

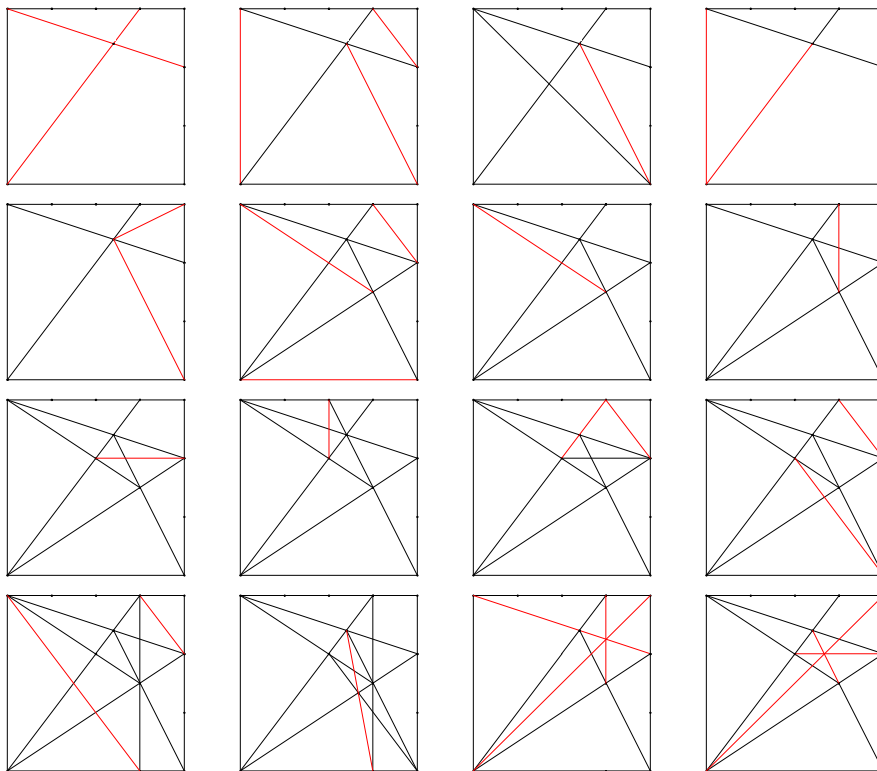
MOSAÏQUES

DANS

UN CARRÉ



Jean - Louis AYME ¹



Résumé. L'auteur propose 16 mosaïques inscrites dans un carré et présentées ligne après ligne en les parcourant de gauche à droite.
Cette présentation originale où chaque nouvelle mosaïque prend en compte la précédente, ouvre au lecteur la possibilité d'un autre enchaînement auquel il pourra peut-être ajouter d'autres mosaïques...
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author proposes 16 mosaics inscribed in a square and presented line by line through from left to right. This original presentation where each new mosaic takes into account the previous, opens to the reader the possibility of another sequence to which it may be able to add other mosaics...

¹ St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/10/2013

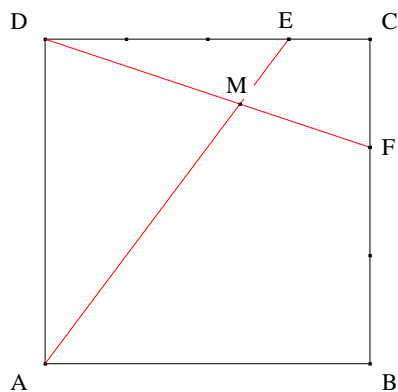
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

Sommaire	
A. La mosaïque de base	3
B. Des mosaïques	4
1. Trois droites concourantes	
2. Une médiane	
3. Un triangle isocèle	
4. Un triangle rectangle	
5. Trois autres droites concourantes	
6. Une autre médiane	
7. Une relation	
8. Une autre bissectrice intérieure	
9. Une autre relation	
10. Deux parallèles	
11. Un autre triangle isocèle	
12. Deux autres parallèles	
13. Encore deux parallèles	
14. Intersection sur un côté	
15. Encore trois droites concourantes	
C. Bonus	22
1. Une bissectrice intérieure	
2. Encore trois droites concourantes	
3. Évaluation d'un angle	
4. Cinq points cocycliques	
D. Lexique Français-Anglais	25

A. LA MOSAÏQUE DE BASE

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré,
 E le point de [CD] tel que $DE = 3 \cdot EC$,
 F le point de [BC] tel que $BF = 2 \cdot FC$
 et M le point d'intersection de (AE) et (DF).

Rappel : la mosaïque est un art décoratif où l'on utilise des fragments de pierre colorée, assemblés à l'aide d'enduit, pour former des figures. Ces fragments sont appelés des *tesselles*.

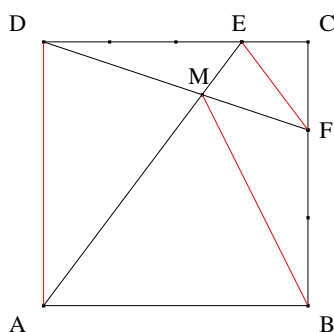
B. DES MOSAÏQUES

Avertissement : les hypothèses et notations sont stables de mosaïque en mosaïque.

1. Trois droites concourantes

VISION

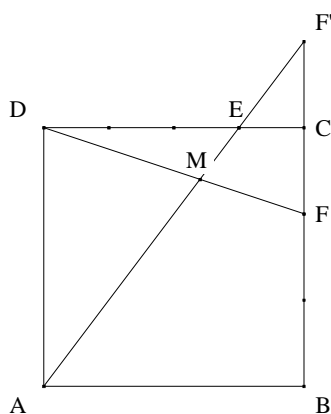
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes qu'en **A**.

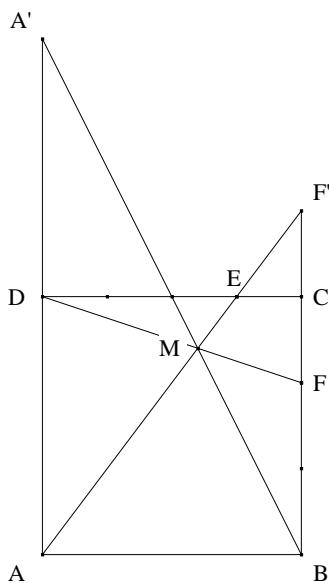
Donné : (AD), (BM) et (EF) sont concourantes.²

VISUALISATION

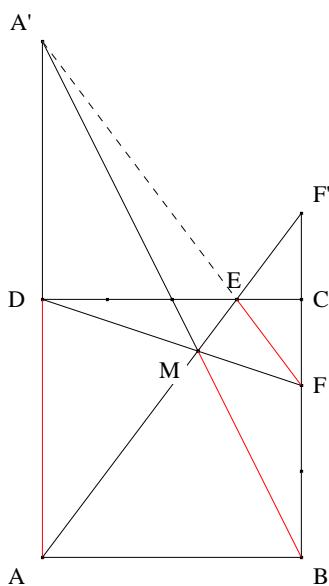


- Notons F' le point d'intersection de (AME) et (BC).
- D'après Thalès "Rapports" appliqué à la bande de frontières (AD) et (BC), et aux transversales (AEF') et (CD), F' est le symétrique de F par rapport à C.

² Ayme J.-L., Square and concurrence, AoPS du 05/10/2013 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557012>



- Notons A' le point d'intersection de (BM) et (AD) .
- D'après Thalès "Rapports" appliqué à la bande de frontières (AD) et (BC) , et aux transversales (AMF') , (BMA') et (FMD) , A' est le symétrique de A par rapport à D .

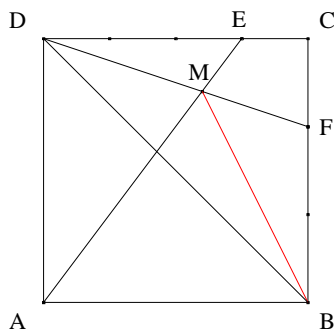


- D'après Thalès "Rapports" appliqué à la bande de frontières (AD) et (BC) , C, D étant les milieux resp. de $[FF']$, $[AA']$, F, E et A' sont alignés.
- **Conclusion :** (AD) , (BM) et (EF) sont concourantes.

2. Une médiane

VISION

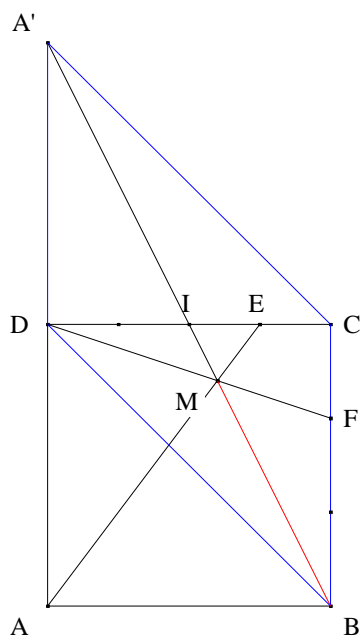
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : (BM) est la B-médiane du triangle BCD.³

VISUALISATION



- Notons I le point d'intersection de (BMA') et (CD) .
- Le quadrilatère $A'DBC$ ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme.
- **Conclusion :** I est le milieu de $[CD]$.

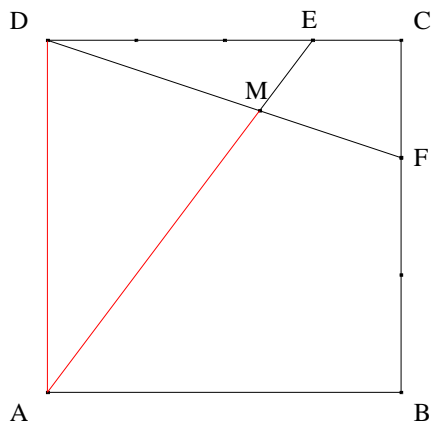
³

Ayme J.-L.

3. Un triangle isocèle

VISION

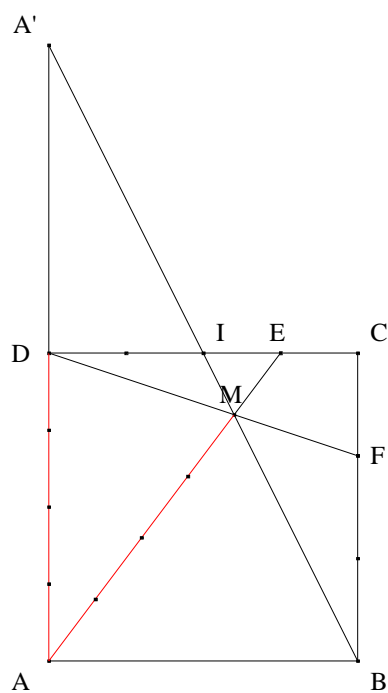
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : le triangle ADM est A-isocèle.⁴

VISUALISATION



- ADE étant A-rectangle et ayant pour côtés 3-4-5, est de Pythagore.
- D'après "Le théorème de Ménélaüs"

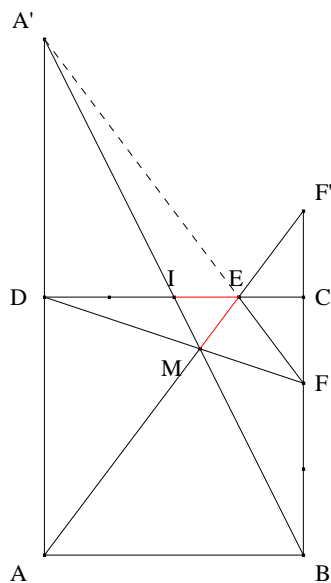
⁴ Nicula V. (Bradenton, Floride, États-Unis), A square and the value of an angle, AoPS du 20/10/2012 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=503255>

appliqué au triangle ADE et à la ménélienne (A'M),
en conséquence,

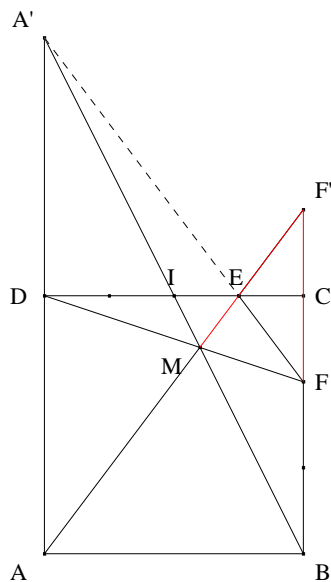
$$\begin{aligned} MA &= 4 \cdot ME ; \\ MA &= AD. \end{aligned}$$

- **Conclusion :** le triangle ADM est A-isocèle.

Solies : (1) le triangle EIM est E-isocèle



(2) le triangle F'FM est F'-isocèle.



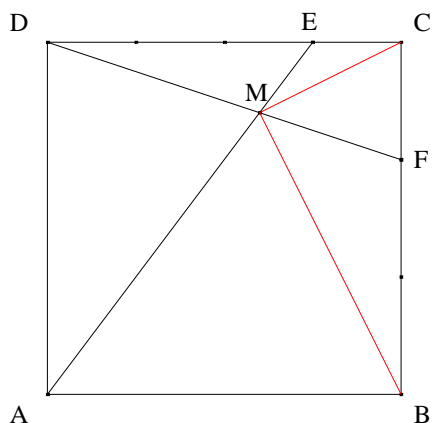
Note historique :

dans la littérature de la Géométrie, le triangle rectangle 3-4-5 est dit de Pythagore. Il est aussi connu sous les noms d'Isis ou isiaque ou sacré, et des arpenteurs. Il apparaît sur des tablettes babyloniennes et est attesté dans quatre des sections du papyrus *Rhind* (R57, R58, R59a et R59b). Les architectes égyptiens, assistés de tendeurs de corde, traçaient leurs angles droits au moyen de ce *triangle égyptien*.

4. Un triangle rectangle

VISION

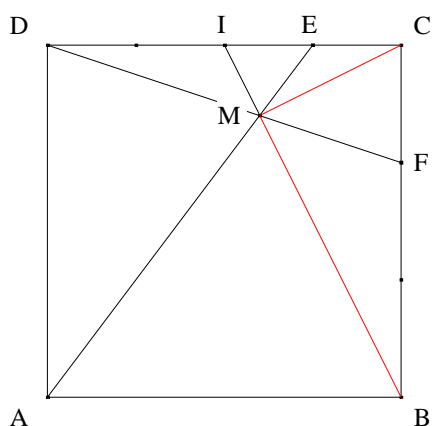
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : le triangle MBC est M-rectangle.⁵

VISUALISATION



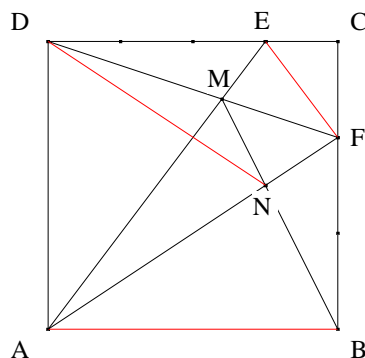
- D'après B, M et I sont alignés
- D'après Problème 2,
d'après Problème 3, $EC = EI$;
 $EI = EM$.
- D'après Thalès "Triangle inscritible dans un demi cercle", le triangle MCI est M-rectangle.
- D'après Problème 2, B, M et I sont alignés.
- **Conclusion :** le triangle MBC est M-rectangle.

⁵ Ayme J.-L., A rectangular triangle, AoPS du 07/10/2013 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=557322>

5. Trois autres droites concourantes

VISION

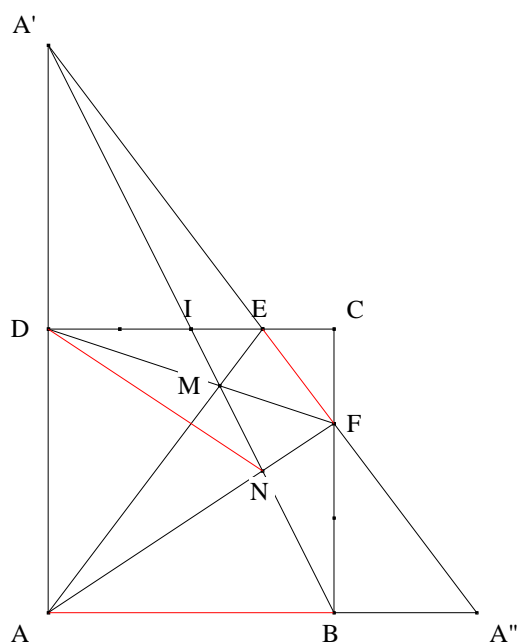
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons le point d'intersection de (BM) et (AF).

Donné : (AB), (DN) et (EF) sont concourantes.⁶

VISUALISATION

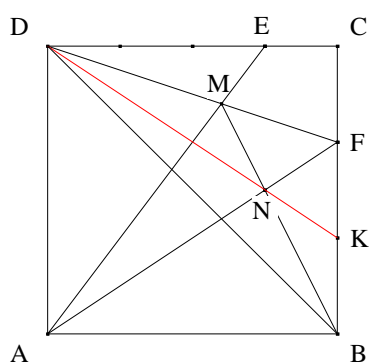


- Notons A'' le point d'intersection de (EF) et (AB).
- D'après **B. 1** et **2**, par hypothèse, d'après l'axiome d'incidence **Ia**,

B, M, I et A'	sont alignés ;
B, M et N	sont alignés ;
B, M, N, I et A'	sont alignés

⁶ Ayme J.-L., Square and concurrence **II**, AoPS du 05/10/2013 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557023>

VISUALISATION

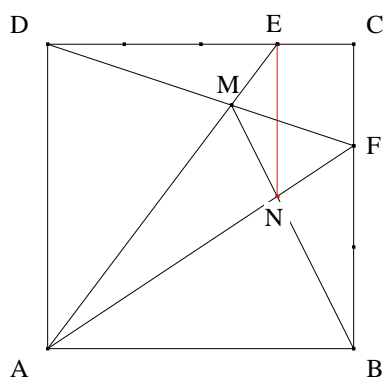


- **Conclusion :** ce résultat est dans la preuve du Problème 5.

7. Une relation

VISION

Figure :

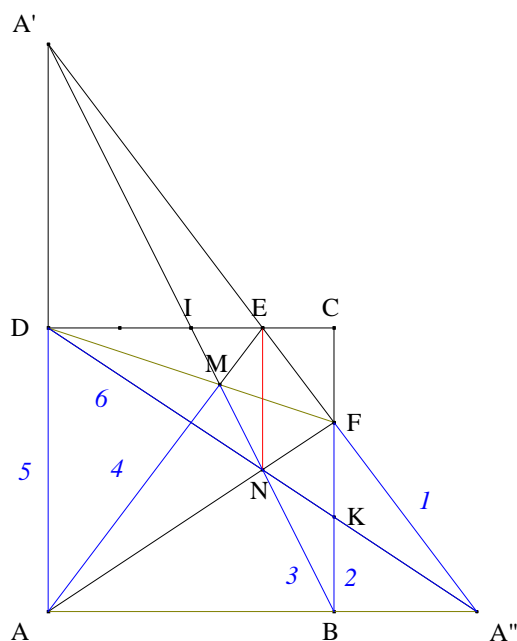


Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : $2 \cdot EN = AB$.⁸

VISUALISATION

⁸ Ayme J.-L., A relation in a square, AoPS du 05/10/2013 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557017>



- D'après Pappus "La proposition 139"⁹
appliqué à l'hexagone A"FBMADA" de frontières (AA") et (DF), la pappusienne (EN) // (AD).
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle A'AA",
D étant le milieu de [A'A], E est le milieu de [A'A"].
- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle A'A"D,
E étant le milieu de [A'A"], (1) N est le milieu de [A"D]
- (2) $2 \cdot EN = A'D$.
- D étant le milieu de [A'A],
par hypothèse, $A'D = AD$;
 $AD = AB$.
- **Conclusion** : par transitivité de la relation =, $2 \cdot EN = AB$.

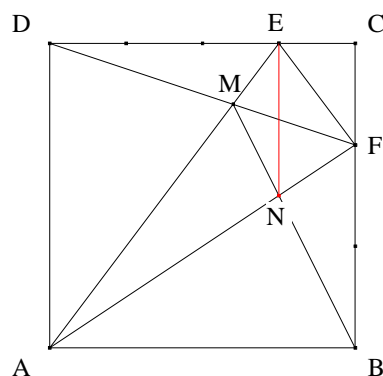
⁹

Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. 6, p. 9 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>

8. Une autre bissectrice intérieure

VISION

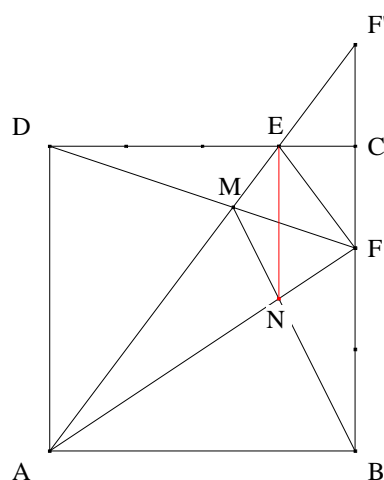
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : (EN) est la E-bissectrice intérieure du triangle AEF.¹⁰

VISUALISATION



- C étant le milieu de [FF'], le quaterne (F, F', C, ∞) est harmonique¹¹ ; en conséquence, le pinceau $(M ; F, F', C, N)$ est harmonique.
- **Conclusion :** ce pinceau ayant deux rayons perpendiculaires, (EN) est la E-bissectrice intérieure du triangle AEF.

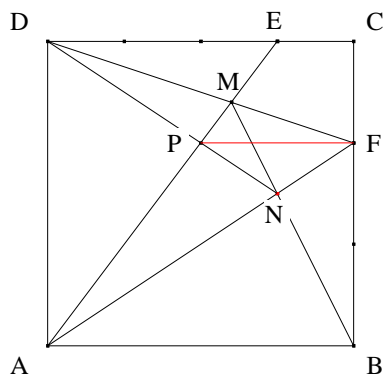
¹⁰ Ayme J.-L., A relation in a square, AoPS du 05/10/2013 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557017>

¹¹ ∞ signifie point à l'infini sur (BC)

9. Une autre relation

VISION

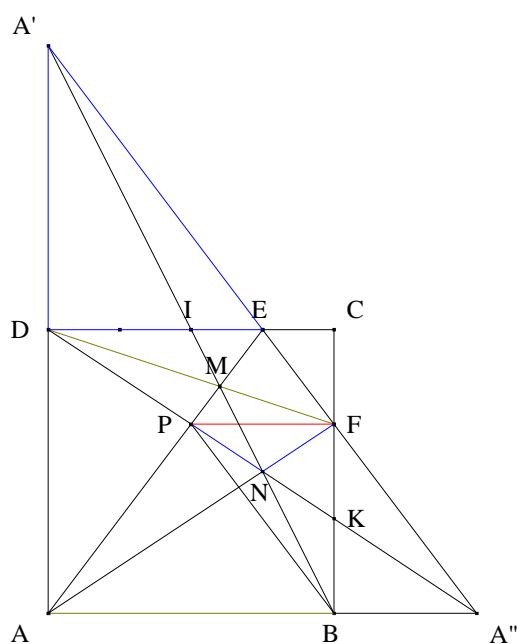
Figure :



Traits : P aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons le point d'intersection de (AE) et (DN).

Donné : $2.PF = AB$.

VISUALISATION



- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles"¹² appliqué aux triangles à PFN et EDA', l'arguésienne (AA'') étant parallèle à (DE), $(PF) \parallel (AB)$.
- D'après l'axiome de passage **IIIa**, appliqué à la bande de frontières (PF) et (AA''), K étant le milieu de [BF], K est le milieu de [PA''].

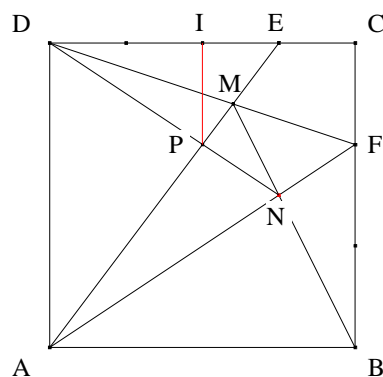
¹² Ayme J.L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6, p. 39 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>

- Le quadrilatère BPFA" étant un parallélogramme, $2.PF = 2.BA''$;
d'après Thalès "La droite des milieu" appliqué au triangle A'BA", $2.BA'' = 4.IE$.
- **Conclusion** : par transitivité de la relation = et par hypothèse, $2.PF = AB$.

10. Deux parallèles

VISION

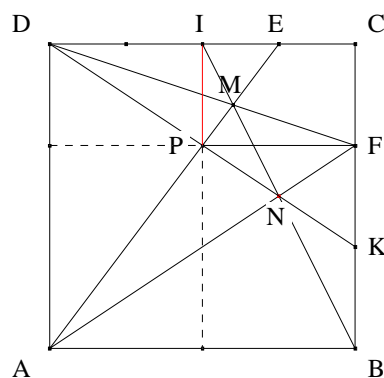
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons le point d'intersection de (AE) et (DN).

Donné : (IP) est parallèle à (AD) et $2.IP = AD$.

VISUALISATION



- Prolongeons (IP) et (PF) comme indiqué sur la figure.
- D'après Pappus "Hexagone avec deux points à l'infini"¹³, $(IP) // (AD)$
- **Conclusion** : d'après Thalès "La droite des milieux"
appliqué au triangle CDK,

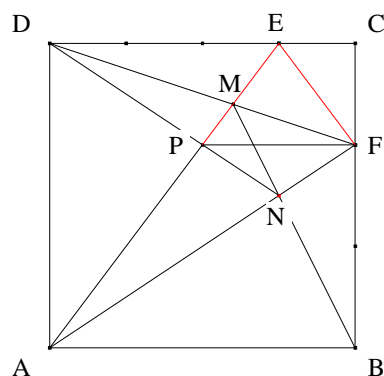
(1)	(IP) est parallèle à (AD)
(2)	$2.IP = BC (= AD)$.

¹³ Ayme J.L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6, p. 19-22 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>

11. Un autre triangle isocèle

VISION

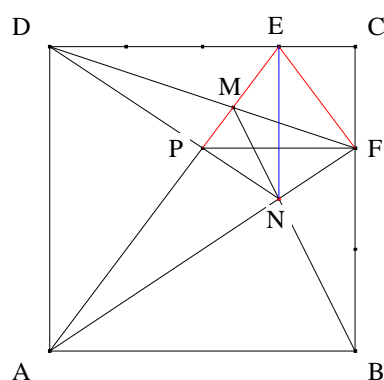
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : le triangle EPF est E-isocèle. ¹⁴

VISUALISATION



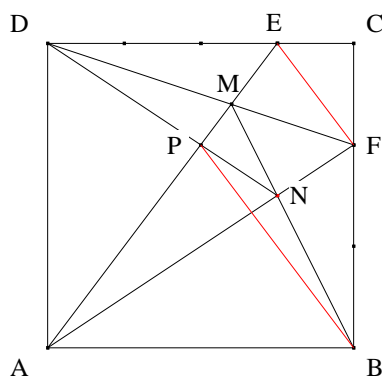
- D'après Problème 8, (EN) est la E-bissectrice intérieure du triangle PEF.
- D'après Problème 7 et 9, (EN) est la E-hauteur du triangle PEF.
- **Conclusion :** le triangle EPF est E-isocèle.

¹⁴ Ayme J.-L., An isocoles triangle in a square, AoPS du 07/10/2013 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557324>

12. Deux autres parallèles

VISION

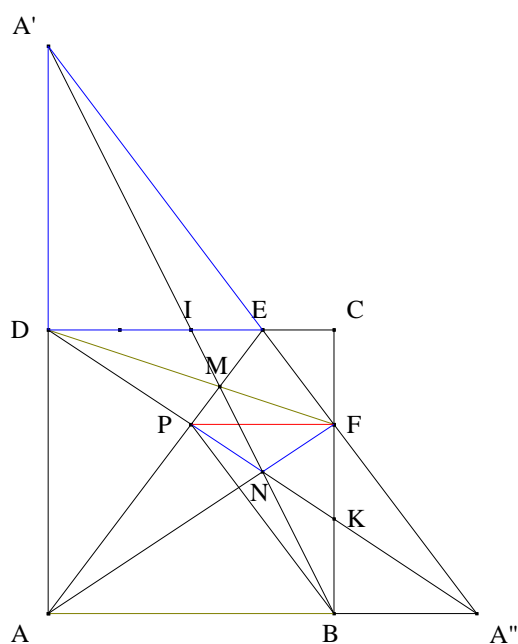
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : (BP) est parallèle à (EF) .¹⁵

VISUALISATION



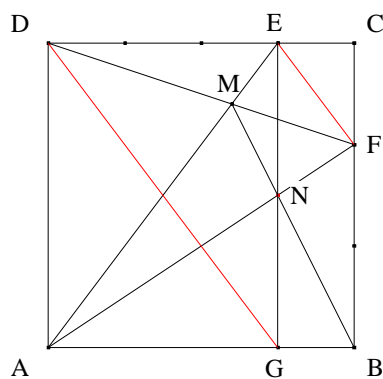
- D'après 9, $BPFA''$ est un parallélogramme.
- **Conclusion :** (BP) est parallèle à (EF) .

¹⁵ Ayme J.-L., Two parallels in a square, AoPS du 07/10/2013 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557323>

13. Encore deux parallèles

VISION

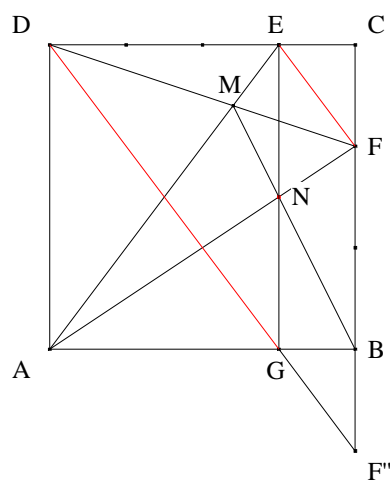
Figure :



Traits : G aux hypothèses et notations précédentes
le point d'intersection de (EN) et (AB).

Donné : (DG) est parallèle à (EF).¹⁶

VISUALISATION



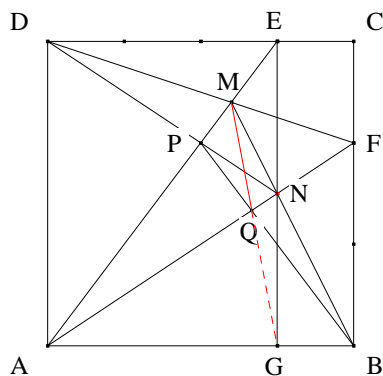
- Notons F'' le point d'intersection de (DG) et (BC).
- D'après Problème 1, $BF'' = CF$.
- Nous avons : $EC/ED = 1/4$ et $FC/FF'' = 1/4$.
- **Conclusion :** d'après Thalès "Rapports", (DG) est parallèle à (EF).

¹⁶ Ayme J.-L.

14. Intersection sur un côté

VISION

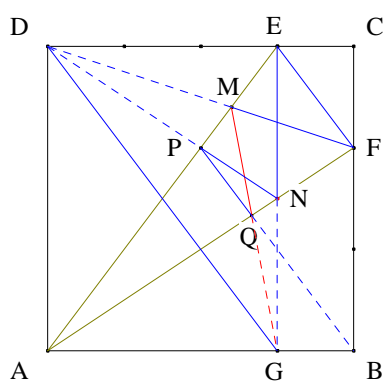
Figure :



Traits : Q aux hypothèses et notations, nous ajoutons le point d'intersection de (AF) et (BP).

Donné : M, Q et G sont alignés.

VISUALISATION



- **Conclusion :** d'après Pappus "Le petit théorème"¹⁷ (DG) étant la pappusienne de l'hexagone PQMFENP inscrit dans le secteur de frontières (AF) et (AE),

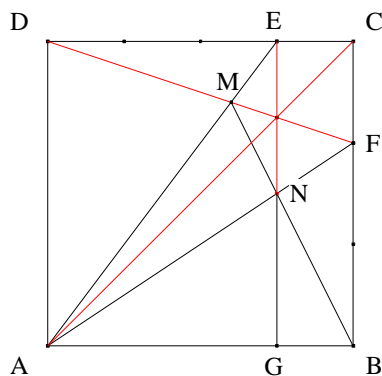
M, Q et G sont alignés.

¹⁷ Ayme J.L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6, p. 2-5 ; <http://perso.orange.fr/jl.ayme>

15. Encore trois droites concourantes

VISION

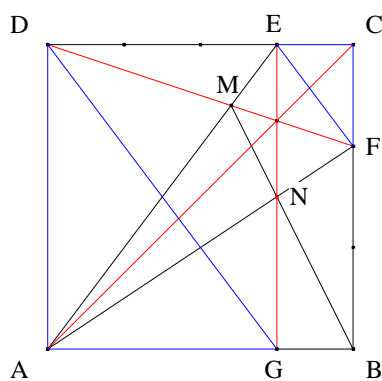
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : (AC), (EN) et (DF) sont concourantes.

VISUALISATION



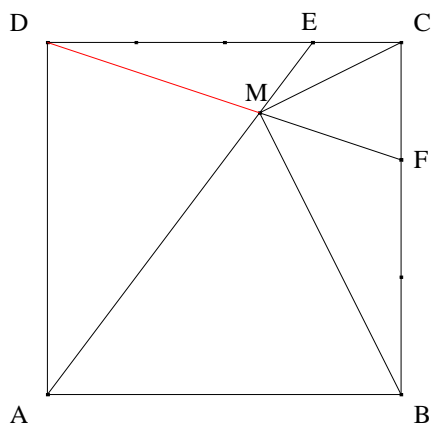
- Les triangles AGD et CEF sont homothétiques.
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible" appliqué à AGD et CEF, (AC), (GNE) et (DF) sont concourantes.

C. BONUS

1. Une bissectrice intérieure

VISION

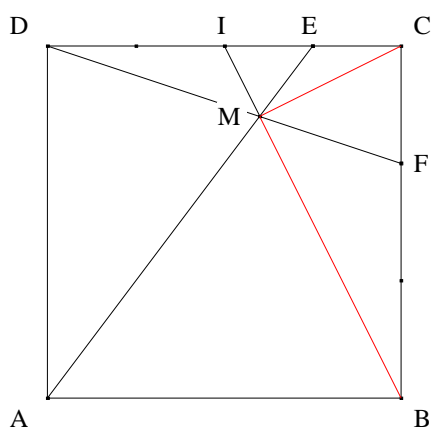
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : (DM) est la M-bissectrice intérieure du triangle MBC.¹⁸

VISUALISATION



- Les triangles MBC et CBI étant semblables $MB/MC = CB/CI (= 2)$.
- Par hypothèse, $FB/FC = 2$.
- D'après "Le théorème de la bissectrice intérieure", (MF) est la M-bissectrice intérieure de MBC
- **Conclusion :** (DM) est la M-bissectrice intérieure du triangle MBC.

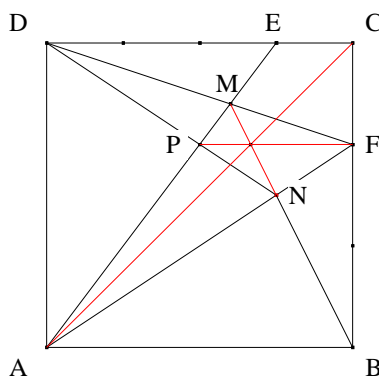
¹⁸ Nicula V., A square and the value of an angle, AoPS du 20/10/2012 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=503255>

Scolie : $\angle CMF = 45^\circ$.

2. Encore trois droites concourantes

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

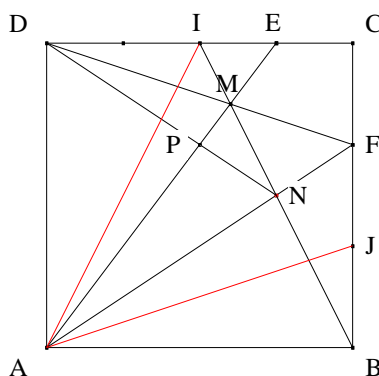
Donné : (AC), (MN) et (PF) concourantes.

Commentaire : la preuve est laissée aux lecteurs.

3. Évaluation d'un angle

VISION

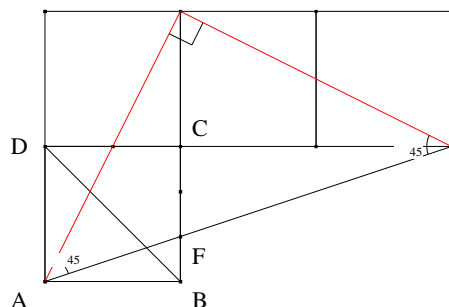
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
 J le milieu de [BF].

Donné : évaluer $\angle IAJ$.¹⁹

Commentaire : un schéma de preuve

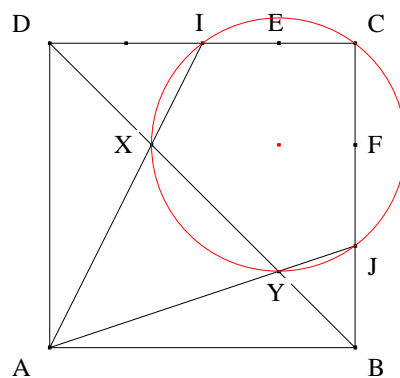


1. CUVF the outer square of ABCD
2. CRSU the outer double square of CUVF
3. the triangle UAR is U-right isocèles
and we are done...

4. Cinq points cocycliques

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
X, Y les points d'intersection de (BD) resp. avec (AI), (BJ).

Donné : X, Y, I, J et C sont cocycliques.²⁰

Commentaire : la preuve est laissée au lecteur.

¹⁹ Ayme J.-L., Evaluation of an angle, AoPS du 08/10/2013 ; <https://artofproblemsolving.com/community/q1h557454p3240346>
Petit problème, *Les-Mathematiques.net* ; <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,2126968>

²⁰ Five concyclic points, AoPS du 08/10/2013 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557462>

C. LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A			N	
aligné	collinear		Notons	name
annexe	annex		nécessaire	necessary
axiome	axiom		note historique	historic note
appendice	appendix		O	
adjoint	associate		orthocentre	orthocenter
a propos	by the way btw		ou encore	otherwise
acutangle	acute angle		P	
axiome	axiom		parallèle	parallel
B			parallèles entre elles	parallel to each other
bissectrice	bisector		parallélogramme	parallelogram
bande	strip		pédal	pedal
C			perpendiculaire	perpendicular
centre	incenter		pied	foot
centre du cercle circonscrit	circumcenter		point de vue	point of view
cercle circonscrit	circumcircle		postulat	postulate
cévienne	cevian		point	point
colinéaire	collinear		pour tout	for any
concourance	concurrence		Q	
coincide	coincide		quadrilatère	quadrilateral
confondu	coincident		R	
côté	side		remerciements	thanks
par conséquence	consequently		reconnaissance	acknowledgement
commentaire	comment		respectivement	respectively
D			rapport	ratio
d'après	according to		répertorié	to index
donc	therefore		S	
droite	line		semblable	similar
d'où	hence		sens	clockwise in this
distinct de	different from		order	
E			segment	segment
extérieur	external		Sommaire	summary
F			symédiane	symmedian
figure	figure		suffisante	sufficient
H			sommet (s)	vertex (vertice)
hauteur	altitude		T	
hypothèse	hypothesis		trapèze	trapezium
I			tel que	such as
intérieur	internal		théorème	theorem
identique	identical		triangle	triangle
i.e.	namely		triangle de contact	contact triangle
incidence	incidence		triangle rectangle	right-angle triangle
L				
lemme	lemma			
lisibilité	legibility			
M				
mediane	median			
médiatrice	perpendicular bissector			
milieu	midpoint			