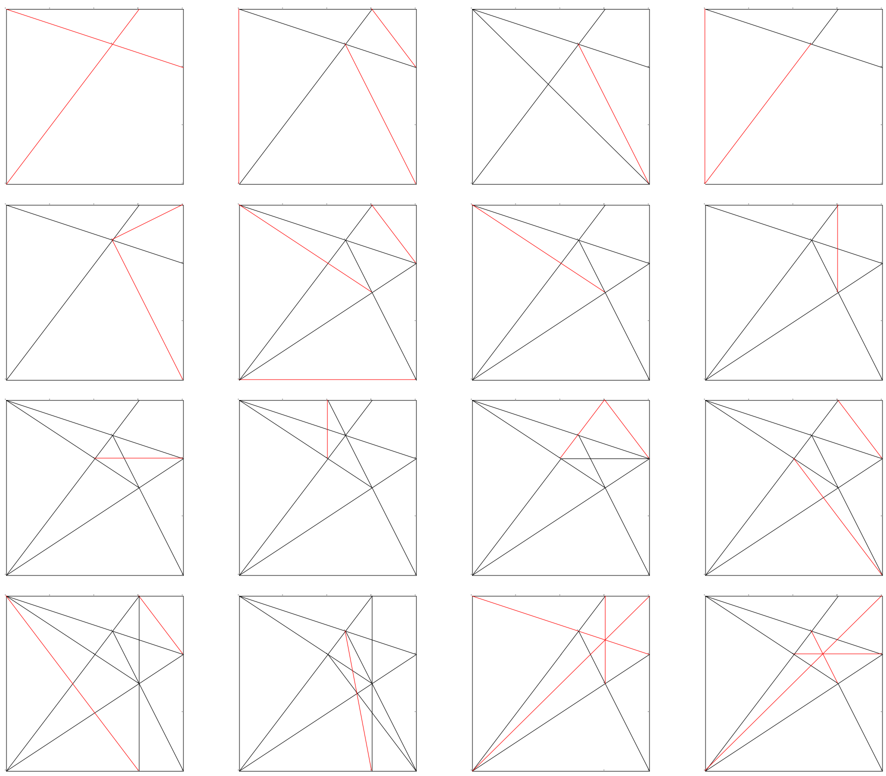
MOSAÏQUES

DANS

UN CARRÉ

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur propose 16 mosaïques inscrites dans un carré et présentées ligne après ligne en les parcourant de gauche à droite.
Cette présentation originale où chaque nouvelle mosaïque prend en compte la précédente, ouvre au lecteur la possibilité d'un autre enchaînement auquel il pourra peut-être ajouter d'autres mosaïques…
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author proposes 16 mosaics inscribed in a square and presented line by line through from left to right. This original presentation where each new mosaic takes into account the previous, opens to the reader the possibility of another sequence to which it may be able to add other mosaics...
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

---

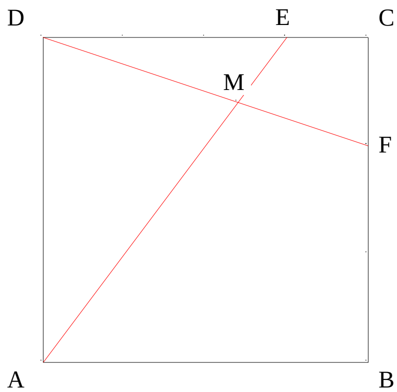
[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/10/2013

Sommaire

A. LA MOSAÏQUE DE BASE

VISION

Figure :



Traits : ABCD un carré,
E le point de [CD] tel que DE = 3.EC,
F le point de [BC] tel que BF = 2.FC
et M le point d'intersection de (AE) et (DF).

Rappel : la mosaïque est un art décoratif où l'on utilise des fragments de pierre colorée, assemblés à l'aide d'enduit, pour former des figures. Ces fragments sont appelés des *tesselles*.

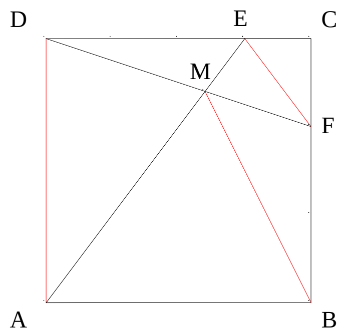
B. DES MOSAÏQUES

Avertissement : les hypothèses et notations sont stables de mosaïque en mosaïque.

1. Trois droites concourantes

VISION

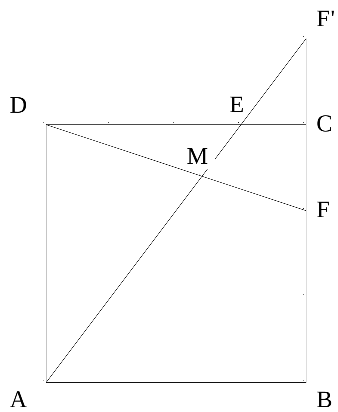
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes qu'en **A.**

Donné : (AD), (BM) et (EF) sont concourantes. [2]

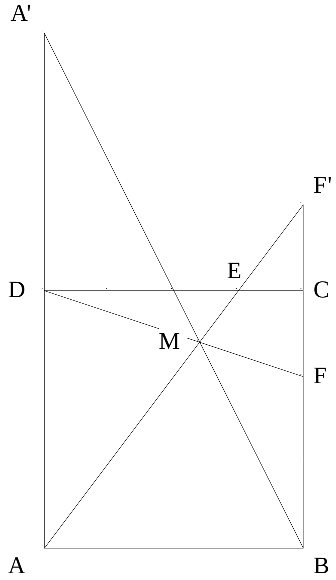
VISUALISATION



- Notons F' le point d'intersection de (AME) et (BC).

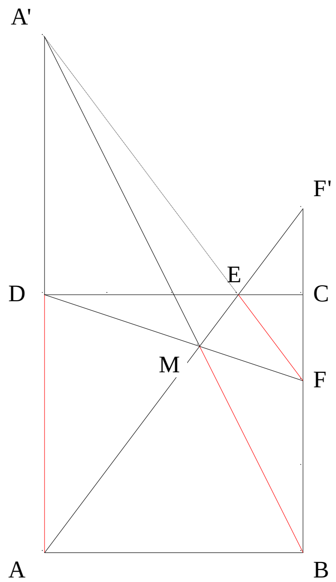
- D'après Thalès "Rapports"
  appliqué à la bande de frontières (AD) et (BC),
  et aux transversales (AEF') et (CD), F' est le symétrique de F par rapport à C.

[2] Ayme J.-L., Square and concurrence, AoPS du 05/10/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557012



- Notons A' le point d'intersection de (BM) et (AD).

- D'après Thalès "Rapports"
  appliqué à la bande de frontières (AD) et (BC),
  et aux transversales (AMF'), (BMA') et (FMD), A' est le symétrique de A par rapport à D.



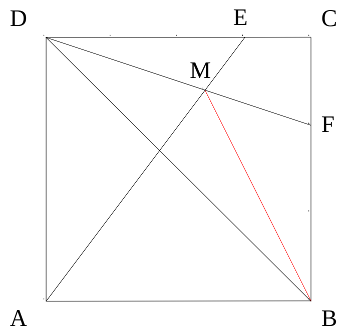
- D'après Thalès "Rapports"
  appliqué à la bande de frontières (AD) et (BC),
  C, D étant les milieux resp. de [FF'], [AA'], F, E et A' sont alignés.

- **Conclusion :** (AD), (BM) et (EF) sont concourantes.

2. Une médiane

VISION

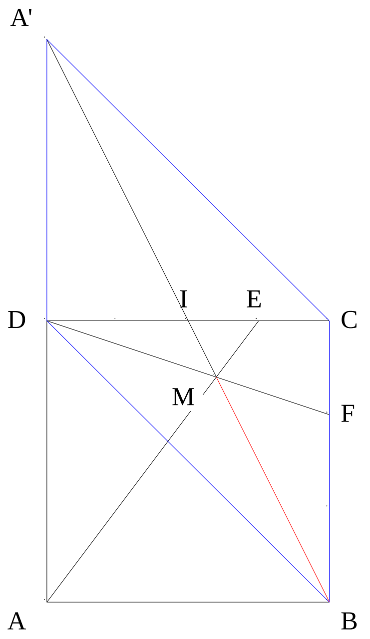
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : (BM) est la B-médiane du triangle BCD. [3]

VISUALISATION



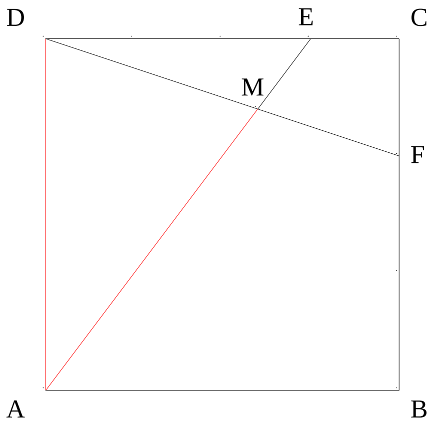
- Notons I le point d'intersection de (BMA') et (CD).
- Le quadrilatère A'DBC ayant deux côtés opposés parallèles et égaux, est un parallélogramme.
- **Conclusion :** I est le milieu de [CD].

[3] Ayme J.-L.

3. Un triangle isocèle

VISION

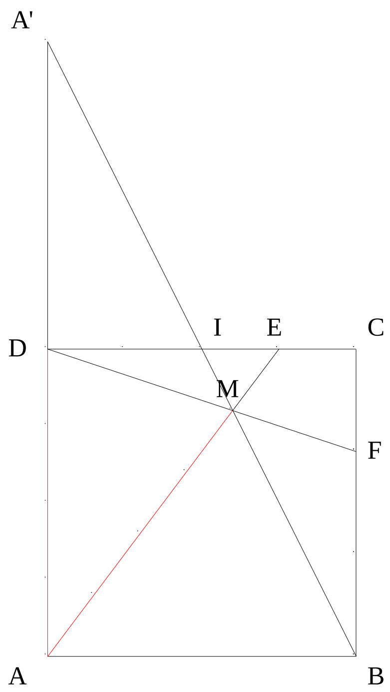
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : le triangle ADM est A-isocèle. [4]

VISUALISATION



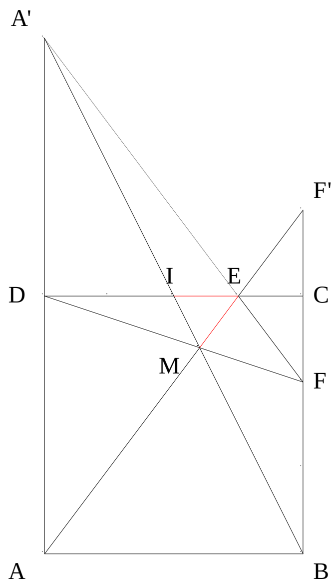
- ADE étant A-rectangle et ayant pour côtés 3-4-5, est de Pythagore.
- D'après "Le théorème de Ménélaüs"

[4] Nicula V. (Bradenton, Floride, États-Unis), A square and the value of an angle, AoPS du 20/10/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=503255

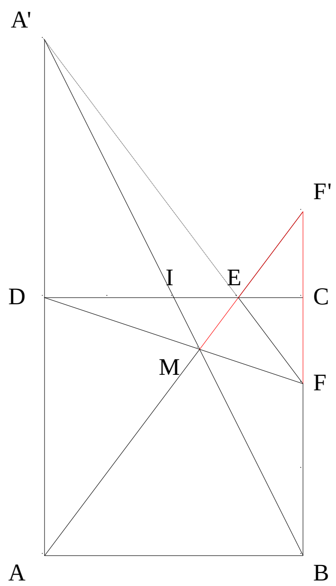
appliqué au triangle ADE et à la ménélienne (A'IM), MA = 4.ME ;
en conséquence, MA = AD.

- **Conclusion :** le triangle ADM est A-isocèle.

Scolies : **(1)** le triangle EIM est E-isocèle



(2) le triangle F'FM est F'-isocèle.

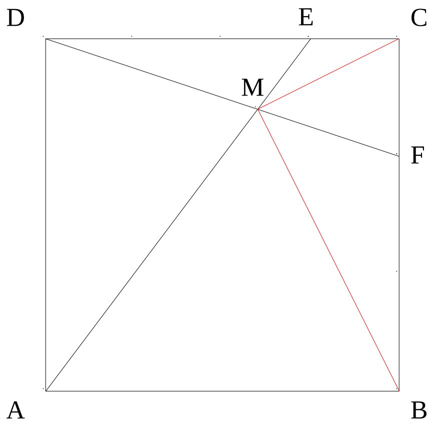


Note historique : dans la littérature de la Géométrie, le triangle rectangle 3-4-5 est dit de Pythagore.
Il est aussi connu sous les noms d'Isis ou isiaque ou sacré, et des arpenteurs.
Il apparaît sur des tablettes babyloniennes et est attesté dans quatre des sections du papyrus *Rhind* (R57, R58, R59a et R59b).
Les architectes égyptiens, assistés de tendeurs de corde, traçaient leurs angles droits au moyen de ce *triangle égyptien*.

4. Un triangle rectangle

VISION

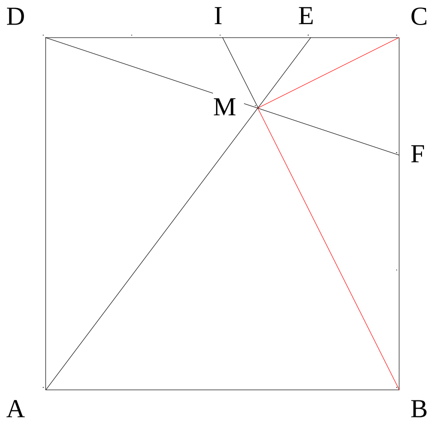
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : le triangle MBC est M-rectangle. [5]

VISUALISATION



- D'après B, M et I sont alignés
- D'après Problème **2**, EC = EI ;
  d'après Problème **3**, EI = EM.
- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", le triangle MCI est M-rectangle.
- D'après Problème **2**, B, M et I sont alignés.
- **Conclusion :** le triangle MBC est M-rectangle.

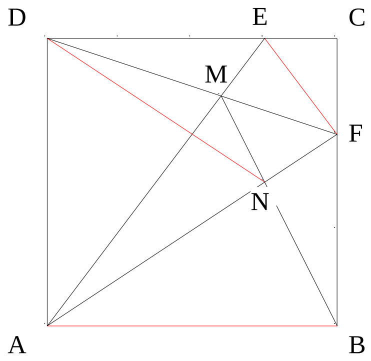
---

5 Ayme J.-L., A rectangular triangle, AoPS du 07/10/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=557322

5. Trois autres droites concourantes

VISION

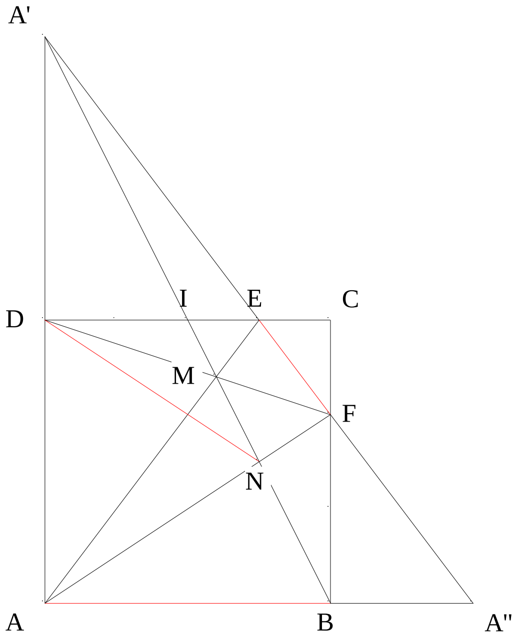
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
N le point d'intersection de (BM) et (AF).

Donné : (AB), (DN) et (EF) sont concourantes. [6]

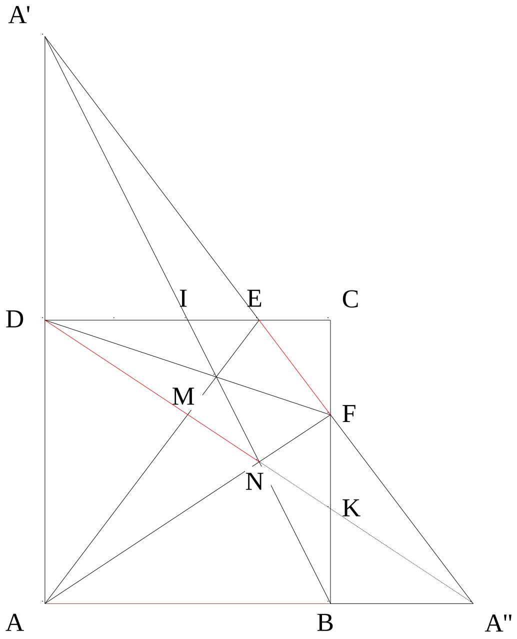
VISUALISATION



- Notons A" le point d'intersection de (EF) et (AB).

- D'après **B. 1** et **2,** B, M, I et A' sont alignés ;
  par hypothèse, B, M et N sont alignés ;
  d'après l'axiome d'incidence **Ia**, B, M, N, I et A' sont alignés

[6] Ayme J.-L., Square and concurrence **II**, AoPS du 05/10/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557023



- Notons K le milieu de [BF].

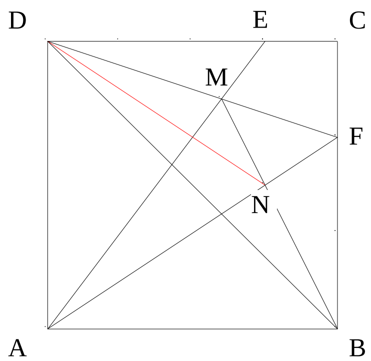
- D'après "Le trapèze complet"
  appliqué au trapèze ABFA', A", K, N et D sont alignés.

- **Conclusion :** (AB), (DN) et (EF) sont concourantes.

6. Une autre médiane

VISION

Figure :

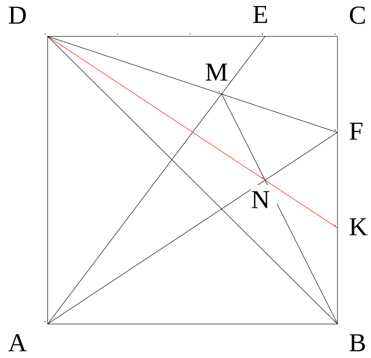


Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : (DN) est la N-médiane du triangle NBF. [7]

[7] Ayme J.-L., A median in a square, AoPS du /10/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=151&t=557019

VISUALISATION

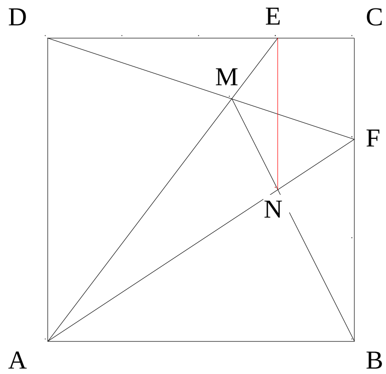


- **Conclusion :** ce résultat est dans la preuve du Problème **5**.

7. Une relation

VISION

Figure :

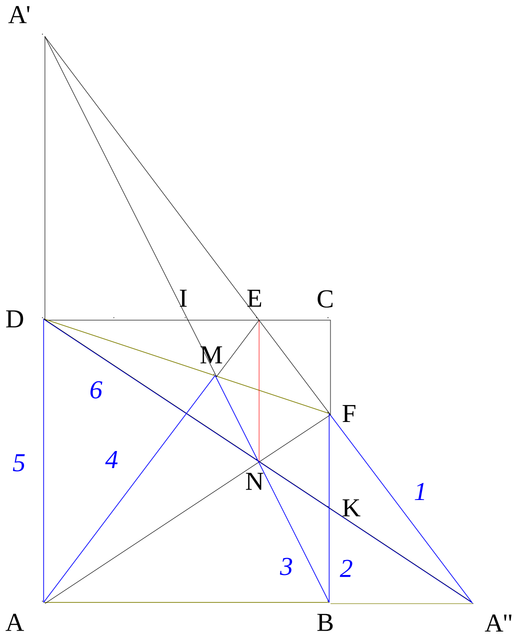


Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : 2.EN = AB.[8]

VISUALISATION

[8] Ayme J.-L., A relation in a square, AoPS du 05/10/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557017



- D'après Pappus "La proposition **139**" [9]
  appliqué à l'hexagone A"FBMADA" de frontières (AA") et (DF), la pappusienne (EN) // (AD).

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle A'AA",
  D étant le milieu de [A'A], E est le milieu de [A'A"].

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle A'A"D,
  E étant le milieu de [A'A"], **(1)** N est le milieu de [A"D]

  (2) 2.EN = A'D.

- D étant le milieu de [A'A], A'D = AD ;
  par hypothèse, AD = AB.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, 2.EN = AB.

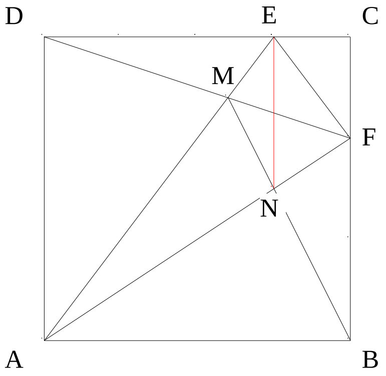
---

9 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 9 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

8. Une autre bissectrice intérieure

VISION

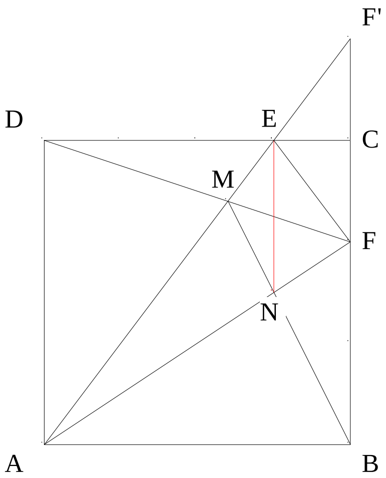
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : (EN) est la E-bissectrice intérieure du triangle AEF. [10]

VISUALISATION



- C étant le milieu de [FF'], le quaterne (F, F', C, ∞) est harmonique [11] ;
  en conséquence, le pinceau (M ; F, F', C, N) est harmonique.

- **Conclusion :** ce pinceau ayant deux rayons perpendiculaires,
  (EN) est la E-bissectrice intérieure du triangle AEF.

---

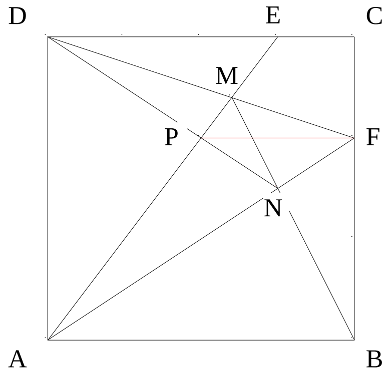
10 Ayme J.-L., A relation in a square, AoPS du 05/10/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557017

11 ∞ signifie point à l'infini sur (BC)

9. Une autre relation

VISION

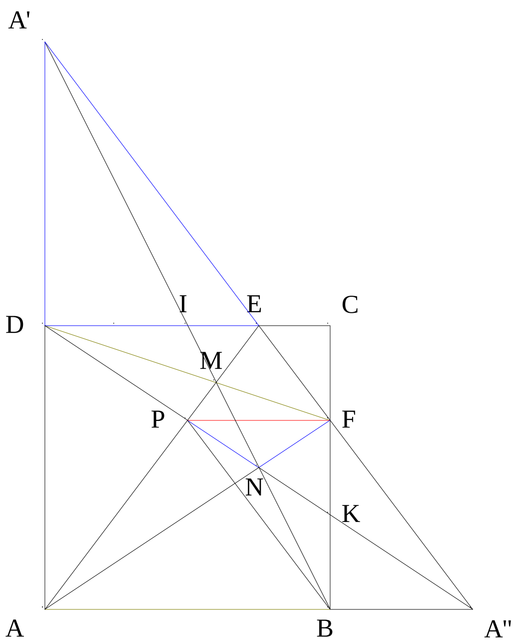
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
P le point d'intersection de (AE) et (DN).

Donné : 2.PF = AB.

VISUALISATION



- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [12]
  appliqué aux triangles à PFN et EDA',
  l'arguésienne (AA") étant parallèle à (DE), (PF) // (AB).

- D'après l'axiome de passage **IIIa**,
  appliqué à la bande de frontières (PF) et (AA"), K étant le milieu de [BF], K est le milieu de [PA"].

[12] Ayme J.L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 39 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

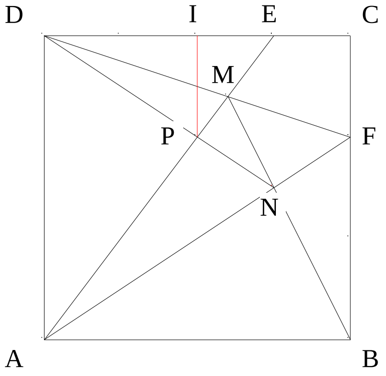
- Le quadrilatère BPFA" étant un parallélogramme, 2.PF = 2.BA" ;
  d'après Thalès "La droite des milieu" appliqué au triangle A'BA" , 2.BA" = 4.IE.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation = et par hypothèse, 2.PF = AB.

10. Deux parallèles

VISION

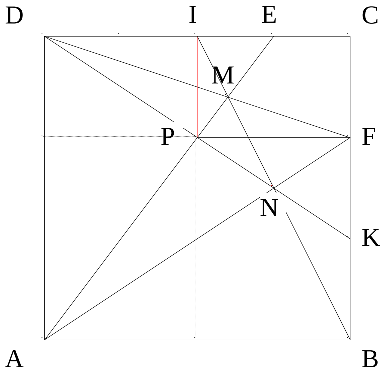
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
P le point d'intersection de (AE) et (DN).

Donné : (IP) est parallèle à (AD) et 2.IP = AD.

VISUALISATION



- Prolongeons (IP) et (PF) comme indiqué sur la figure.

- D'après Pappus "Hexagone avec deux points à l'infini" [13], (IP) // (AD)

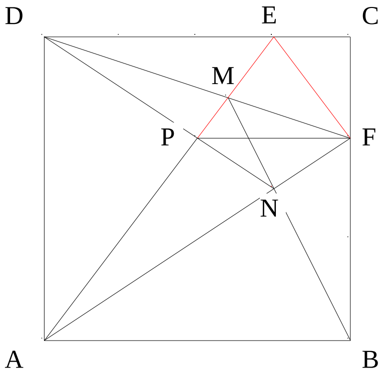
- **Conclusion :** d'après Thalès "La droite des milieux"
  appliqué au triangle CDK, **(1)** (IP) est parallèle à (AD)
  (2) 2. IP = BC (= AD).

[13] Ayme J.L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6,** p. 19-22 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

11. Un autre triangle isocèle

VISION

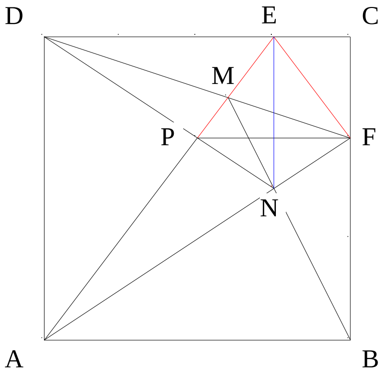
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : le triangle EPF est E-isocèle. [14]

VISUALISATION



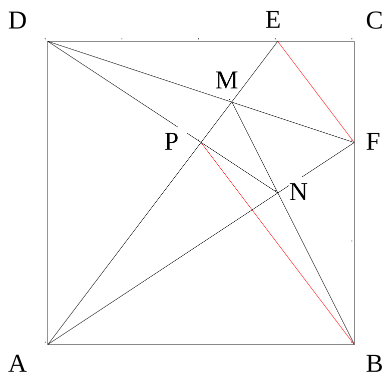
- D'après Problème **8**, (EN) est la E-bissectrice intérieure du triangle PEF.
- D'après Problème **7** et **9**, (EN) est la E-hauteur du triangle PEF.
- **Conclusion :** le triangle EPF est E-isocèle.

[14] Ayme J.-L., An isoceles triangle in a square, AoPS du 07/10/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557324

12. Deux autres parallèles

VISION

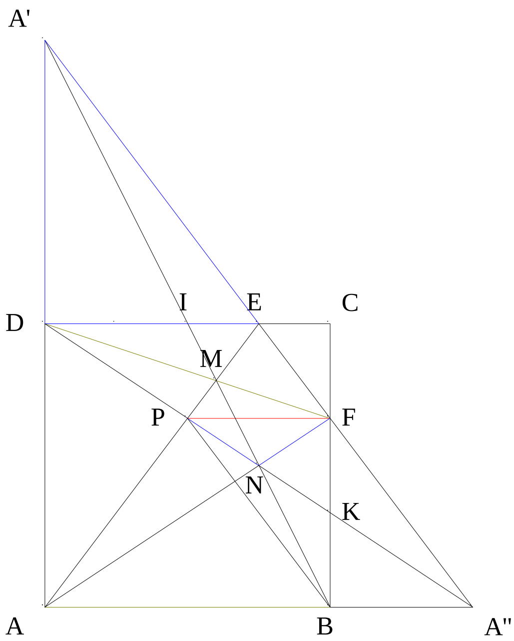
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : (BP) est parallèle à (EF). [15]

VISUALISATION



- D'après **9**, BPFA" est un parallélogramme.

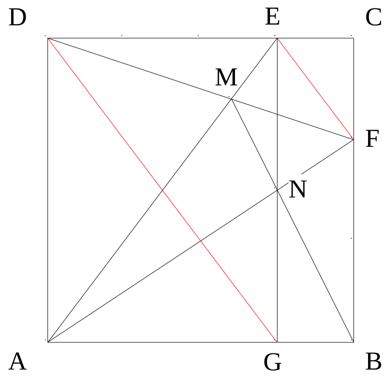
- **Conclusion :** (BP) est parallèle à (EF).

15 Ayme J.-L., Two parallels in a square, AoPS du 07/10/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557323

13. Encore deux parallèles

VISION

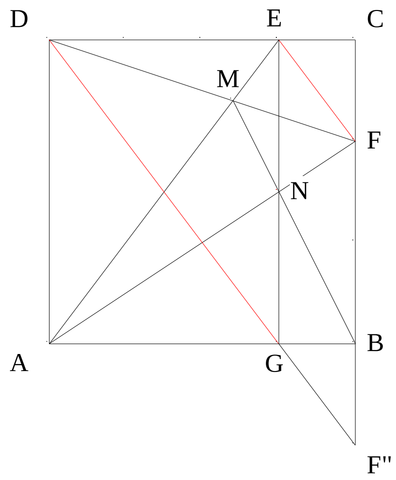
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes
G le point d'intersection de (EN) et (AB).

Donné : (DG) est parallèle à (EF).[16]

VISUALISATION



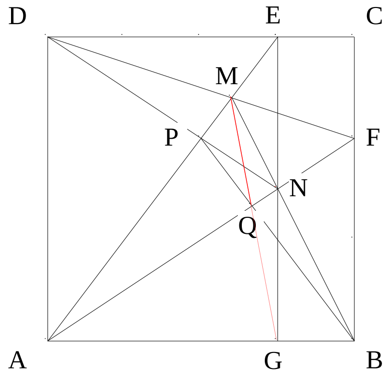
- Notons F" le point d'intersection de (DG) et (BC).
- D'après Problème **1**, BF" = CF.
- Nous avons : EC/ED = ¼ et FC/FF'' = ¼.
- **Conclusion :** d'après Thalès "Rapports", (DG) est parallèle à (EF).

[16] Ayme J.-L.

14. Intersection sur un côté

VISION

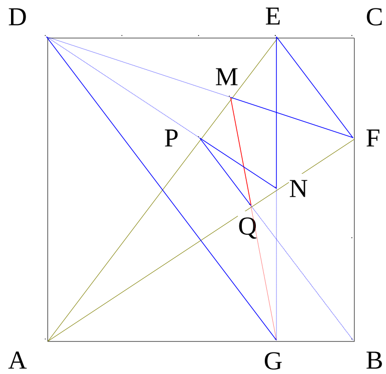
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations, nous ajoutons
Q le point d'intersection de (AF) et (BQ).

Donné : M, Q et G sont alignés.

VISUALISATION



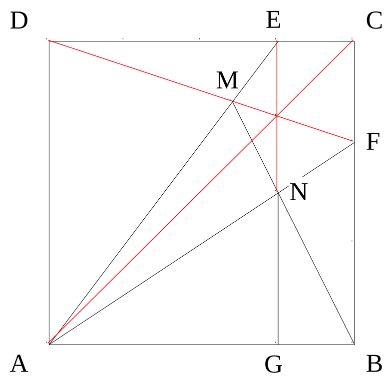
- **Conclusion :** d'après Pappus "Le petit théorème" [17]
(DG) étant la pappusienne de l'hexagone PQMFENP
inscrit dans le secteur de frontières (AF) et (AE), M, Q et G sont alignés.

[17] Ayme J.L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6,** p. 2-5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

15. Encore trois droites concourantes

VISION

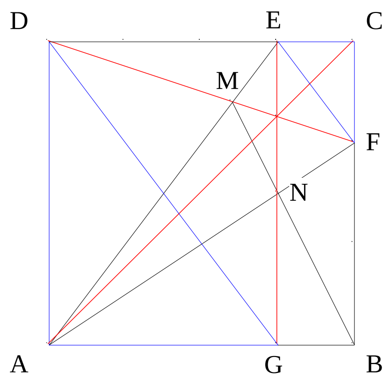
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : (AC), (EN) et (DF) sont concourantes.

VISUALISATION



- Les triangles AGD et CEF sont homothétiques.

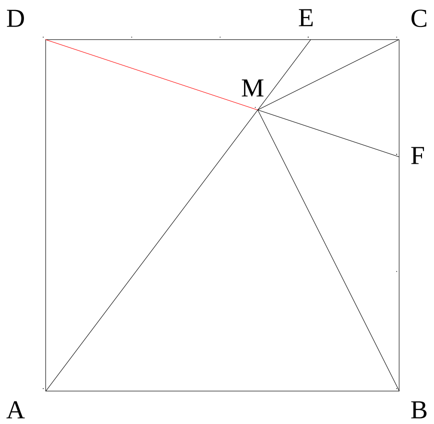
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible"
  appliqué à AGD et CEF, (AC), (GNE) et (DF) sont concourantes.

C. BONUS

1. Une bissectrice intérieure

VISION

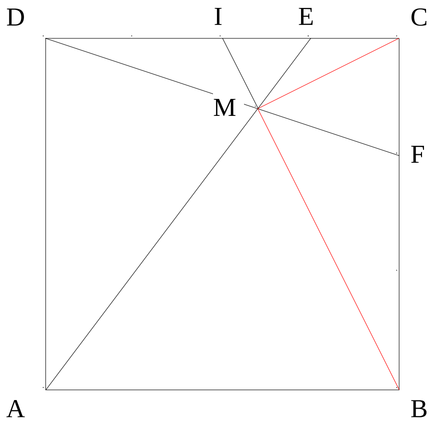
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

Donné : (DM) est la M-bissectrice intérieure du triangle MBC. [18]

VISUALISATION



- Les triangles MBC et CBI étant semblables MB/MC = CB/CI (= 2).
- Par hypothèse, FB/FC = 2.
- D'après "Le théorème de la bissectrice intérieure", (MF) est la M-bissectrice intérieure de MBC
- **Conclusion :** (DM) est la M-bissectrice intérieure du triangle MBC.

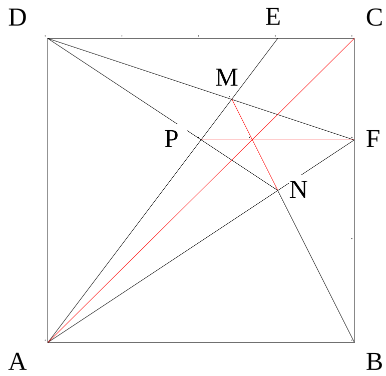
[18] Nicula V., A square and the value of an angle, AoPS du 20/10/2012 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=503255

Scolie : <CMF = 45°.

2. Encore trois droites concourantes

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes.

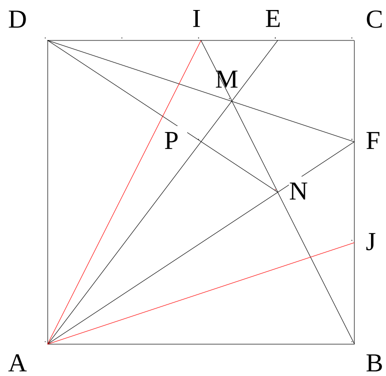
Donné : (AC), (MN) et (PF) concourantes.

Commentaire : la preuve est laissée aux lecteurs.

3. Évaluation d'un angle

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
J le milieu de [BF].

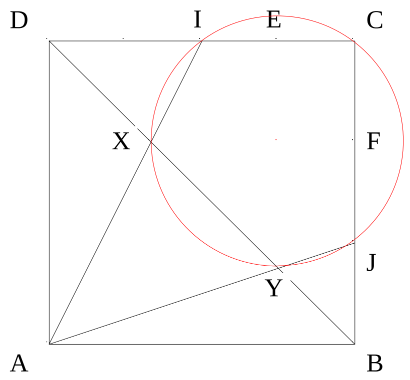
Donné : évaluer <IAJ. [19]

Commentaire : la preuve est laissée au lecteur.

4. Cinq points cocycliques

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
X, Y les points d'intersection de (BD) resp. avec (AI), (BJ).

Donné : X, Y, I, J et C sont cocycliques. [20]

Commentaire : la preuve est laissée au lecteur.

---

19 Ayme J.-L., Evaluation of an angle, AoPS du 08/10/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewforum.php?f=47

20 Five concyclic points, AoPS du 08/10/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=557462