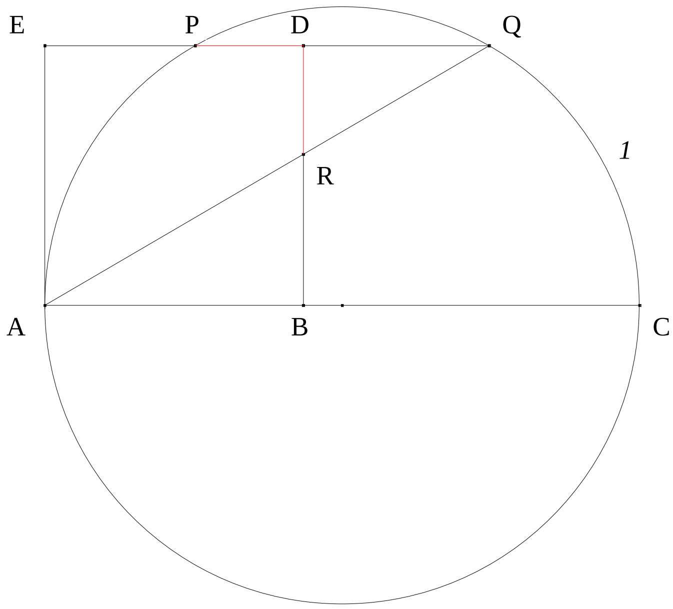
Ainsi le triangle EAP est égal au triangle PAQ, et la perpendiculaire abaissée de A sur PQ est égale au côté du carré AB.

Nota. — M. Foucart, élève au Lycée Michelet, et M. Greenstreet, nous ont adressé une solution trigonométrique de cette équation. Nous avons reçu, également, une solution géométrique de M. Youssoufian, à Constantinople et une autre de Mme Ve Prime, à Bruxelles.

43. Polish Second Round (2001)

VISION

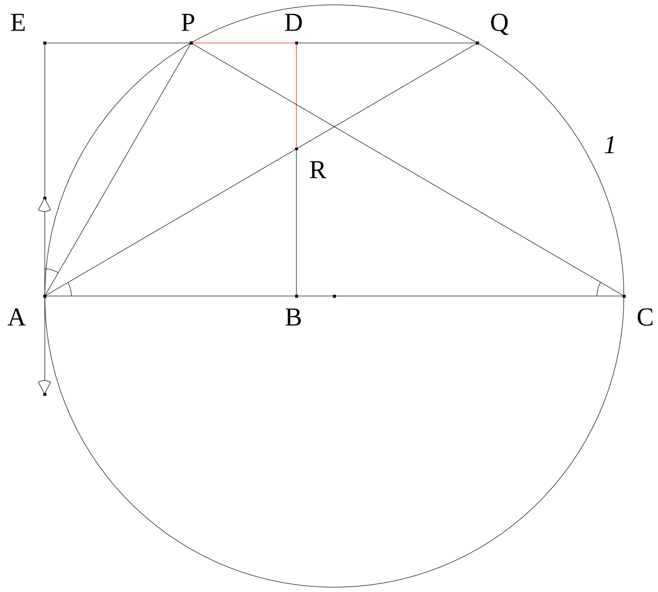
Figure :



Traits : A, B, C trois points alignés dans cet ordre tel que AB < BC,
ABDE un carré,
1 le cercle de diamètre [AC]
P, Q les points d'intersection de *1* avec (DE), P étant entre D et E,
et R le point d'intersection de (AQ) et (BD).

Donné : DP = DR. [62]

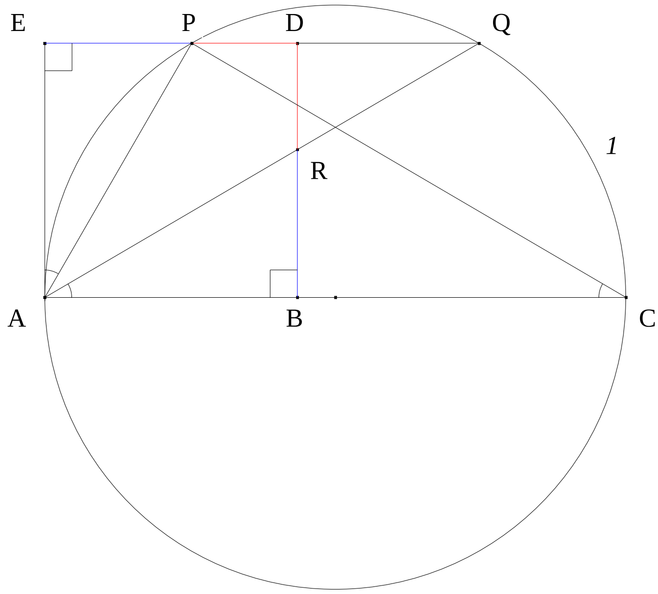
VISUALISATION



- **Scolie :** (AE) est la tangente à *1* en A.

- Une chasse angulaire :
  d'après "Le théorème de la tangente", <PAE = <PCA ;
  le quadrilatère ACQP étant un trapèze, <PCA = <CAQ ;
  par transitivité de la relation =, <PAE = <CAQ.

[62] Prove that DP=DR, *Mathlinks* du 06/03/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=468077



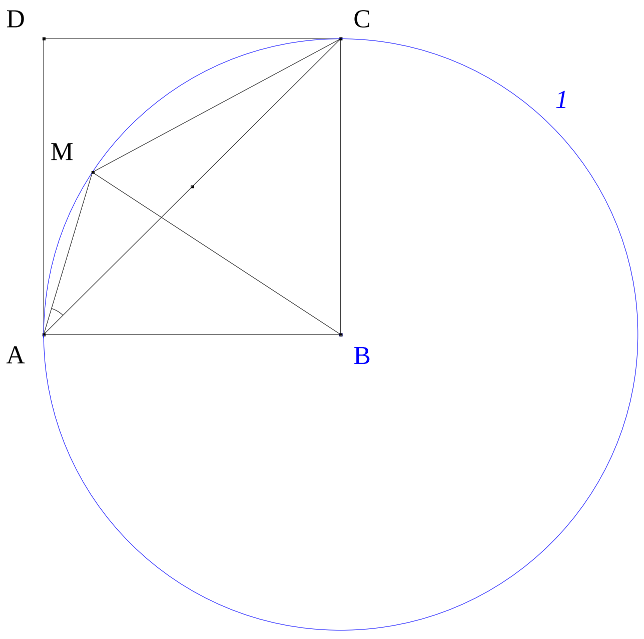
- D'après "Le théorème a.c.a." appliqué aux triangles PAE et BAR, ceux-ci sont égaux ;
  en conséquence, PE = BR.

- **Conclusion :** sachant que DE = BD,
  par soustraction, nous en déduisons que DP = DR.

44. 11th Philippine Mathematical Olympiad

VISION

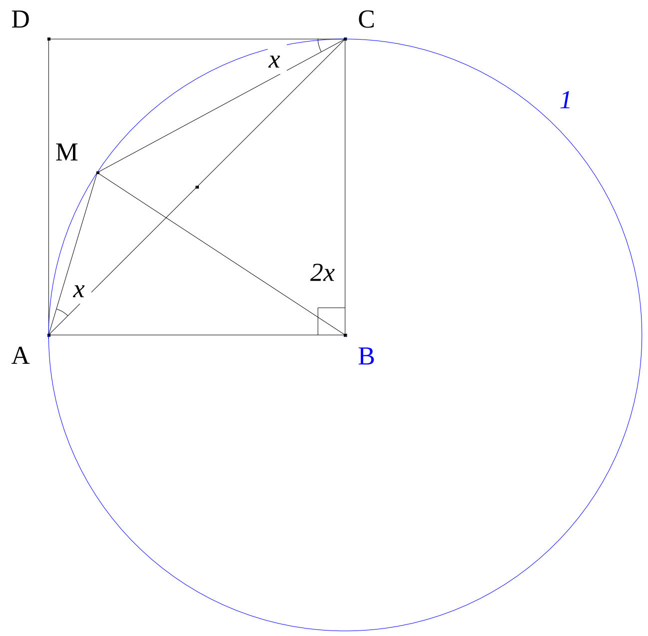
Figure :



Traits : ABCD un carré,
1 le cercle de centre B passant par A ; il passe par C ;
et M un point de l'arc AC situé à l'intérieur de ABCD.

Donné : exprimer <MBA en fontion de < CAM. [63]

VISUALISATION



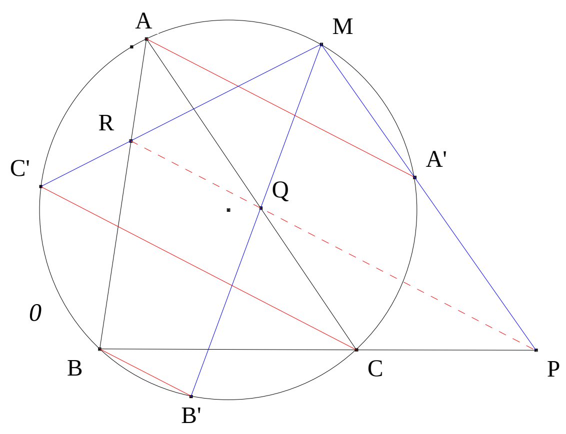
- D'après "Le théorème de la tangente", <CAM = <DCM ;
- D'après "Le théorème de l'angle au centre", 2.<DCM = <CBM ;
  en conséquence, 2.<CAM = <CBM.

- **Conclusion :** <MBA = 90°- 2.< CAM.

C. ANNEXE

1. L'équivalence d'Aubert-MacKensie

63 Angles, angles!, *Mathlinks* du 19/10/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=439427
Angles, again. :) ; *Mathlinks* du 19/10/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=439434

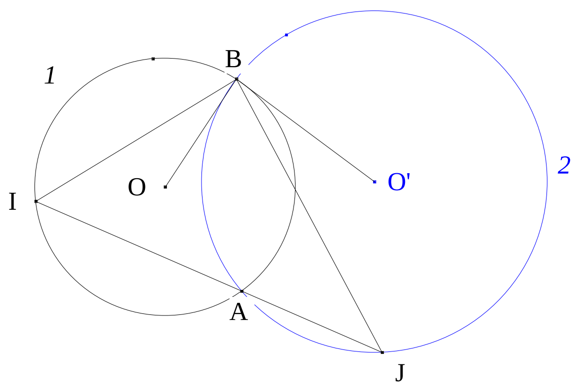


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
A', B', C' trois points de 0 tels que (AA'), (BB') et (CC') soient parallèles entre elles,
M un point,
et P, Q, R les point d'intersection de (MA') et (BC), (MB') et (CA), (MC') et (AB).

Donné : M est sur 0 *si, et seulement si,* (PQR) est une ménélienne de ABC, parallèle à (AA').

Scolie : la visualisation nécessaire est de Paul Aubert[64] et suffisante de M'Kensie[65].

2. Un triangle de Möbius [66]



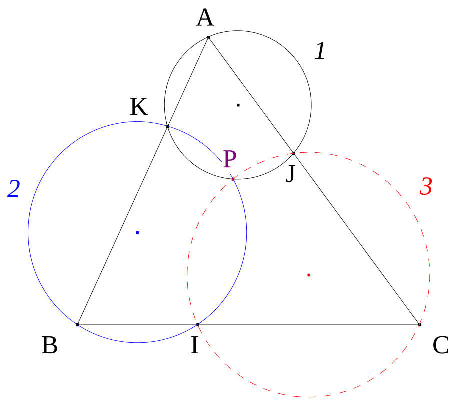
Traits : 1, 2 deux cercles sécants,
O, O' les centres resp. de 1, 2,
A, B les points d'intersection de 1 et 2,
et (IBJ) une monienne brisée.

Donné : (IAJ) est une monienne *si, et seulement si,* <IBJ = <OBO'.

Scolie : BIJ est un triangle de Möbius.

3. Le théorème du pivot [67]

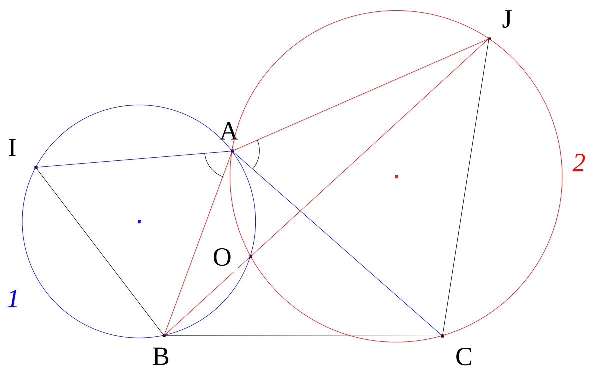
64 Aubert P., Généralisation du problème de Pascal donnant neuf points en ligne droite, *Nouvelles Annales* (1899).
65 M'Kensie, *Journal de Mathématiques Spéciales* de Longchamps (1887) 201.
66 Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à Möbius.



Traits : *1, 2, 3* trois cercles sécants deux à deux,
K, P les points d'intersection de *1* et *2*,
I l'un des points d'intersection de *2* et *3*,
J l'un des points d'intersection de *3* et *1*,
A un point de *1*,
B le second point d'intersection de la monienne (AK) avec *2*
et C le second point d'intersection de la monienne (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

4. Rotation d'un triangle [68]



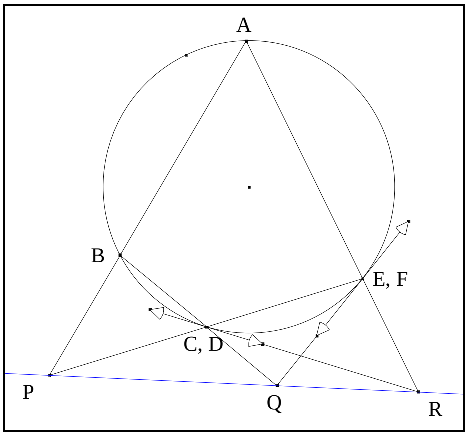
Traits : ABC un triangle,
AIB le triangle A-isocèle, extérieur à ABC,
ACJ le triangle A-isocèle, semblable à AIB, extérieur à ABC,
1, 2 les cercles circonscrits resp. à AIB, ACJ
et O le second point d'intersection de *1* et *2* .

Donné : B, O et J sont alignés.

5. Tetragramma mysticum [69]

---

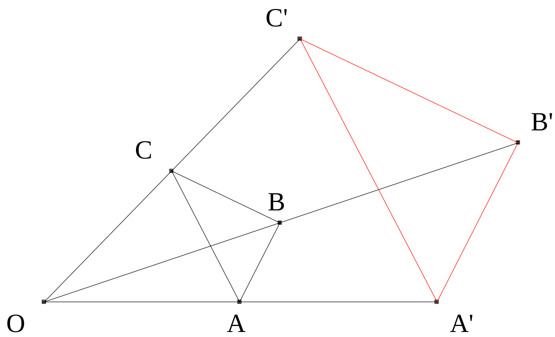
[67] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.
[68] Descartes.
[69] MacLaurin Colin, *Traité des Fluxions*, Appendice (1748) § 36.



Traits :	*0*	un cercle,
	ABCEA	un quadrilatère tels que les points A, C, E soient sur *0*,
	Tc, *Te*	les tangentes à *0* resp. en C, E
et	P, Q, R	les points d'intersection resp. de (AB) et (CE), (BC) et *Te*, *Tc* et (EA).

Donné : B est sur *0* *si, et seulement si,* P, Q et R sont alignés.

6. Le théorème faible de Desargues

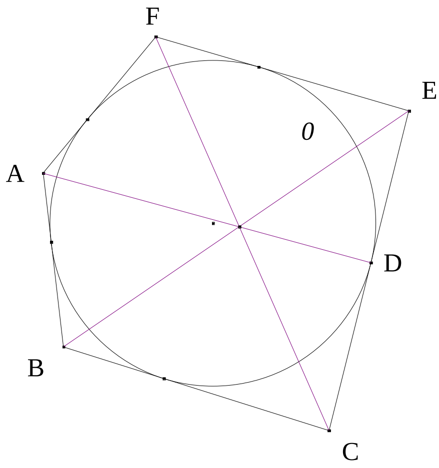


Traits :	ABC	un triangle,		
et	A'B'C'	un triangle tel que	(1)	(AA') et (BB') soient concourantes en O
			(2)	(AB) soit parallèle à (A'B')
			(3)	(BC) soit parallèle à (B'C')

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').

7. Un pentagone tangentiel[70]

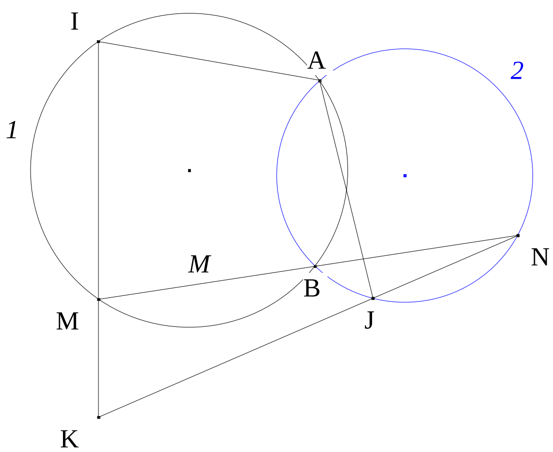
[70] Carnot, *De la corrélation des figures de Géométrie*, 1801, p. 455-456.



Traits :		
	0	un cercle
	ABCEF	un pentagone circonscrit à *0*
et	D	le point de contact de [CE] avec *0*.

Donné : les diagonales (AD), (BE) et (CF) sont concourantes.

8. Une monienne brisée[71]

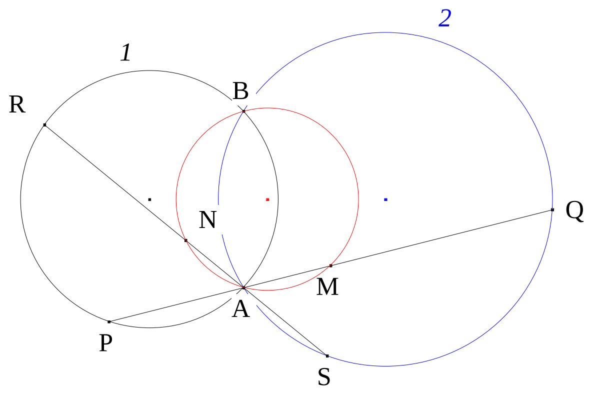


Traits :		
	1, *2*	deux cercles sécants
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	I, J	deux points resp. de *1*, *2* tels que (IAJ) soit une monienne brisée en A,
	M	une monienne passant par B,
	M, N	les points d'intersection de *M* resp. avec *1*, *2*
et	K	le point d'intersection de (IM) et (JN).

Donné : I, A, J et K sont cocycliques.

9. The midcircle

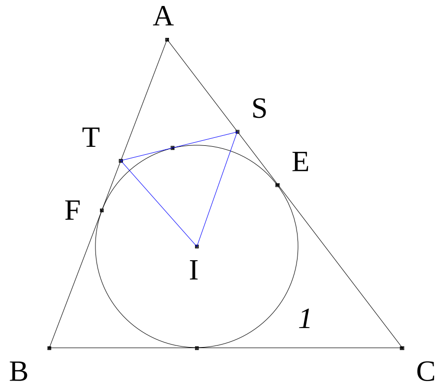
[71] Ayme J.-L., Une tangente ou le théorème de Reim dans tous ses états ; Appendice, G. G. G. vol. **7** ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/.



Features : *1*, *2* two intersecting circles,
A, B the points of intersection of *1* and *2*,
P, R two points on *1*,
Q, S the second points of intersection of AP, AR with *2* resp.,
et M, N the midpoints of the segment PQ, RS resp..

Given : M, N, A et B are concyclic.

10. L'angle au centre constant [72]

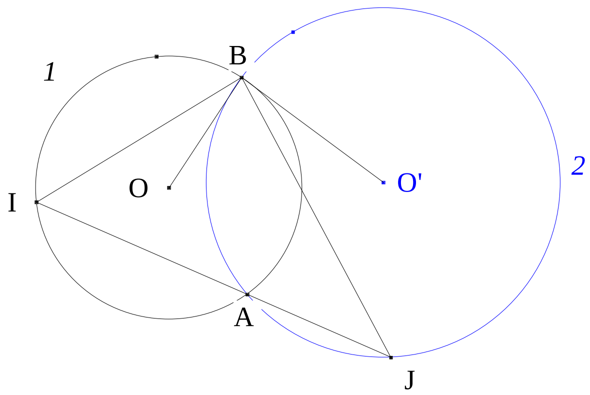


Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
I le centre de *1*,
E, F les points de contact de *1* avec [AC], [AB],
T un point du segment [AF]
et S un point du segment [AE].

Donné : (ST) est tangente à *1* *si, et seulement si,* <SIT = Π/2 –A/2.

11. Un triangle de Möbius [73]

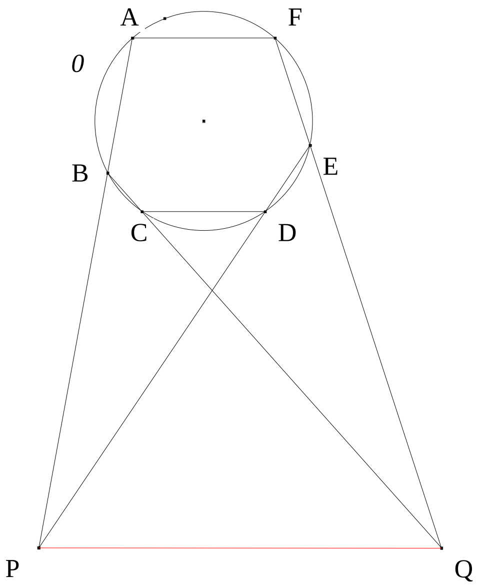
[72] Poncelet J. V., n° **462-463**, *Propriétés Projectives*, Seconde édition (1866).
[73] Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à Möbius.



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
O, O' les centres resp. de *1*, *2*,
A, B les points d'intersection de *1* et *2*,
et (IBJ) une monienne brisée.

Donné : (IAJ) est une monienne *si, et seulement si,* <IBJ = <OBO'.

12. L'équivalence d'Aubert [74]



Traits : *1* un cercle,
ABCDE un pentagone inscrit dans *1*,
F un point tel que (AF) soit parallèle à (CD)
et P, Q les points d'intersection de (AB) et (DE), de (BC) et (EF).

Donné : F est sur *1* *si, et seulement si*, (PQ) est parallèle à (AF).

D. ÉTYMOLOGIE DE CARRÉ

[74] La condition nécessaire est de Paul Aubert.

Il vient du latin *quadratus*, devenu quarré ou *carrez* en moyen français, et enfin *carré* depuis l'époque moderne.
Les Grecs utilisaient le mot *tétragone* comme Euclide d'Alexandrie dans ses *Éléments* [75].
Sa traduction en anglais *square* vient du latin *ex* i.e. hors de et de *quadrare* i.e. rendre carré en passant par le vieux français et a été utilisé en premier comme un outil pour mesurer les angles droits.

[75] Euclide, Livre **I**, proposition 47.