

# CULTURE GÉOMÉTRIQUE 1

## PERPENDICULAIRE

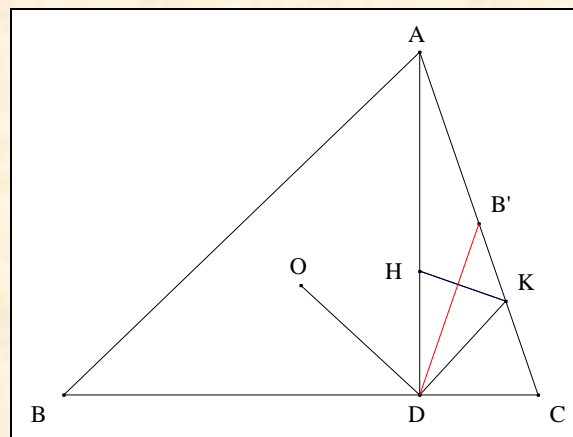
À

## UNE DROITE DE STEINER

†



Jean - Louis AYME <sup>1</sup>



**Résumé.** L'auteur présente un problème personnel concernant une perpendiculaire à une droite de Steiner.  
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

**Abstract.** The author presents a personal problem concerning a perpendicular to a Steiner's line.  
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

### Sommaire

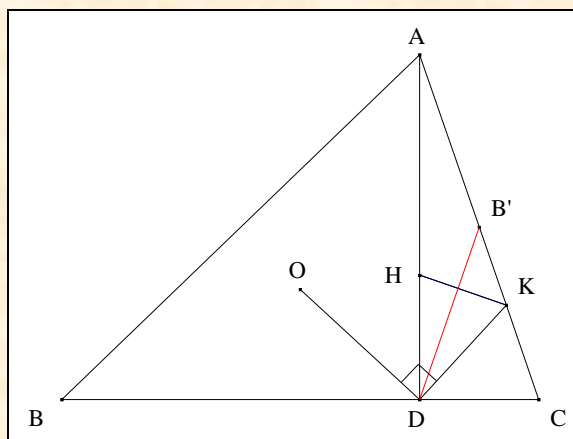
<b>A.</b> Perpendiculaire à une droite de Steiner	2
<b>B.</b> Deux angles égaux	4

<sup>1</sup> Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 15/08/2016 ; [jeanlouisayme@yahoo.fr](mailto:jeanlouisayme@yahoo.fr)

**A. PERPENDICULAIRE**  
**À**  
**UNE DROITE DE STEINER**

**VISION**

**Figure :**

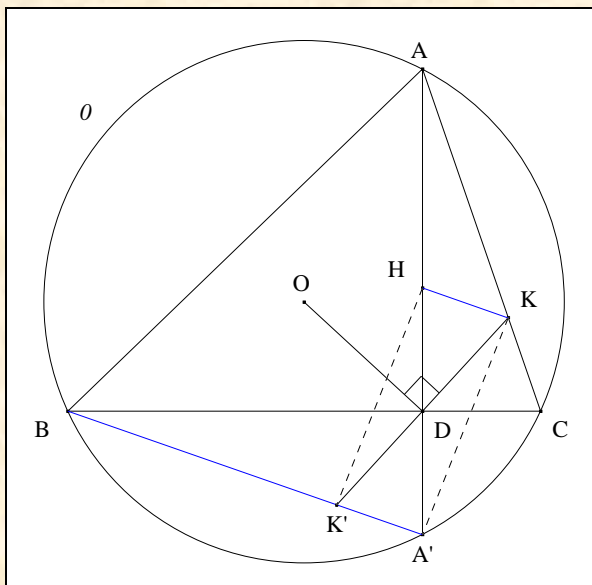


**Traits :** ABC un triangle acutangle tel que  $AC < BC < AB$ ,  
 B' le milieu de  $[AC]$ ,  
 H l'orthocentre de  $ABC$ ,  
 D le pied de la A-hauteur de  $ABC$ ,  
 O le centre du cercle circonscrit à  $ABC$   
 et K le point d'intersection de la perpendiculaire à  $(OD)$  en  $D$  avec  $(AC)$ .

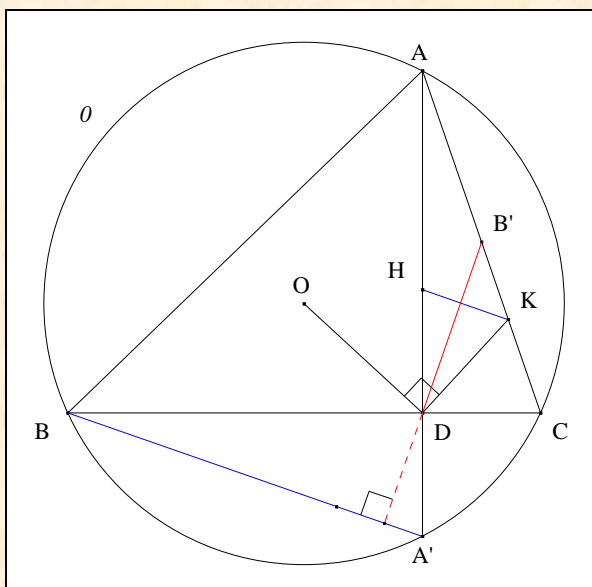
**Donné :**  $(HK)$  est perpendiculaire à  $(B'D)$ .<sup>2</sup>

**VISUALISATION**

<sup>2</sup> Ayme J.-L., Two perpendiculars, AoPS du 03/08/2016 ;  
[http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1283140\\_two\\_perpendiculars](http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1283140_two_perpendiculars)  
 Deux perpendiculaires, *Les-Mathematiques.net* ;  
<http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1308483>



- Notons  $O$  le cercle circonscrit à  $ABC$ ,  
 et  $A'$  le second point d'intersection de  $(AD)$  avec  $O$   
 et  $K'$  le point d'intersection de  $(KD)$  et  $(A'B)$ .
- D'après "The butterfly theorem"<sup>3</sup>,  
 appliqué au quadrilatère croisé cyclique  $AA'BCA$ ,  $DK' = DK$ .
- D'après Carnot "Symétrie de l'orthocentre par rapport à un côté",  $DA' = DH$ .
- Le quadrilatère  $HKA'K'$  étant un parallélogramme,  $(HK) \parallel (A'K')$ .
- **Conclusion :**  $(HK)$  est parallèle à  $(A'B)$ .



- D'après "Le théorème de Brahmagupta"<sup>4</sup>,  
 appliqué au quadrilatère orthodiagonal et cyclique  $ABA'C$ ,  $(A'B) \perp (B'D)$  ;  
 en conséquence,  $(HK) \perp (B'D)$ .

<sup>3</sup>

Ayme J.-L., A new metamorphosis of the butterfly theorem, G.G.G. vol. 7 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

<sup>4</sup>

Ayme J.-L., Le théorème de Brahmagupta, G.G.G. vol. 7 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

- **Conclusion :** (HK) est perpendiculaire à (B'D).

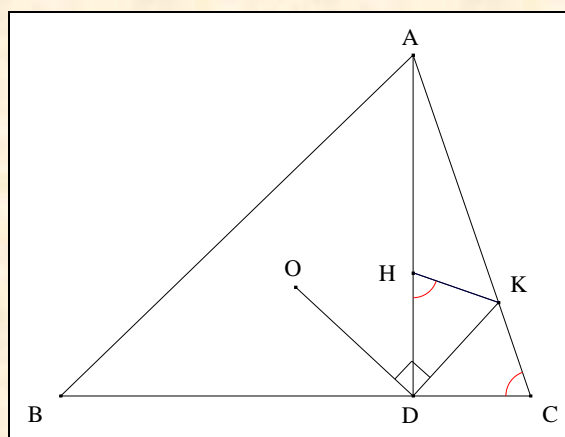
## B. DEUX ANGLES ÉGAUX

IMO Shortlist 1996 problem G3

14-th Iranian Mathematical Olympiad 1996/1997 (1375) september

### VISION

Figure :



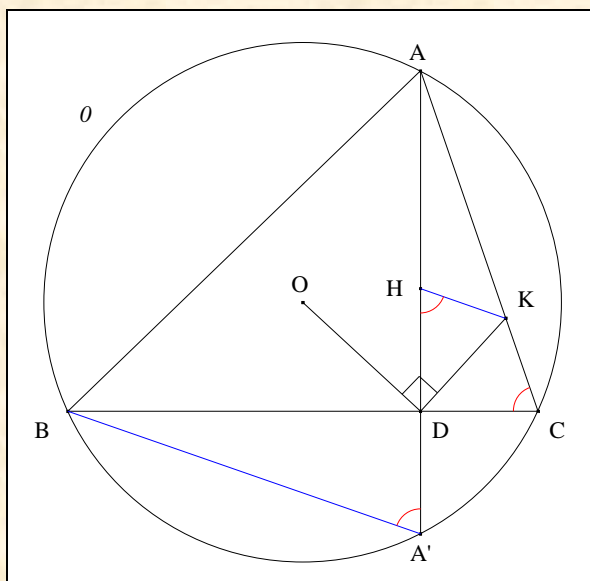
**Traits :** ABC un triangle acutangle tel que  $AC < BC < AB$ ,  
 B' le milieu de [AC],  
 H l'orthocentre de ABC,  
 D le pied de la A-hauteur de ABC,  
 O le centre du cercle circonscrit à ABC  
 et K le point d'intersection de la perpendiculaire à (OD) en D avec (AC).

**Donné :**  $\angle DHK = \angle ACB$ .<sup>5</sup>

### VISUALISATION

<sup>5</sup>

I need some pure geometry :)), AoPS du 04/10/2003 ;  
[http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1133\\_i\\_need\\_some\\_pure\\_geometry\\_ANGLE\\_EQUAL](http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1133_i_need_some_pure_geometry_ANGLE_EQUAL), AoPS du 26/11/2015 ;  
[http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1167200\\_angle\\_equal](http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1167200_angle_equal)



- Notons  $O$  le cercle circonscrit à  $ABC$   
 et  $A'$  le second point d'intersection de  $(AD)$  avec  $\theta$ .
- D'après **A.**,  $(HK) \parallel (A'B)$ .
- Une chasse angulaire :
  - \* par "Angles alterne-interne",  $\angle DHK = \angle HA'B$
  - \* par une autre écriture,  $\angle HA'B = \angle AA'B$
  - \* par "Angles inscrits",  $\angle AA'B = \angle ACB$
- **Conclusion :** par transitivité de  $=$ ,  $\angle DHK = \angle ACB$ .