52nd I.M. O. Amsterdam (Netherlands)

16 – 24 July 2011

Contest day two Problem 6

†

Jean - Louis AYME [1]

Language: French

Day: 2

Mardi 19 juillet 2011

Problème 6. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit Γ son cercle circonscrit. Soit ℓ une droite tangente à Γ. Soit ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c les droites symétriques de ℓ par rapport respectivement aux droites (BC), (CA), (AB).
Montrer que le cercle circonscrit au triangle déterminé par les droites ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c est tangent à Γ.

Pays-Bas (Europe)

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 23/07/2011 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

The contest hall

Sommaire

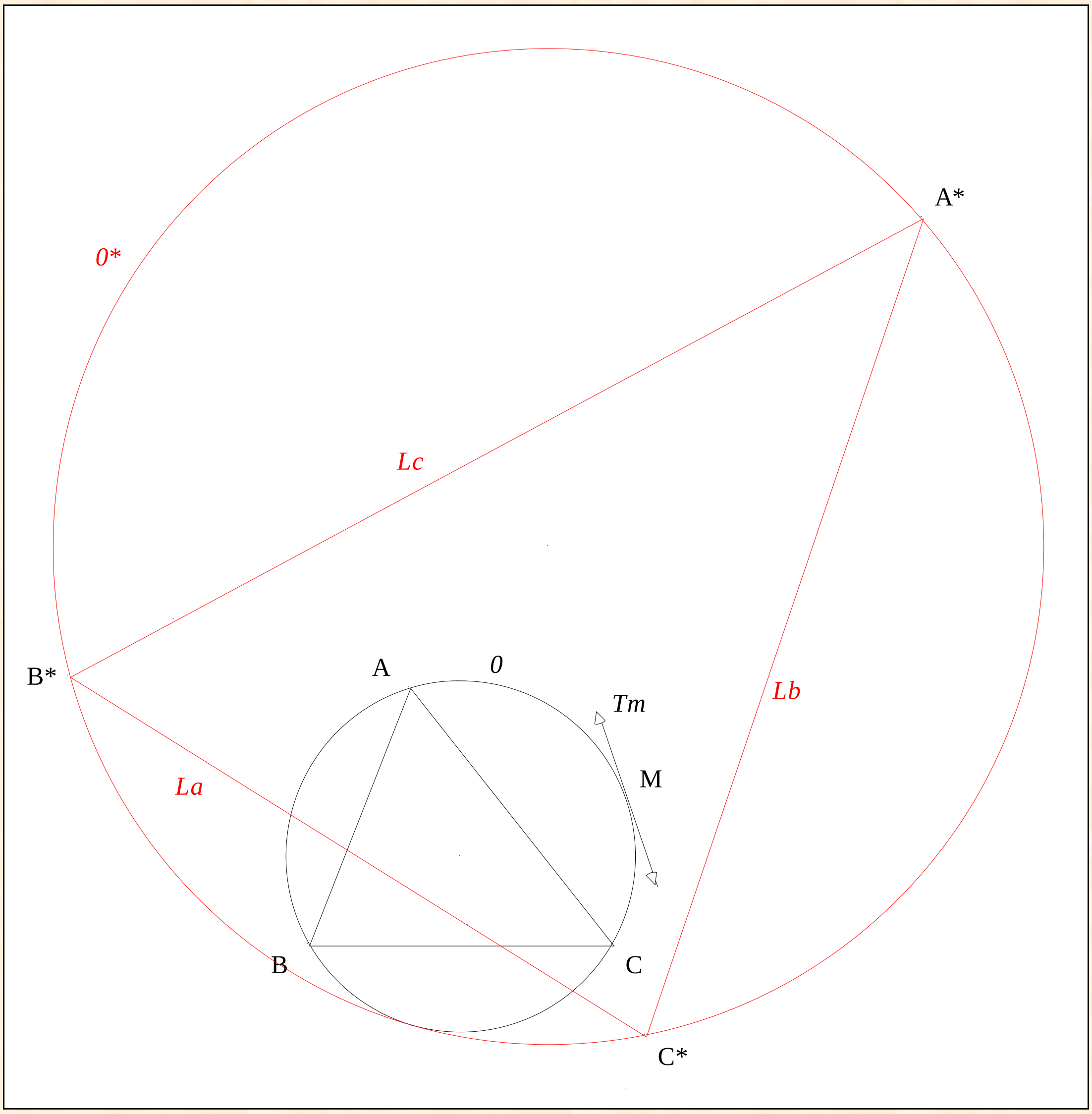
Guides and deputies waiting for their team

A. PROBLEM 6

Tuesday 19 July   Contest day two (9:00 - 13:30h)

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle **acutangle**,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	T	une droite,
	La, *Lb*, *Lc*	les symétriques de *Tm* resp. par rapport à (BC), (CA), (AB)
	A*, B*, C*	les points d'intersection de *Lb* et *Lc*, *Lc* et *La*, *La* et *Lb*,
et	*0**	le cercle circonscrit au triangle A*B*C*.

Donné : [*T* est tangente à *0*] *si, et seulement si,* [*0** est tangent à *0*]. [2]

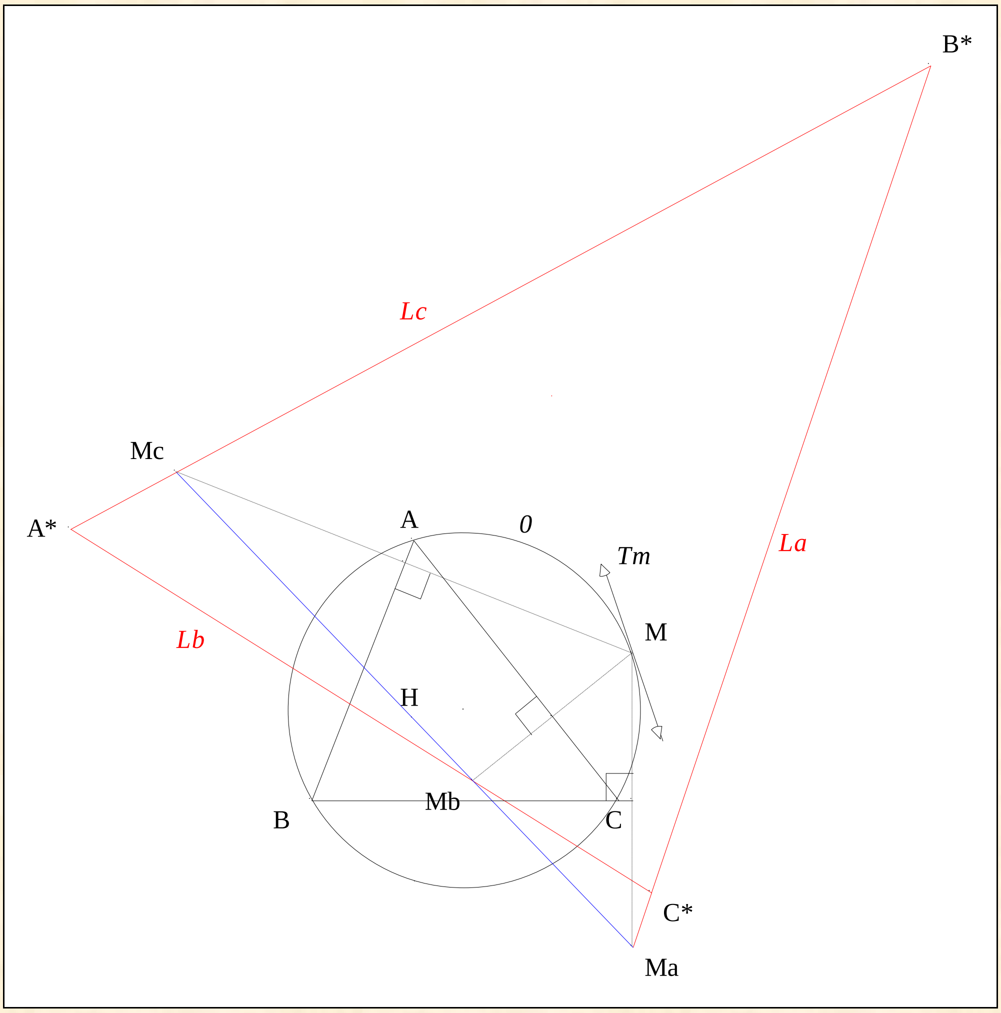
[2] IMO 2011 Problem **6** ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=729&t=418983

VISUALISATION NÉCESSAIRE

STEINER * CARNOT * MÖBIUS * MONIENNE BRISÉE

*

MIQUEL-WALLACE * MANNHEIM * REIM * PIVOT * DESARGUES * REIM



- **Hypothèse :** [*T* est tangente à *0*].

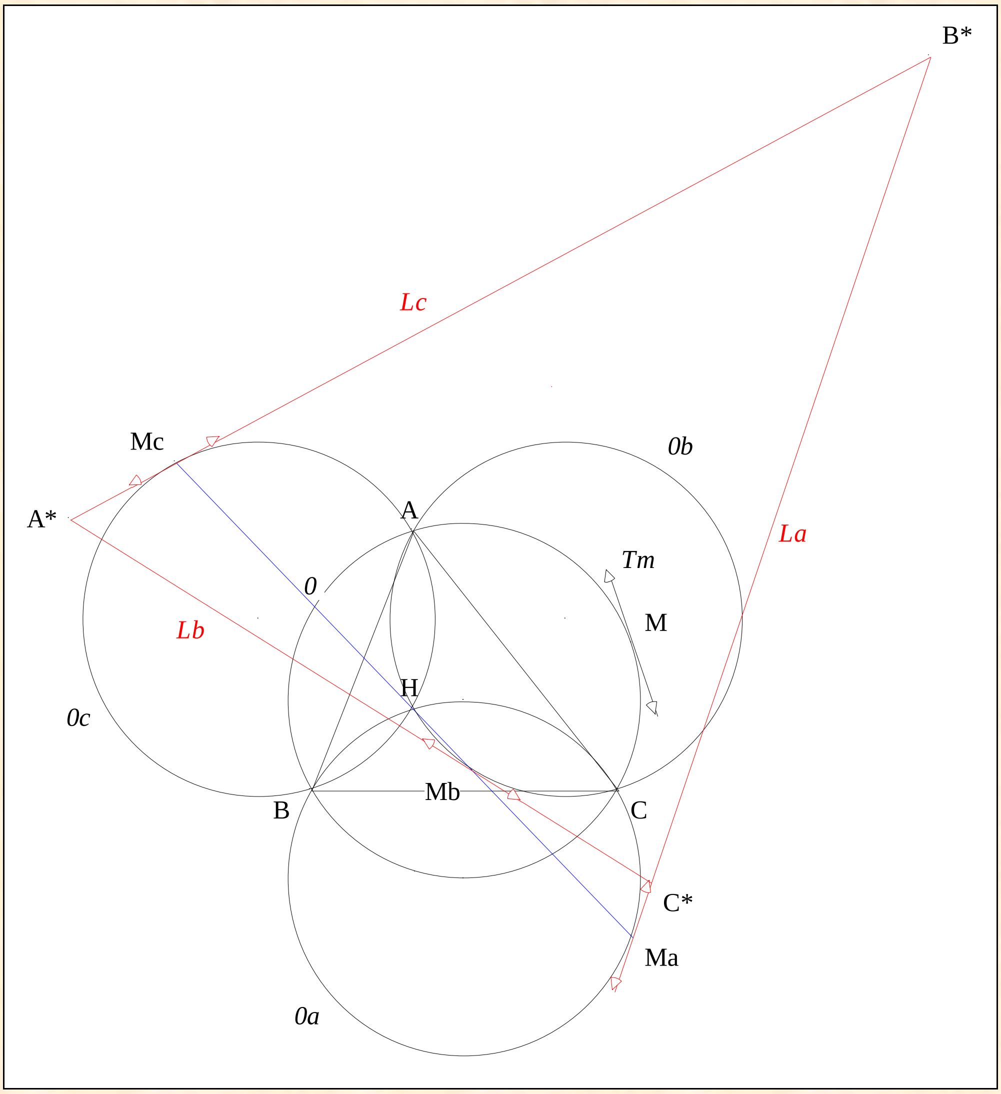
- **Commentaire :** cette hypothèse est celle du problème de l'Olympiade.

- Notons
  M le point de contact de *T* avec *0*,
  Tm la tangente à *0* en M (pour plus de précision et de compréhension),
  H l'orthocentre de ABC
  et Ma, Mb, Mc les symétriques de M resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).

- D'après "La droite de Steiner" [3], Ma, Mb, Mc et H sont alignés.

---

[3] Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. **4**, p. 4-6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

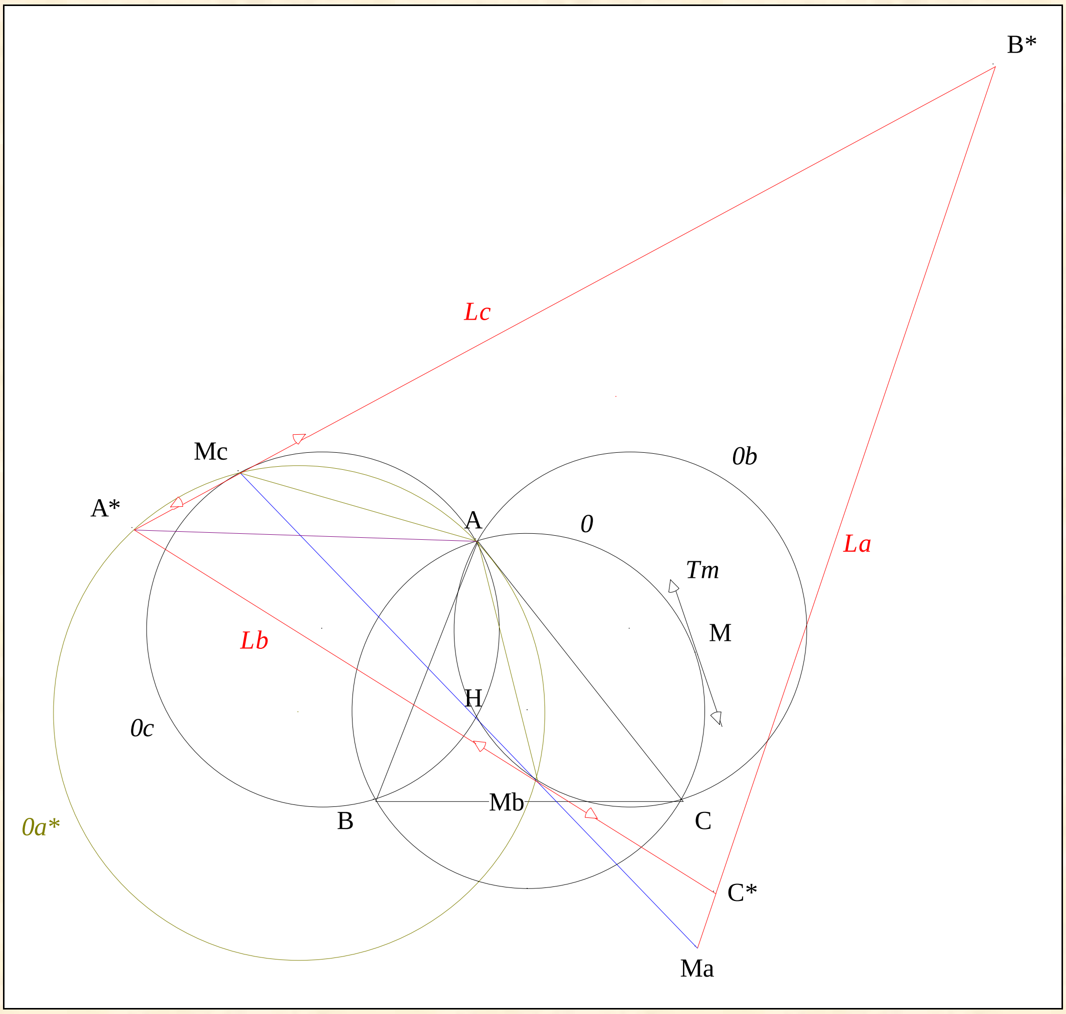


- Notons *0a*, *0b*, *0c* les trois cercles de Carnot [4] de ABC.

- **Scolies :**
  (1) *0a* est tangent à *La* en Ma
  (2) *0b* est tangent à *Lb* en Mb
  (3) *0c* est tangent à *Lc* en Mc.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté" (Cf. Annexe **1**), *0a*, *0b*, *0c* passent par H.

[4] *0a*, *0b*, *0c* sont les symétriques de *0* resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).



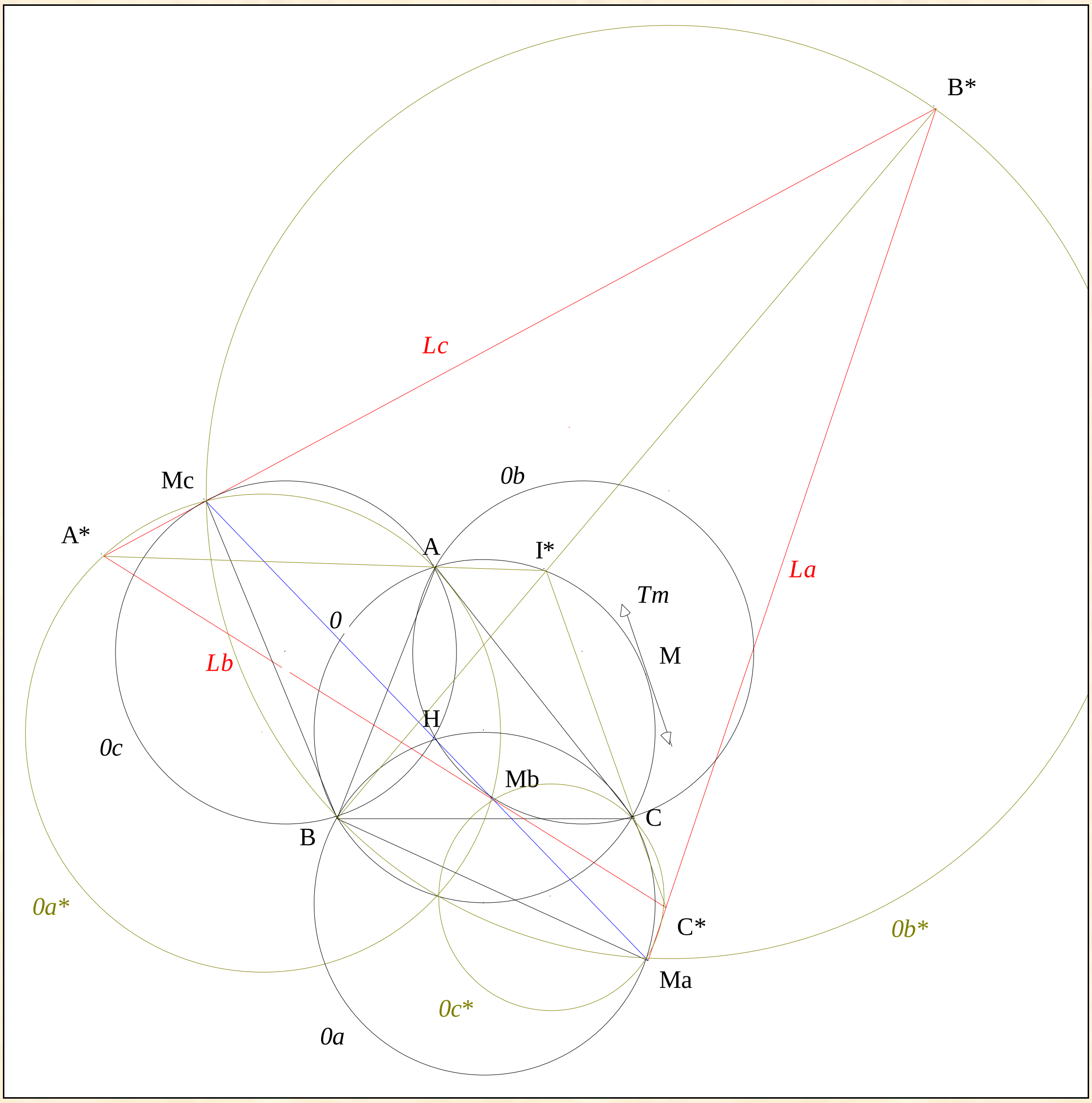
- **Scolie :** *0a*, *0b*, *0c* sont égaux entre eux.

- D'après "Un triangle de Möbius" (Cf. Annexe **2**),
  appliqué à *0a* et *0b*, le triangle AMbMc est A-isocèle.

- Notons *Oa** le cercle circonscrit à AMbMc.

- D'après "Une monienne brisée" (Cf. Annexe **3**),
  appliquée à *0b* et *0c* avec la monienne (MbHMc)
  et la monienne brisée (MbAMc), A* est sur *0a**.

- **Conclusion partielle :** (A*A) est A*-bissectrice intérieur de A*B*C*.

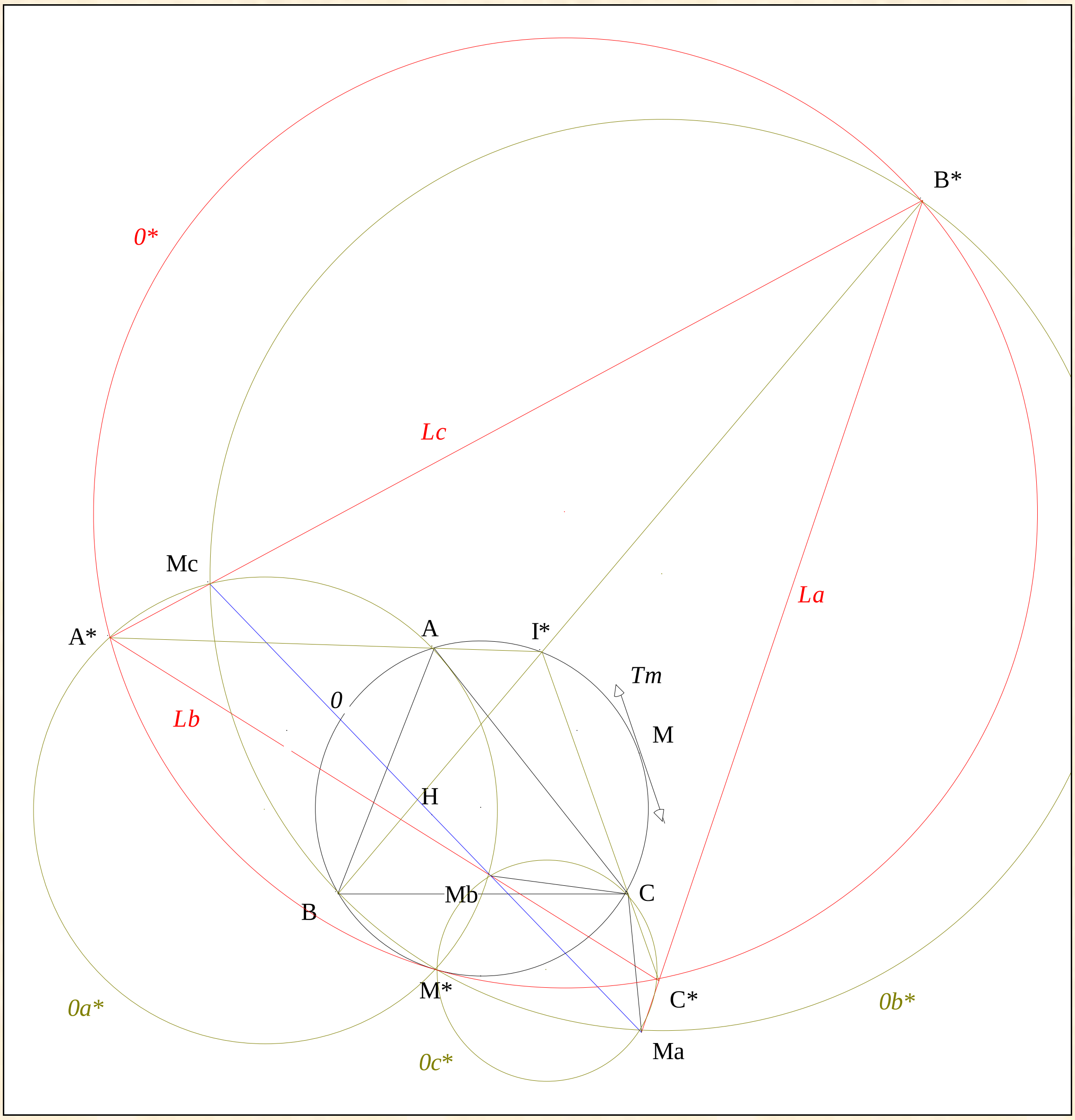


- Notons *0b**, *0c** les cercles circonscrits resp. aux triangles BMcMa, CMaMb.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** (B*B) est B*-bissectrice intérieur de A*B*C*
  (2) (C*C) est C*-bissectrice intérieur de A*B*C*.

- Notons I* le centre du cercle inscrit à A*B*C*.

- **Conclusion partielle :** (A*A), (B*B) et (C*C) sont concourantes en I*.

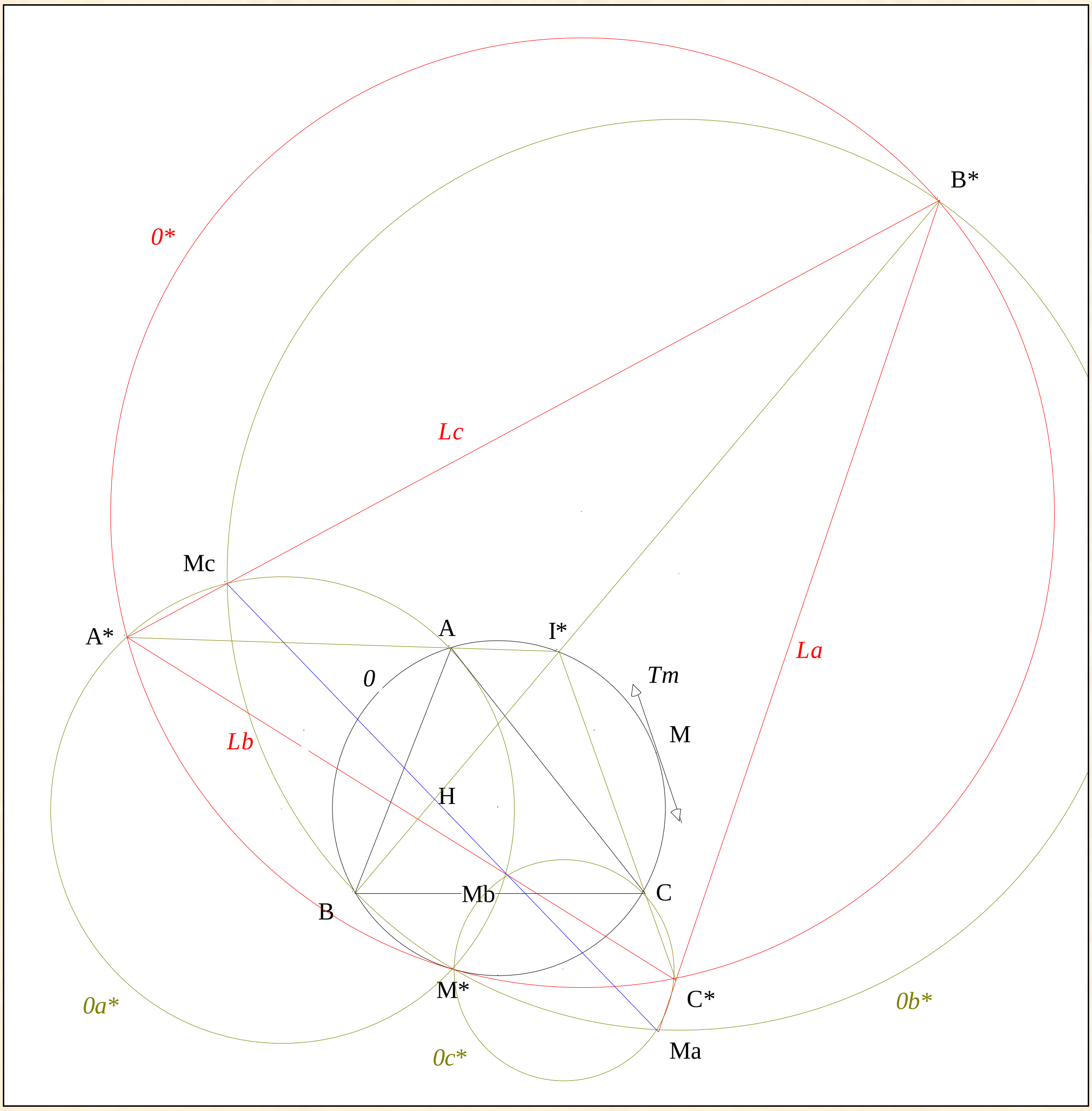


- **Commentaire :** le triangle A*B*C*, la ménélienne (MaMbMc), les cercles *0**, *0a**, *0b** et *0c** conduisent à la situation de Miquel-Wallace.

- D'après "Le point de Miquel-Wallace" [5] (Cf. Annexe **4**), *0a*, *0b* et *0c* sont concourants sur *0**.

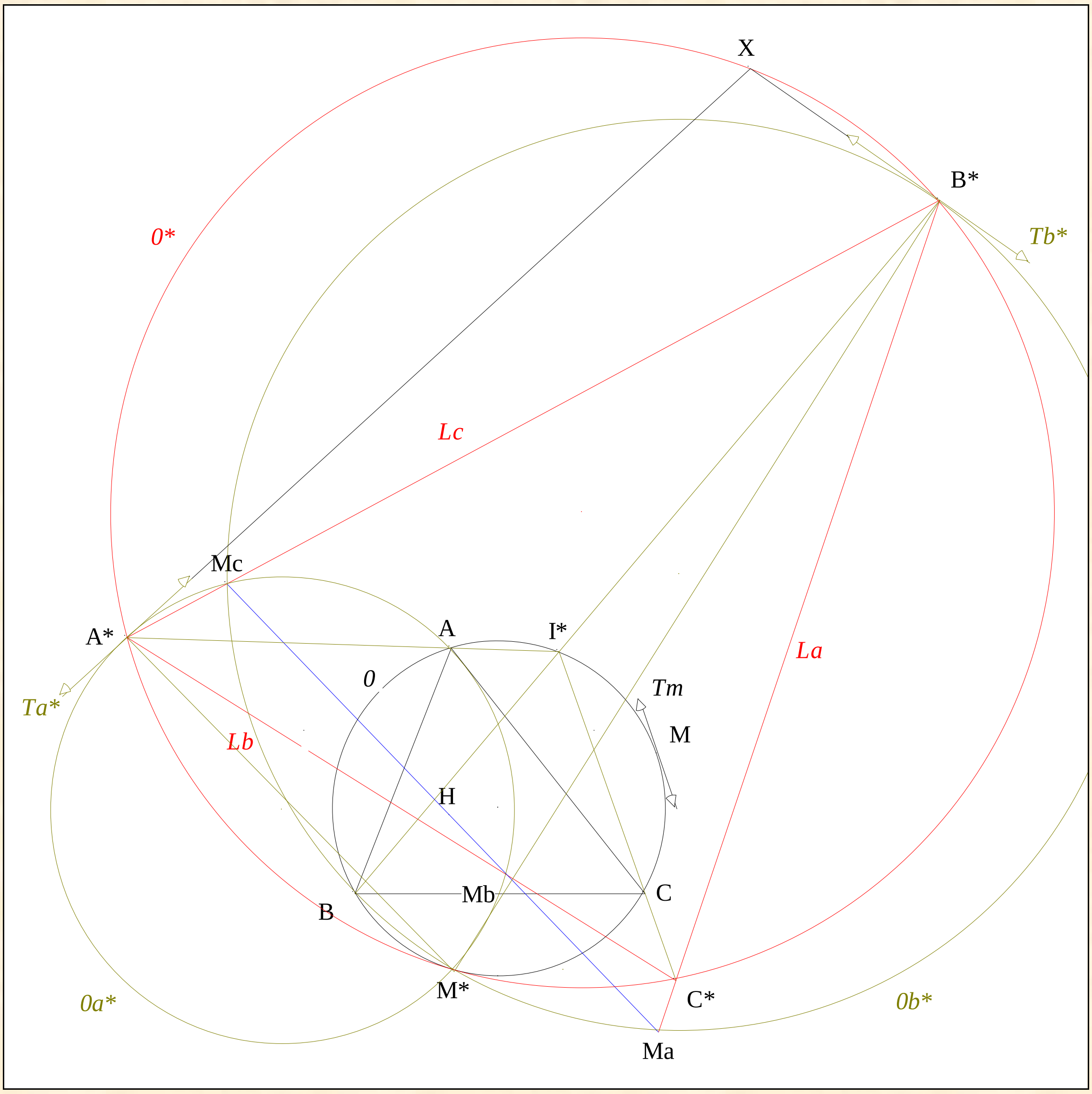
- Notons M* ce point de concours.

[5] Ayme J.-L., La droite de Kantor-Hervey, G.G.G. vol. **6**, p. 4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



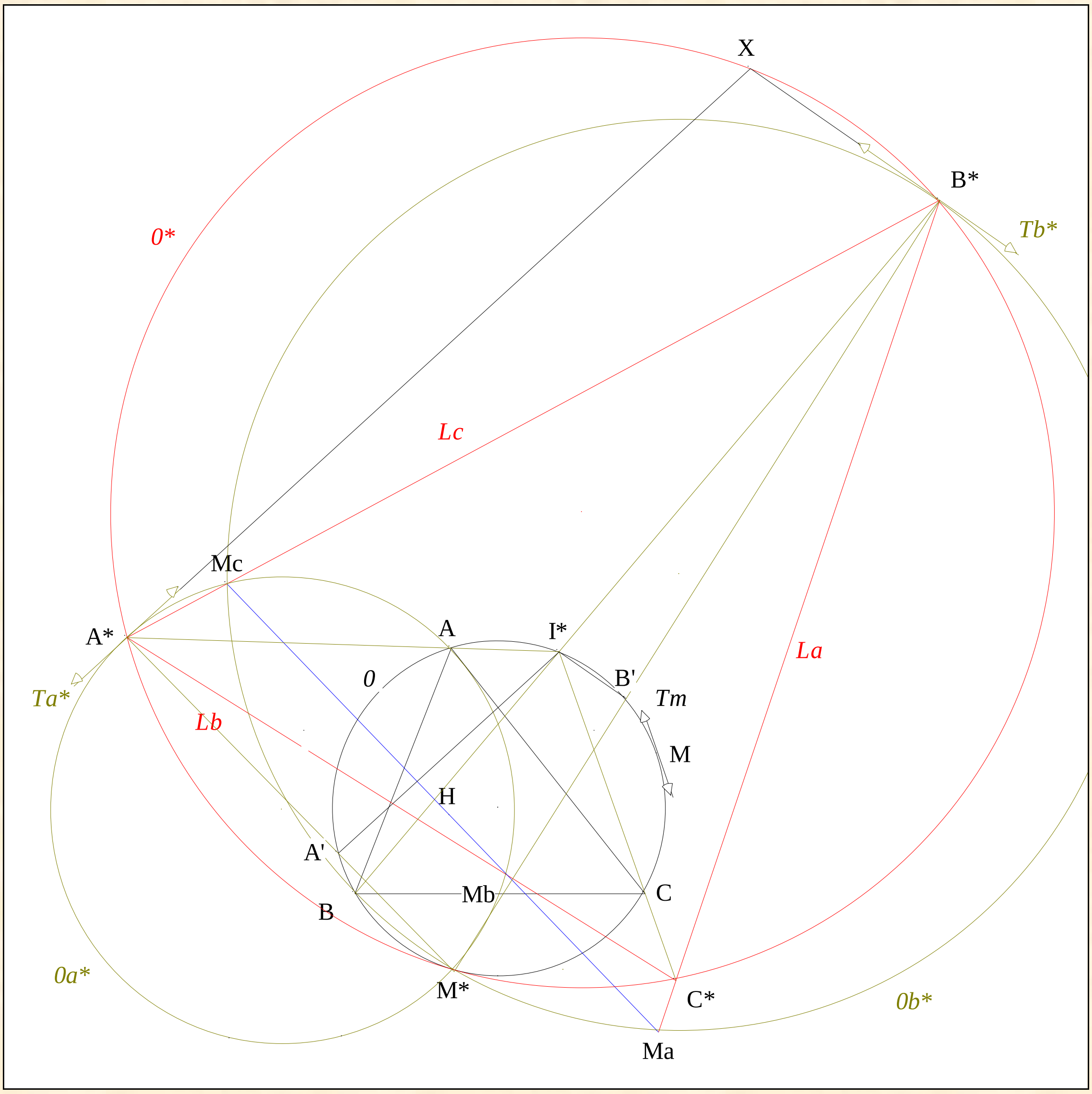
- D'après "Le cercle de Mannheim" [6] appliqué au point I* et à la situation de Miquel-Wallace, *0* passe par I* et M*.

[6] Ayme J.-L., Les cercles de Morley, Euler, Mannheim…, G.G.G. vol. **2**, p. 6-9 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons *Ta**, *Tc** les tangentes à *0a**, *0b** resp. en A*, B*
  et X le points d'intersection de *Ta** et *Tb**.

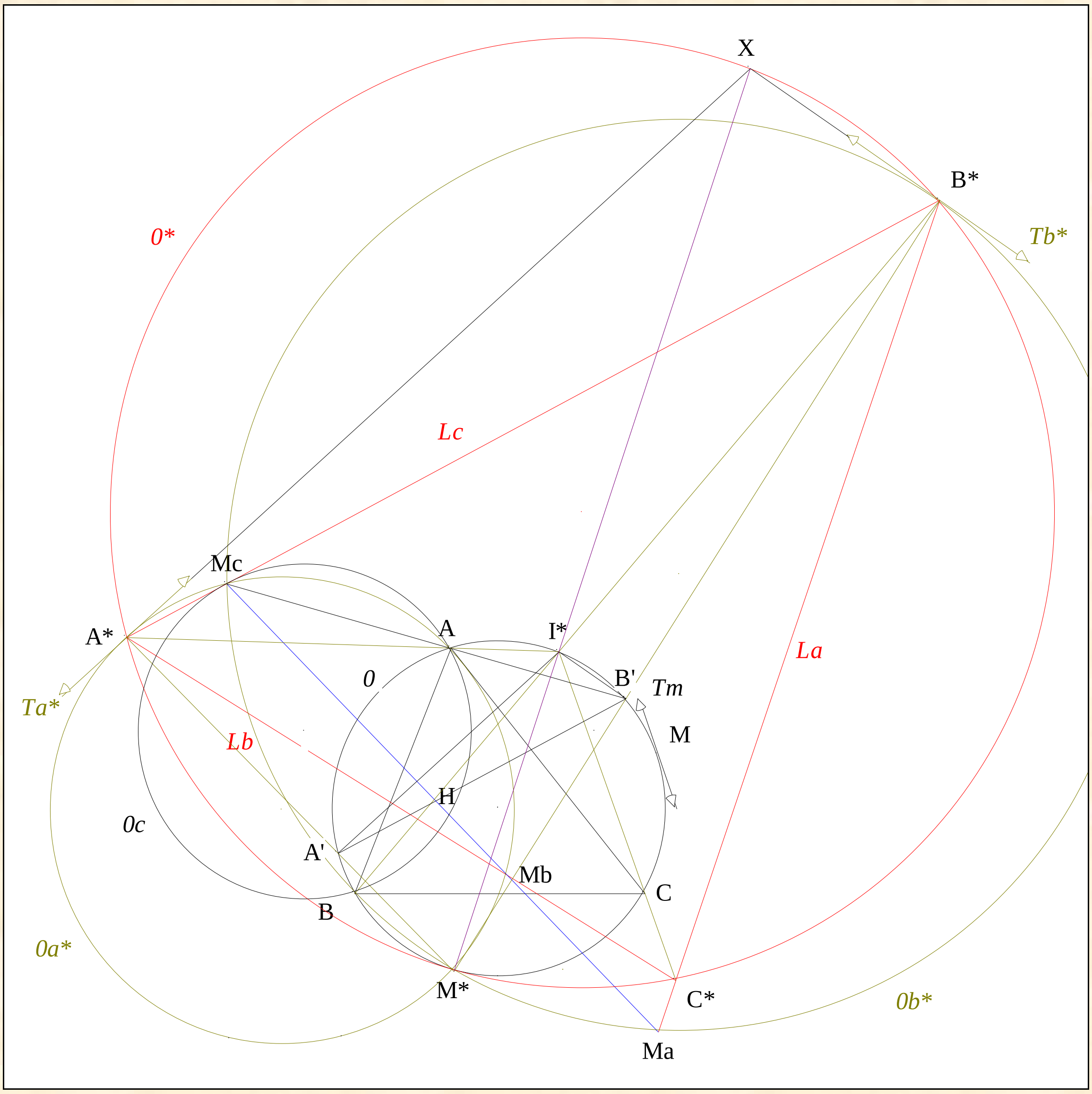
- D'après "Une monienne brisée" (Cf. Annexe **2**)
  appliquée à *0a** et *0b** avec la monienne (A*McB*)
  et la monienne brisée (A*M*B*), X est sur *0**.



- Notons A', B' les seconds points d'intersection de (M*A*), (M*B*) avec *0*.

- Les cercles *0* et *0a**, les points de base A et M*, les moniennes (I*AA*) et (A'M*A*), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (I*A') // *Ta**.

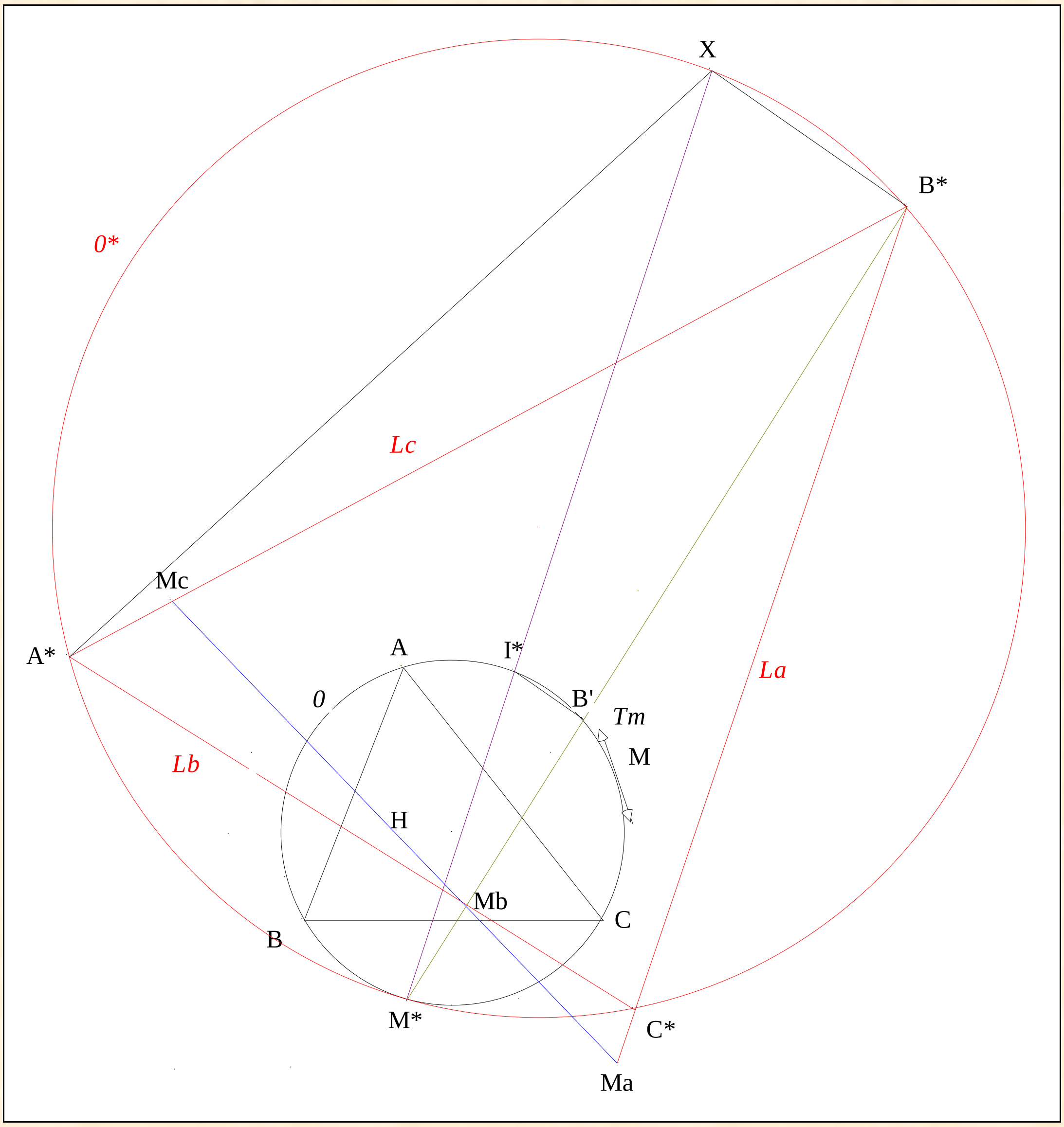
- Les cercles *0* et *0b**, les points de base B et M*, les moniennes (I*BB*) et (B'M*B*), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (I*B') // *Tb**.



- D'après "Le théorème des trois cercles concourants" (Cf. Annexe **5**)
  appliqué au triangle B'McB*
  et aux cercles *0*, *0c*, *0b** concourants en B, B', A et Mc sont alignés.

- Les cercles *0* et *0a**, les points de base M* et A, les moniennes (A'M*A*) et (B'AMc),
  conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (A'B') // (A*Mc) ou encore (A'B') // (A*B*).

- D'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe **6**)
  appliqué aux triangles homothétiques I*A'B' et XA*B*, M*, I* et X sont alignés.



- **Conclusion :** le cercle *0*, le point de base M*, les moniennes (I*M*X) et (B'M*B*), les parallèles (I*B') et (XB*), conduisent au théorème **7** de Reim ; en conséquence, *0** est tangent à *0*.

Scolie : le résultat reste inchangé si le triangle ABC est obtusangle.

Note historique : ce problème **6** en général le plus difficile a été proposé par le Japon.
Malheureusement, le Comité japonais des OMI a pour habitude de ne jamais relater des informations concernant les auteurs des problèmes proposés.
Le score de l'équipe de France pour cet exercice de géométrie a été nul sur les 42 points possibles. Seuls 6 élèves sur les 564 participants ont totalement résolu cet exercice (2 filles : une allemande et une iranienne, et 4 garçons venant resp. de Chine, Singapour, Hong Kong, Grèce).
Notons que le seul candidat à avoir résolu les six problèmes des O.I.M. de 2011 est l'allemande Lisa Sauermann[7] qui vient d'obtenir sa quatrième médaille d'or en plus de celle d'argent qu'elle a remporté à l'âge de 14 ans...

7 [official.imo2011.nl]

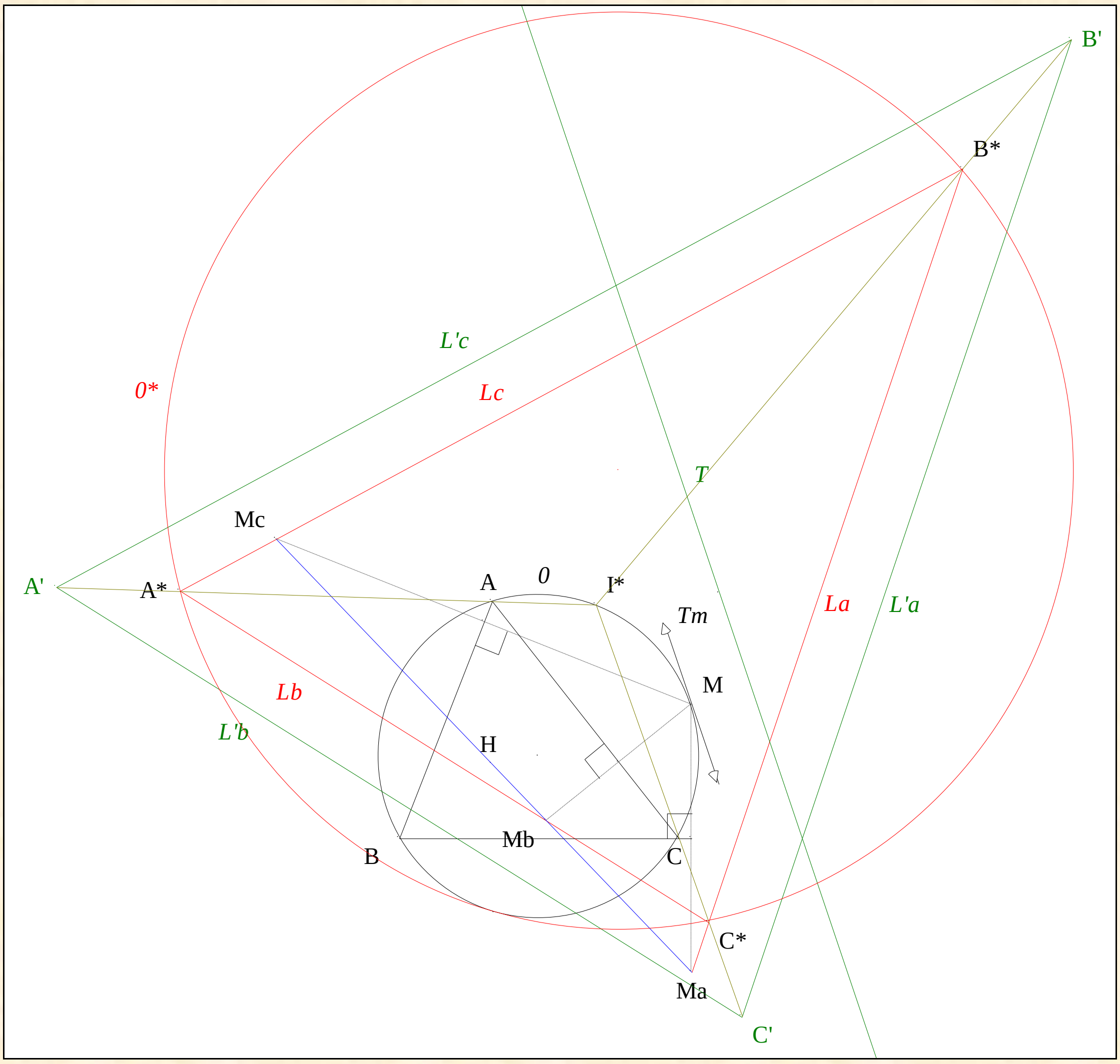
VISUALISATION SUFFISANTE [8]

- Un peu de logique :

  * nous désirons montrer que [*0** est tangent à *0*] → [*T* est tangente à *0*]

  * par contraposition, non [*T* est tangente à *0*] → non [*0** est tangent à *0*].

- **Hypothèse :** [*T* n'est pas tangente à *0*].



- Notons *Tm* l'une des deux tangentes à *0*, parallèles à *T*,
  M le point de contact de *Tm* avec *0*,
  L'a, *L'b*, *L'c* les symétriques de *T* resp. par rapport à (BC), (CA), (AB)
  A', B', C' les points d'intersection de *L'b* et *L'c*, *L'c* et *L'a*, *L'a* et *L'b*,
  I' le centre de A'B'C'
  et *0'* le cercle circonscrit au triangle A'B'C'.

- **Commentaire :** les hypothèses et notations sont les mêmes que dans la visualisation nécessaire et la preuve ci-après serait la même avec la seconde tangente.

- **Scolies :** **(1)** les triangles A'B'C' et A*B*C* sont homothétiques et non égaux

[8] Ayme J.-L., Two circles, AoPS du 16/09/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=606505

(2) (A'I') // (A*I*).

- D'après "Le théorème de Collings-Lalesco" [9], **(1)** A', A et I' sont alignés
  (2) A*, A et I* sont alignés.

- D'après "Le théorème de Collings-Lalesco" [10], **(1)** I' est sur *0*
  (2) I* est sur *0*.

- **Conclusion partielle :** (A'I') étant parallèle à (A*I*), I' et I* sont confondus.

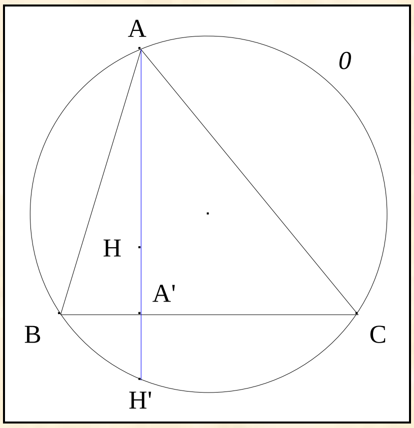
- A'B'C' et A*B*C* étant non égaux, *0** étant tangent à *0*, *0'* ne peut être tangent à *0*.

- **Conclusion : [***0'* n'est pas tangent à *0*].

9 Ayme J.-L. Une droite et un triangle, G.G.G. vol. **17**, p. 7-9 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
10 Ayme J.-L. Une droite et un triangle, G.G.G. vol. **17**, p. 11-12 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

B. ANNEXE

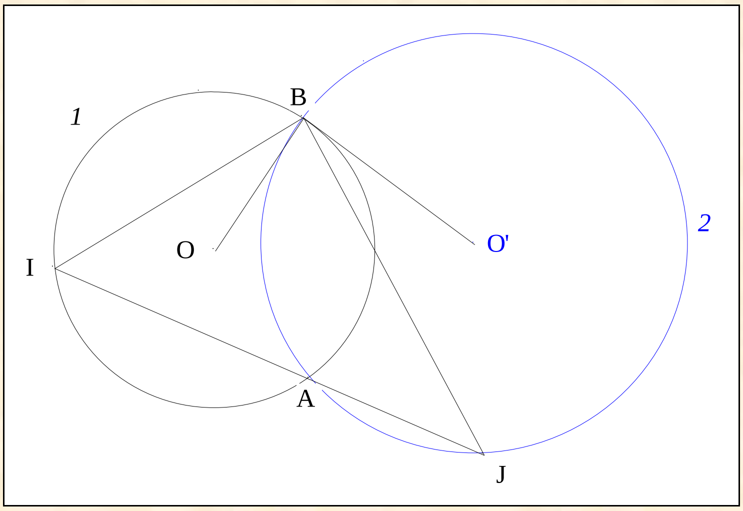
1. Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté [11]



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	H	l'orthocentre du triangle,
	A'	le pied de la hauteur de ABC en A,
	0	le cercle circonscrit à ABC
et	H'	le pied de la hauteur de ABC en A sur *0*.

Donné : A' est le milieu de [HH'].

2. Un triangle de Möbius [12]

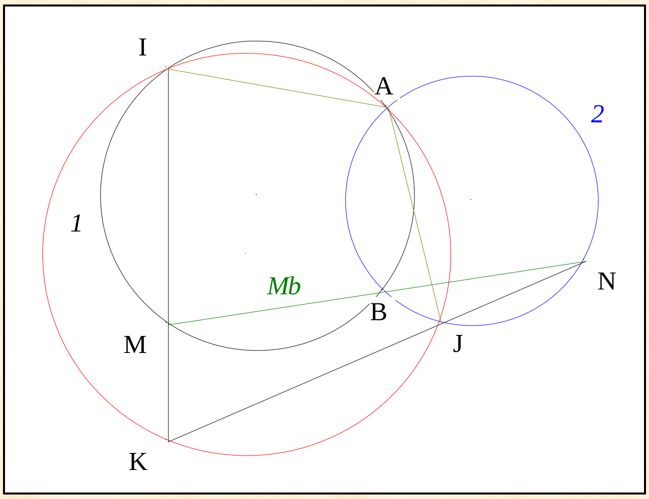


Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	O, O'	les centres resp. de *1*, *2*,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
et	(IBJ)	une monienne brisée.

Donné : (IAJ) est une monienne *si, et seulement si,* <IBJ = <OBO'.

[11] Carnot, n° **142**, *De la corrélation des figures géométriques* (1801) 101.
[12] Baltzer R. dans son livre *Statik* attribue ce résultat à Möbius.

3. Une monienne brisée

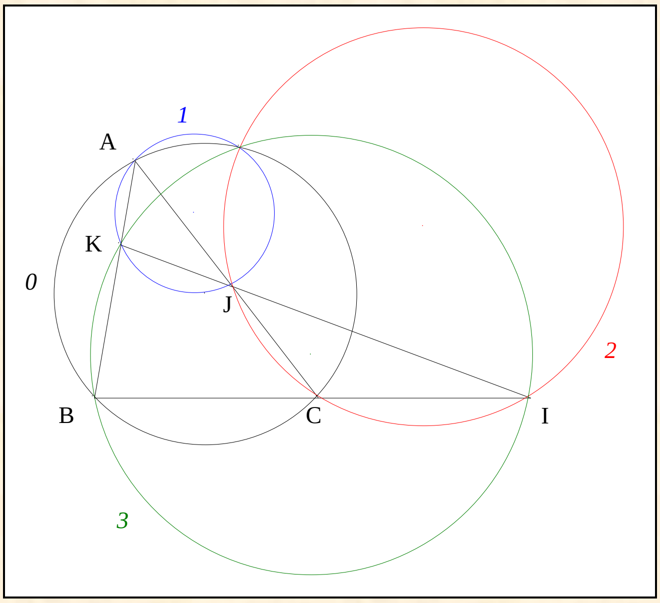


Traits :	*1*, *2*	deux cercles sécants,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	Mb	une monienne passant par B,
	M, N	les points d'intersection de *Mb* resp. avec *1*, *2*,
	I, J	deux points resp. de *1*, *2*
et	K	le point d'intersection de (IM) et (JN)

Donné : I, A, J et K sont cocycliques.

Scolie : (IAJ) est la monienne brisée en A.

4. Le point de Miquel-Wallace [13]

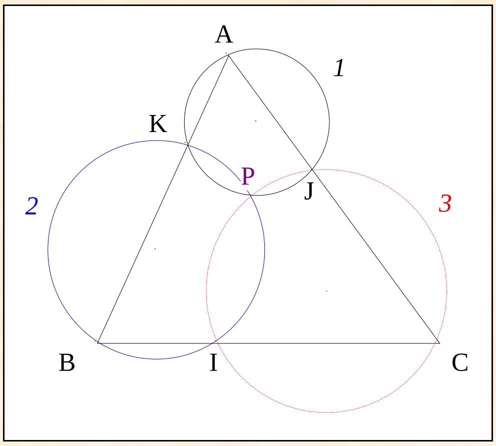


Traits :	ABC	un triangle,
	I, J, K	trois points d'intersection de (BC), (CA), (AB),
	0	le cercle circonscrit à ABC,
et	*1*, *2*, *3*	les cercles circonscrits à AKJ, BIK, CJI.

[13] Wallace W., Leybourn's *Mathematical Repository*, vol. 1, part **I** (1804) 170.

Donné : *si*, I, J et K sont alignés *alors*, *0*, *1*, *2* et *3* sont concourants.

5. Le théorème des trois cercles concourants [14]

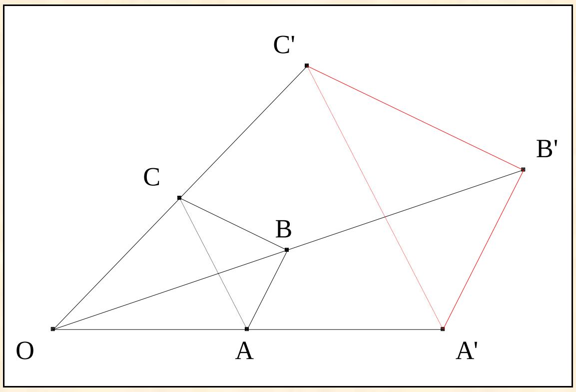


Traits : *1*, *2*, *3* trois cercles sécants deux à deux,
K, P les points d'intersection de *1* et *2*,
I l'un des points d'intersection de *2* et *3*,
J l'un des points d'intersection de *3* et *1*,
A un point de *1*,
B le second point d'intersection de la monienne (AK) avec *2*
et C le second point d'intersection de la monienne (BI) avec *3*.

Donné : (CJA) est une monienne de *3* et *1* *si, et seulement si,* *3* passe par P.

Commentaire : ce résultat est une réciproque du pivot de Miquel.
Il reste vrai dans les cas de tangence des droites ou de deux cercles

6. Le théorème faible



Traits : ABC un triangle,
et A'B'C' un triangle tel que **(1)** (AA') et (BB') soient concourantes en O
(2) (AB) soit parallèle à (A'B')
(3) (BC) soit parallèle à (B'C').

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').

[14] Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.