PRODUIT ET QUOTIENT CÉVIEN

DE

DEUX POINTS

Jean-Louis AYME

Résumé. Nous présentons une opération binaire portant sur les centres de perspective des triangles mis en œuvre dans "The cevian nests theorem" et dans "The cross-cevian point". Cette opération conduit à une terminologie que nous rencontrons dans la formalisation moderne de certains énoncés.
Les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

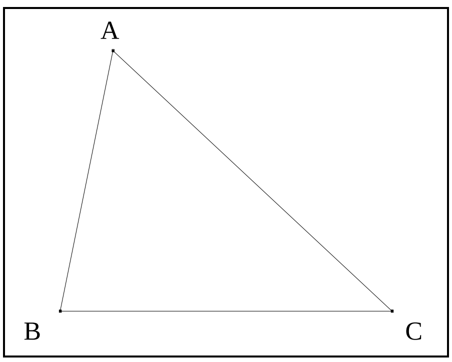
Sommaire

I. QUELQUES TERMES

1. Triangle

VISION

Figure :



Finition : A, B, C trois points distincts et non alignés.

Définitions :
(1) (A, B, C) est "un triangle" noté plus simplement ABC
(2) A, B, C sont "les sommets de ABC"
(3) [AB], [BC] et [CA] sont "les côtés de ABC".

Note historique :

Un icône du nombre trois

dans le papyrus Rhind écrit par le scribe Ahmès vers 1650 a. J.-C. et centré sur le triangle isocèle, la base porte le nom de tépro i.e. bouche, et le côté celui de mérit i.e. large.

Les grecs considérant un triangle quelconque, l'appellent tripleure (trois côtés) ou trigone (trois angles) ;

(1)	du point de vue des côtés, il peut être	scalène[1]	(trois côtés inégaux),
		isocèle[2]	(deux côtés égaux),
		isopleure	(équilatéral[3])
(2)	du point de vue des angles, il peut être	oxigone	(acutangle),
		orthogone	(rectangle),
		ambligone	(obtusangle).

Les romains emploient divers termes pour le désigner : triangulum, trigonum, triquetrum.

Les Indous nomment "avant char", un triangle isocèle dont la hauteur est égale à la base.

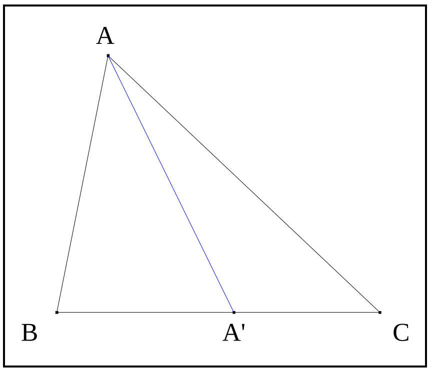
Au XVI-ième siècle, certains auteurs proposent cette définition pour le triangle :

"il ressemble par juste proportion au nombre trois: car pour le moins sont nécessaires trois points pour clore et fermer une plaine. Au moindre champs de terre, quel qu'il soit, il faut trois lisières pour le fermer : comme il appert au triangle ; la plaine est longue, large et sans profondeur"[4].

2. Cévienne

VISION

Figure :



Finition : ABC un triangle,
et A' un point de (BC), distinct de B et C.

---

[1] Du grec skalênos, d'apparence boiteuse, oblique.
Ce terme apparaît pour la première fois comme nom chez Sir Henry Billingsley dans sa traduction des *Éléments* d'Euclide en 1570 et comme adjectif en 1734 dans *The Builder's Dictionary*.

[2] Ce mot apparaît pour la première fois en 1542 ; il vient du grec isoskêles qui signifie "jambes égales".

[3] Ce mot apparaît pour la première fois en 1529.

[4] Fourrey E., *Curiosités Géométriques*, Vuibert, Paris.

Définition : (AA') est "une A-cévienne de ABC".

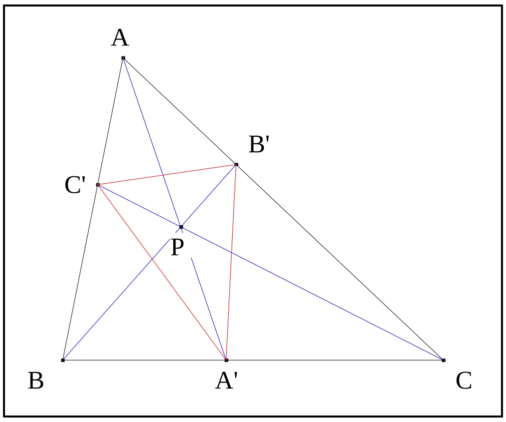
Scolie : une cévienne d'un triangle est une droite distincte des droites latérales, qui passe par l'un des sommets et qui recoupe la droite latérale opposée ;
ce point d'intersection est "le pied de la cévienne".

Note historique : le mot "cévienne" a été introduit en 1888 dans un article du *Journal de mathématiques Élémentaires*, signé par le professeur A. Poulain de la Faculté catholique d'Angers.

3. Triangle P-cévien

VISION

Figure :



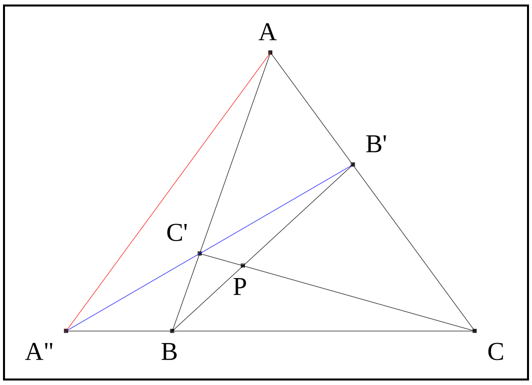
Finition :	ABC	un triangle,
	P	un point non situé sur les droites latérales de ABC
et	A', B', C'	les pieds resp. des céviennes (AP), (BP), (CP) relativement à ABC.

Définition : le triangle A'B'C' est "le triangle P-cévien de ABC".

4. Anticévienne

VISION

Figure :



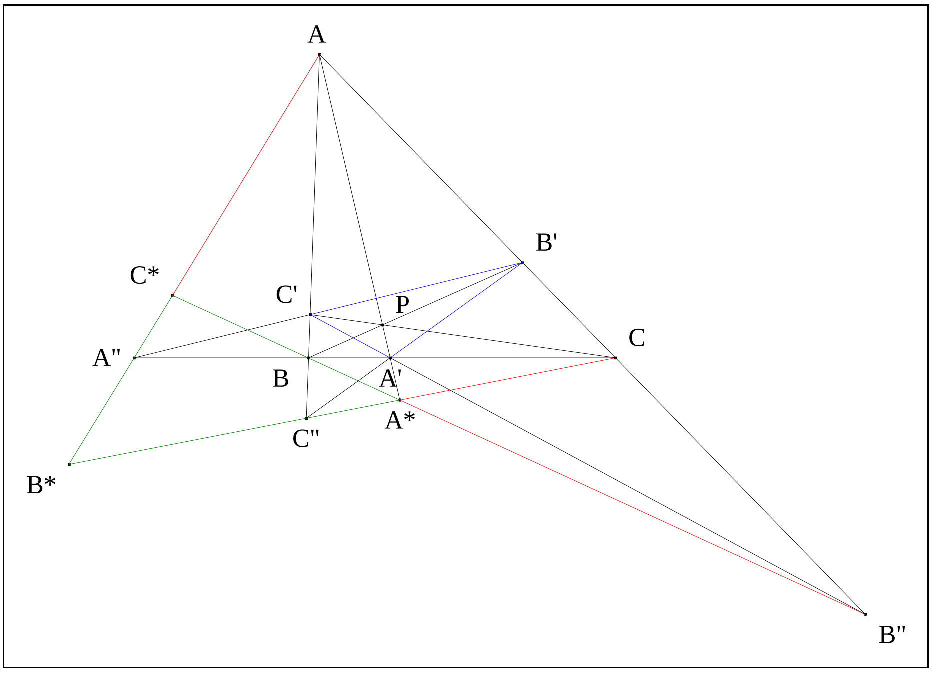
Finition : ABC	un triangle,
P	un point non situé sur les droites latérales de ABC,
B', C'	les pieds resp. des céviennes (BP), (CP) de ABC
et A"	le point d'intersection de (B'C') et (BC).

Définition : (AA") est "l'anticévienne de P relativement au sommet A de ABC" ou "la A-anticévienne de P relativement à ABC".

5. Triangle P-anticévien

VISION

Figure :



Finition : ABC	un triangle,
P	un point non situé sur les droites latérales de ABC,
A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
A", B", C"	les pieds resp. des A, B, C-anticéviennes de P relativement à ABC
et A*, B*, C*	les points d'intersection resp. de (BB") et (CC"), de (CC") et (AA"), de (AA") et (BB").

Définition : le triangle A*B*C* est "le triangle P-anticévien de ABC".

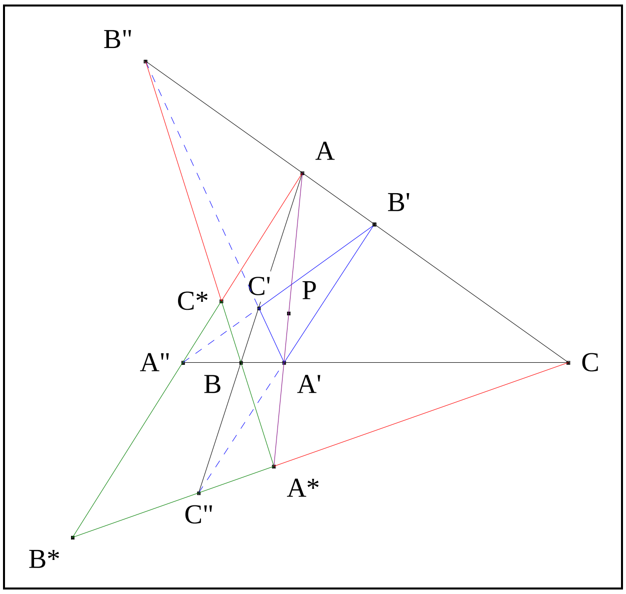
Énoncé traditionnel : le triangle anticévien d'un point P relativement à un triangle ABC
est le triangle A*B*C* tel que ABC est le triangle P-cévien de A*B*C*.

II. TRIANGLES CÉVIEN ET ANTICÉVIEN

1. Triangles P-cévien et P-anticévien[5]

VISION

Figure :

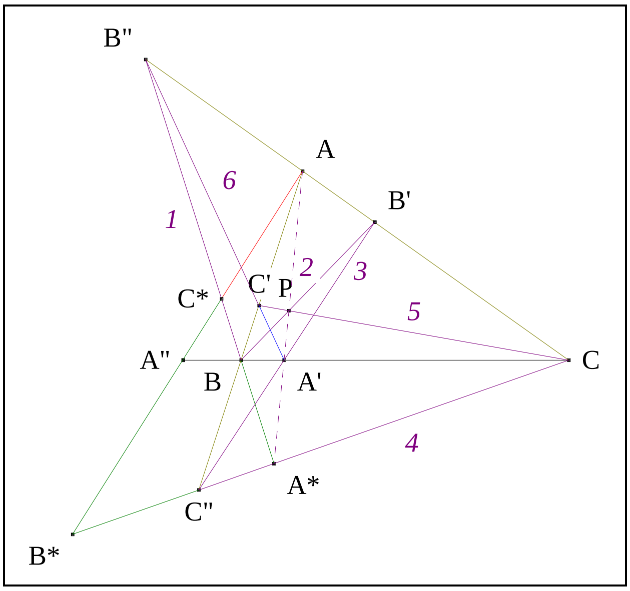


Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point non situé sur les droites latérales de ABC,
	A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
	A", B", C"	les pieds resp. des A, B, C-anticéviennes de P relativement à ABC
et	A*B*C*	le triangle P-anticévien de ABC.

Donné : A, P, A' et A* sont alignés.

VISUALISATION

5 Lemoine E., *Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Blois (1884).

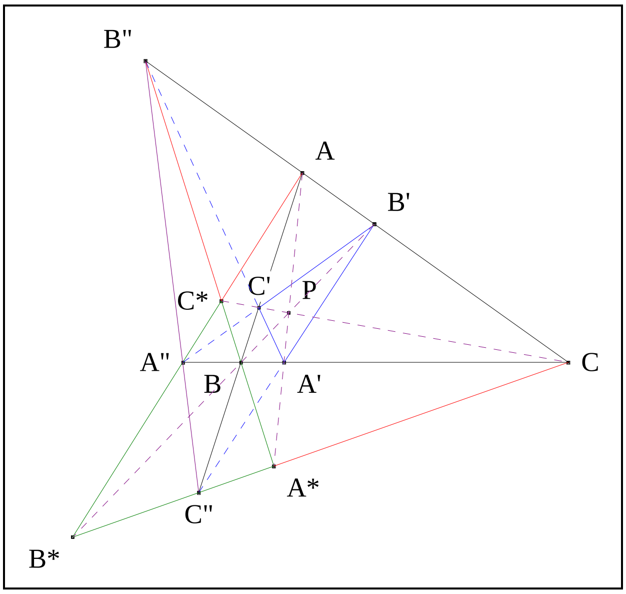


- D'après Pappus "La proposition 139", (A*PA') est la pappusienne de l'hexagone B"BB'C"CC'B" ;
  par hypothèse, A, P et A' sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, A, P, A' et A* sont alignés.

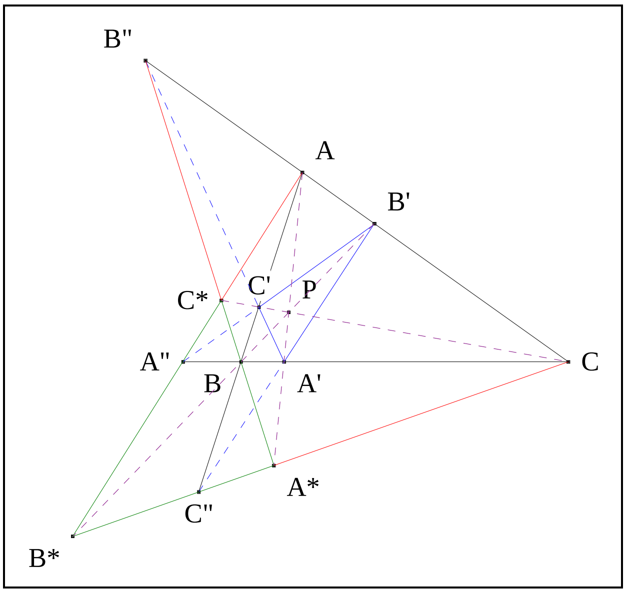
Note historique : en 1884, le géomètre français Émile Lemoine présente au Congrès de Blois de l'ACFAS, le résultat précédent permettant de construire le triangle P-anticévien d'un triangle.

Scolies : **(1)** deux autres alignements



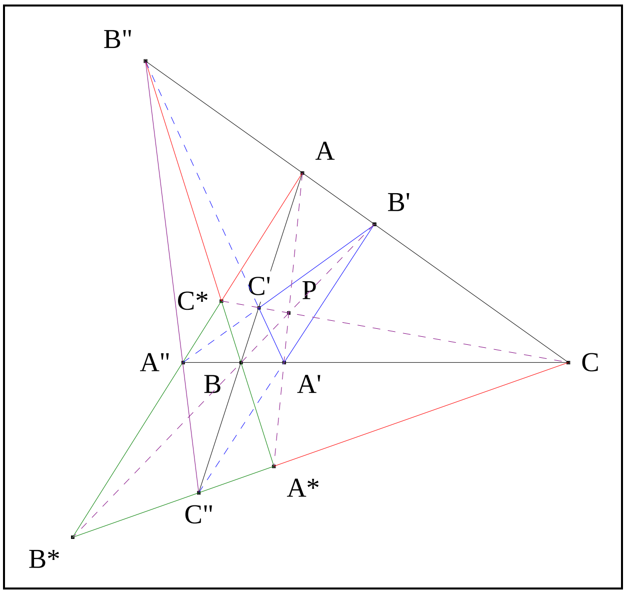
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que B, P, B' et B* sont alignés
  C, P, C' et C* sont alignés.

(2) Trois triangles en perspective



- **Conclusion :** ABC, A'B'C' et A*B*C* sont en perspective de centre P.

(3) Un quatrième alignement



- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" appliqué à ABC et A'B'C', A", B" et C" sont alignés.

Énoncé traditionnel : le triangle P-anticévien d'un triangle est en perspective avec le triangle P-cévien de ce triangle.

(4) deux quaternes harmoniques

- **Conclusion :** d'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère" (Cf. Annexe), les quaternes (A, A', P, A*) et (B, C, A', A") sont harmoniques.

Note historique : notons que c'est sous ce dernier point de vue que le capitaine d'artillerie et sous directeur de la fonderie de Toulouse, J. J. A. Mathieu[6] a approché en 1865, le résultat

---

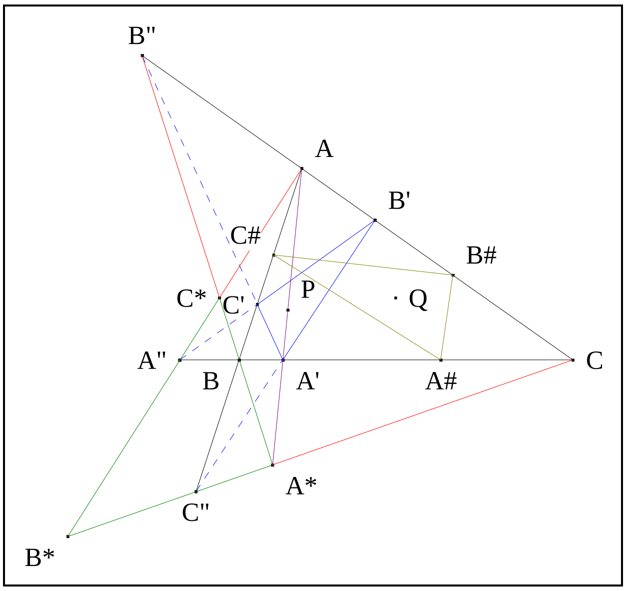
6 Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales* (1865) 399.

de Lemoine.

2. Triangles Q-cévien et P-anticévien

VISION

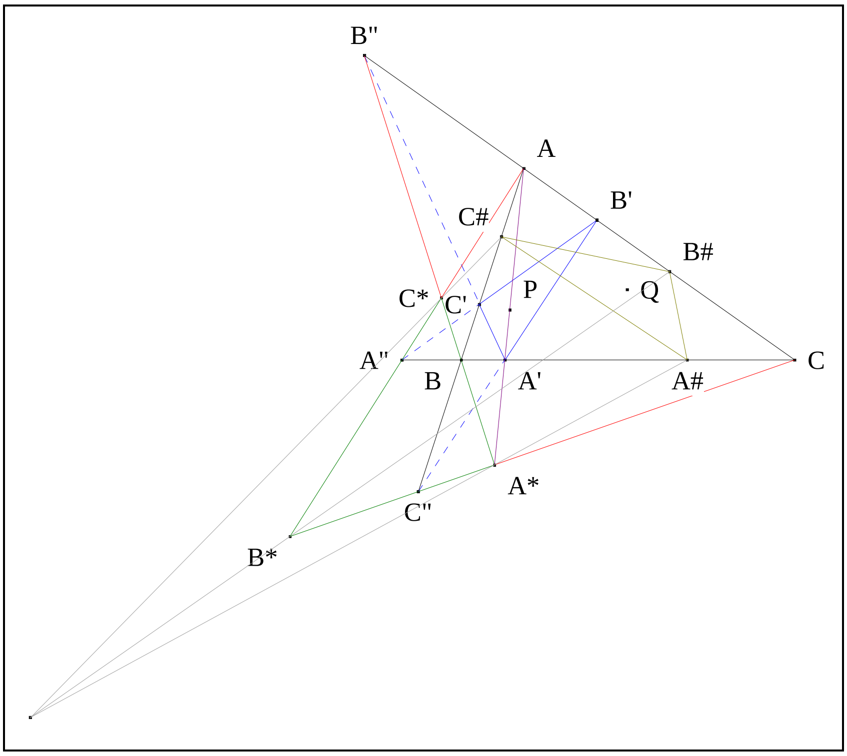
Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un point non situé sur les droites latérales de ABC,
A*B*C* le triangle P-anticévien de ABC,
Q un point non situé sur les droites latérales de ABC
et A#B#C# le triangle Q-cévien de ABC.

Donné : A#B#C# est en perspective avec A*B*C*.

VISUALISATION



- D'après II. 1. Triangles P-cévien et P-anticévien, scolie 2, ABC est en perspective avec A*B*C*.
- Nous avons : A#B#C# est inscrit dans ABC, ABC est inscrit dans A*B*C* ;
  A#B#C# est en perspective avec ABC, ABC est en perspective avec A*B*C*.
- **Conclusion :** d'après Döttl "The cevian nests theorem"[7], A#B#C# est en perspective avec A*B*C*

Énoncé traditionnel : le triangle P-anticévien d'un triangle est en perspective avec tout triangle Q-cévien de ce triangle.

Commentaire : ce résultat est à la base de la partie suivante.

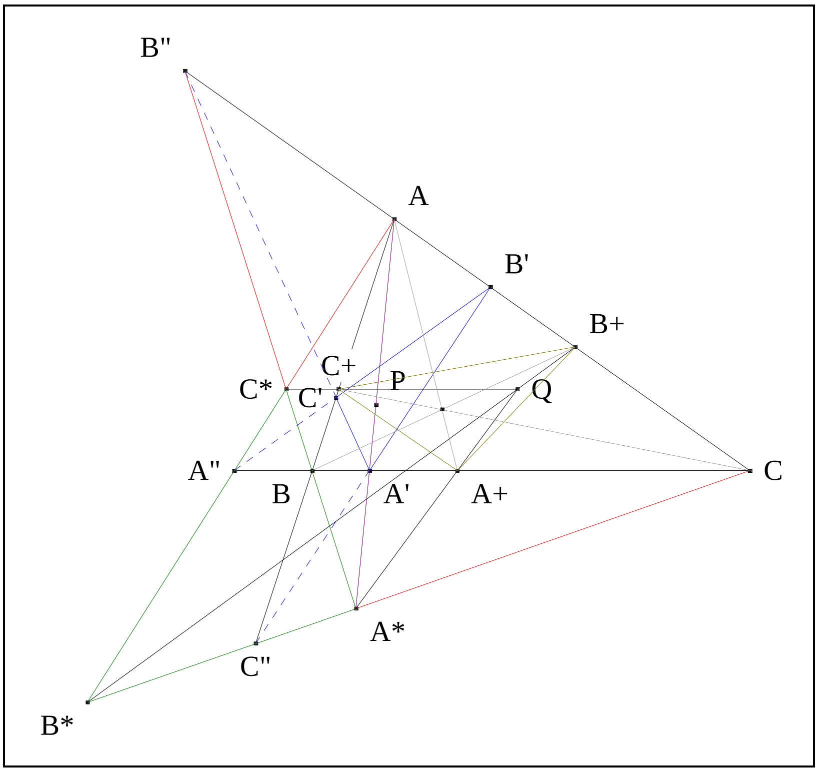
III. LE PRODUIT CÉVIEN DE P ET Q

1. The cross-cevian point

VISION

Figure :

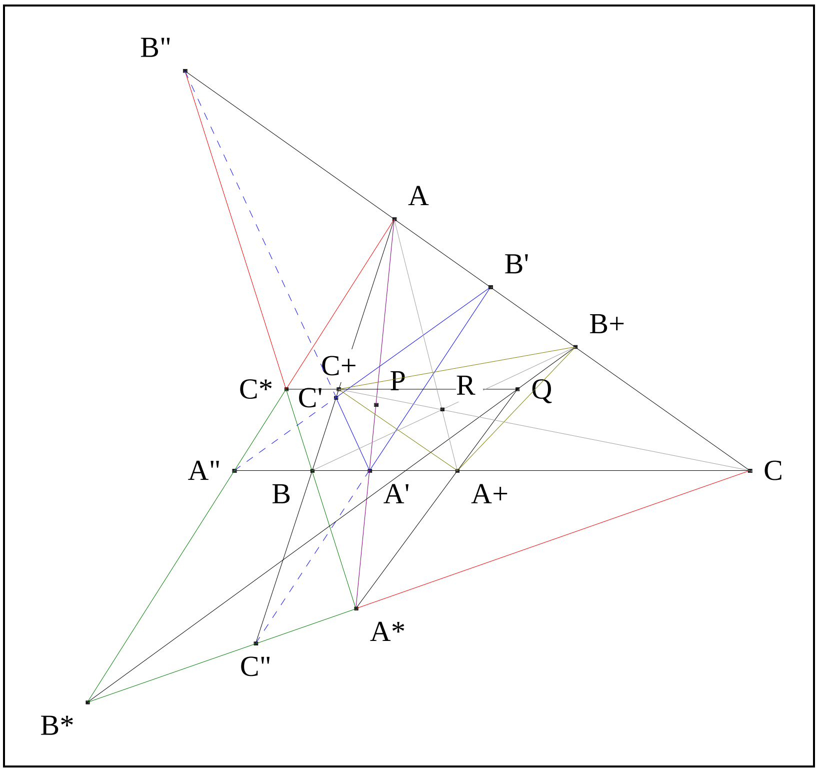
[7] Ayme J.-L., The cevian nests theorem, G.G.G. vol. 3.



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point non situé sur les droites latérales de ABC,
	A*B*C*	le triangle P-anticévien de ABC,
	Q	un point non situé sur les droites latérales de ABC
et	A+, B+, C+	les points d'intersection resp. de (QA*) et (BC), de (QB*) et (CA), de (QC*) et (AB).

Donné : A+B+C+ est en perspective avec ABC.

VISUALISATION



- D'après II. 1. Triangles P-cévien et P-anticévien, ABC est en perspective avec A*B*C*.

- Nous avons : A+B+C+ est inscrit dans ABC, ABC est inscrit dans A*B*C* ;
  A+B+C+ est en perspective avec A*B*C*, ABC est en perspective avec A*B*C*.

- **Conclusion :** d'après "The cevian nests theorem"[8], A+B+C+ est en perspective avec ABC.

- Notons R ce centre de perspective.

Scolies : **(1)** inter changeons les rôles de P et Q

- Notons : A'*B'*C'* le triangle Q-anticévien de ABC,
  et A'+, B'+, C'+ les points d'intersection resp. de (PA'*) et (BC), de (PB'*) et (CA), de (PC'*) et (AB).

- **Conclusion :** d'après "The cross-cevian point"[9],
  R est le centre de perspective des triangles A'+B'+C'+ et ABC.

(2) Définitions

- relativement à A*B*C*, R est "le cross-cevian point de P et Q"
  P est "le R-cross conjugate of Q"
  Q est "le R-cross conjugate of P".

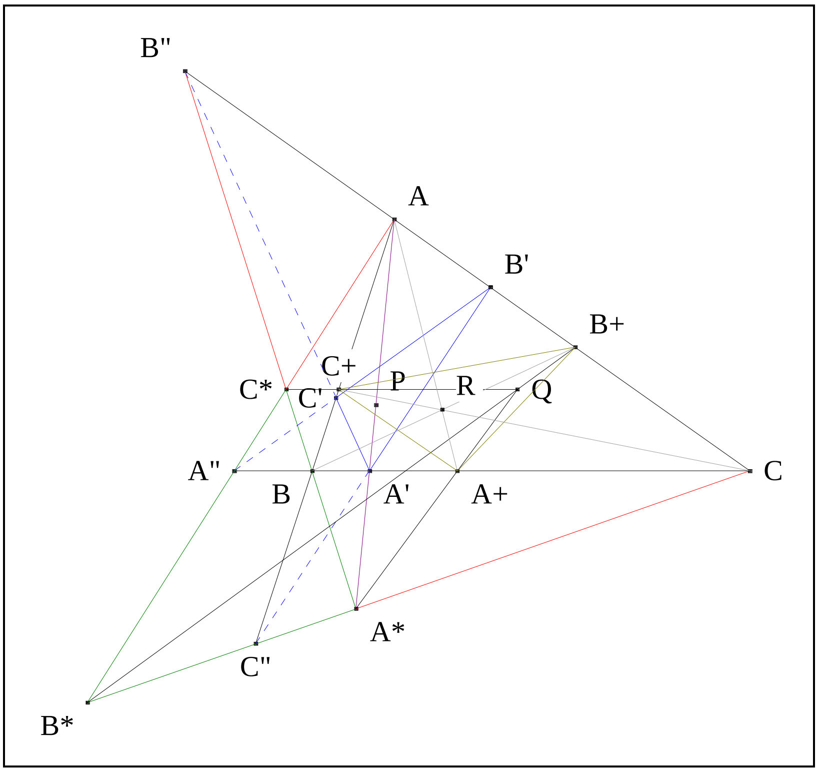
Commentaire : rappelons que ABC est le triangle de départ
et que le triangle P-anticévien d'un triangle est en perspective avec tout triangle Q-cévien de ce triangle.

---

[8] Ayme J.-L., The cevian nests theorem, G.G.G. vol. 3.
[9] Ayme J.-L., The cross-cevian point, G.G.G. vol.3.

2. Le point de Céva

Figure



Finition : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Définition :

- un enchaînement et une composition

  l'enchaînement : ABC $\rightarrow$ (P) A*B*C* $\rightarrow$ (Q) A+B+C+
  la composition : ABC $\rightarrow$ (R) A+B+C+

  où le point entre parenthèses renvoie au centre de perspective des triangles notés de part et d'autre de la flèche.

- Un enchaînement et une composition gémellaire

  l'enchaînement : ABC $\rightarrow$ (Q) A'*B'*C'* $\rightarrow$ (P) A'+B'+C'+
  la composition : ABC $\rightarrow$ (R) A'+B'+C'+ ;

- Relativement à ABC, R est "le point de Céva de P et Q"
  P est "le R-ceva conjugate of Q"
  Q est "le R-ceva conjugate of P".

3. Le produit cévien

- en respectant la notation liée à la composition,
  nous définissons l'opération "produit cévien", notée •, par R = P•Q (= Q•P)

et nous dirons que R est le produit cévien[10] de P et Q.

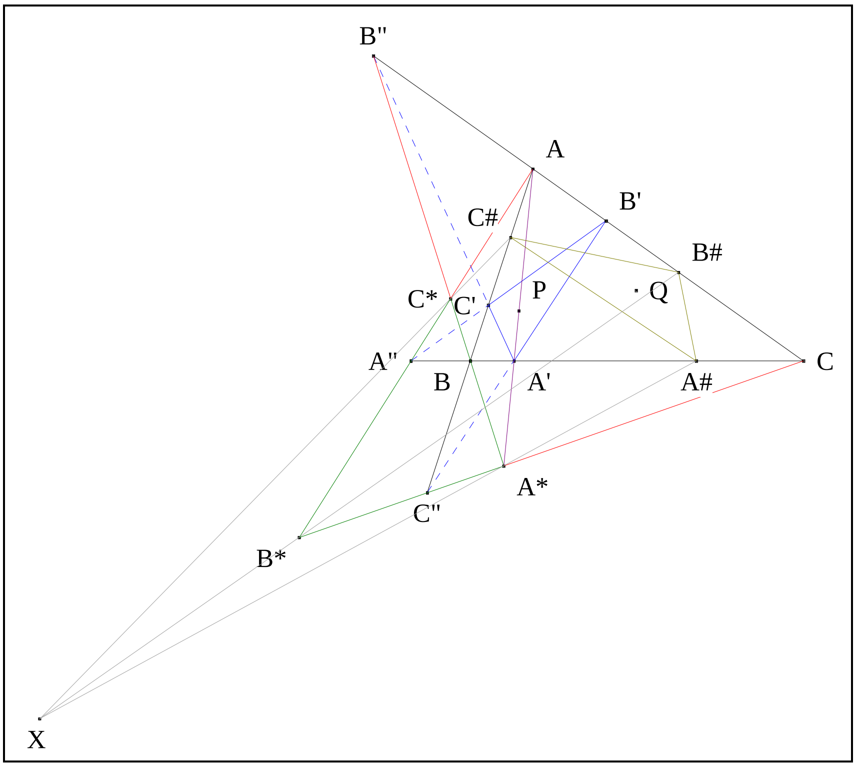
- Deux propriétés

commutativité : P•Q = Q•P
idempotence : P•P = P.

Note historique : la notation et le nom a été donné par le géomètre américain de Princeton, John Horton Conway[11].

IV. LE QUOTIENT CÉVIEN DE Q PAR P

Figure



Finition : les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.

Définition :

- D'après II. 2. Triangles Q-cévien et P-anticévien, A#B#C# est en perspective avec A*B*C*.
- Notons X ce centre de perspective.
- Nous définissons l'opération "quotient cévien", notée /, par X = Q/P
  et nous dirons que X est "le quotient cévien[12] de Q par P.

---

[10] Castellsaguer Q., The Triangles Web ; http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttweng/portada.html.
[11] Conway J., Some fruitful point on OI, Message *Hyacinthos* # 1018 du 15/06/2000.
[12] Castellsaguer Q., The Triangles Web ; http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttweng/portada.html.

Scolie : **(1)** le schéma

l'enchaînement ABC $\rightarrow$ (P) A*B*C* $\rightarrow$ (X) A#B#C#

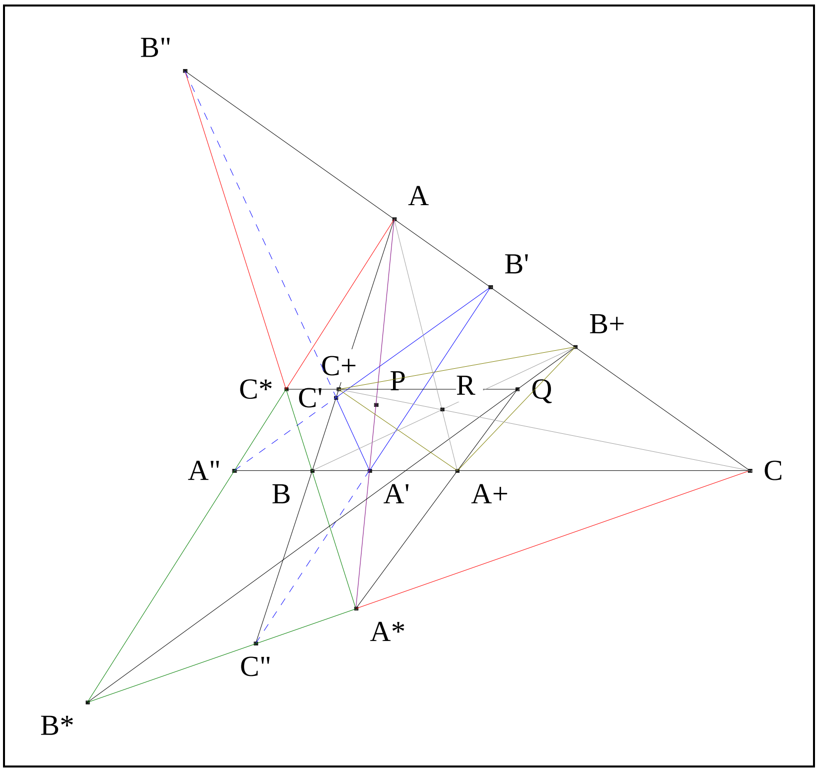
la composition ABC $\rightarrow$ (X•P) A#B#C#.

Q étant le produit cévien de X et de P, d'après la notation précédente, Q = X•P (= P•X) ; X = Q/P.

(2) Des équivalences

Q/P = X $\Leftrightarrow$ Q = X•P $\Leftrightarrow$ Q = P•X $\Leftrightarrow$ P = Q/X.

(3) Avec P, Q et R



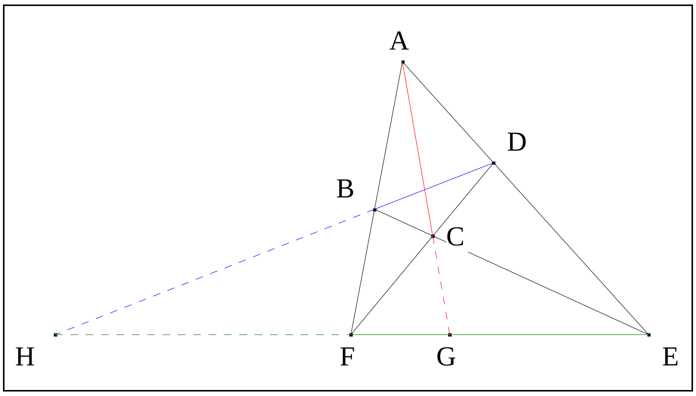
- Les hypothèses et les notations sont les mêmes que précédemment.
- D'après III. 3. Le produit cévien, R = P•Q (= Q•P).
- D'après IV. Le quotient cévien, Q = R/P et P = R/Q.

Note historique : la notation et le nom a été donné par le géomètre américain de Princeton, John Horton Conway[13].

V. ANNEXE

[13] Conway J., Some fruitful point on OI, Message *Hyacinthos* # 1018 du 15/06/2000.

Diagonales d'un quadrilatère[14]



Traits :	ABCD	un quadrilatère,
	E, F	les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),
et	G, H	le point d'intersection resp. de (AC) et (EF), de (BD) et (EF).

Donné : la quaterne (E, F, G, H) est harmonique.

[14] Pappus, *Collections*, Livre 7, proposition 131.