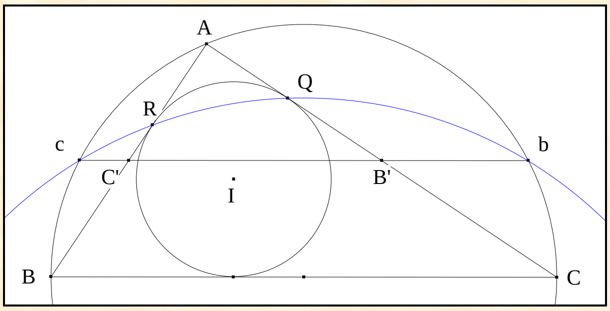
QUELQUES THÉORÈMES OUBLIÉS [1]

Jean-Louis AYME [2]

Résumé. "No problem is ever permently closed" comme le rappelle la rubrique Solutions de la revue canadienne *Crux Mathematicorum*.
Sous ce point de vue, une nouvelle solution du Problème 1671 proposé par le géomètre Toshio Seimiya mettant en jeu quelques théorèmes oubliés, est présentée.

Remerciements. Je suis reconnaissant au Professeur Francisco Bellot Rosado d'avoir répondu à ma demande en me faxant les solutions métriques de P. Penning, de son épouse Maria Ascension Lopez Chamorro ainsi que la sienne. Cette aide a contribué sans aucun doute à l'éclosion de cet article.
Je remercie le professeur Ercole Suppa de Teramo (Italie) d'avoir relu et corrigé cet article.

1. Le problème de Toshio Seimiya. [1]



Hypothèses :	ABC	un triangle rectangle en A,
	B', C'	les milieux des côtés [AC], [AB],
	Γ	le cercle circonscrit à ABC,
	b, c	les points d'intersection de la droite (B'C') avec Γ,
	γ	le cercle de centre I, inscrit dans ABC
et	Q, R	les points de contact de γ avec [AC] et [AB].

Conclusion : les points b, c, Q et R sont cocycliques.

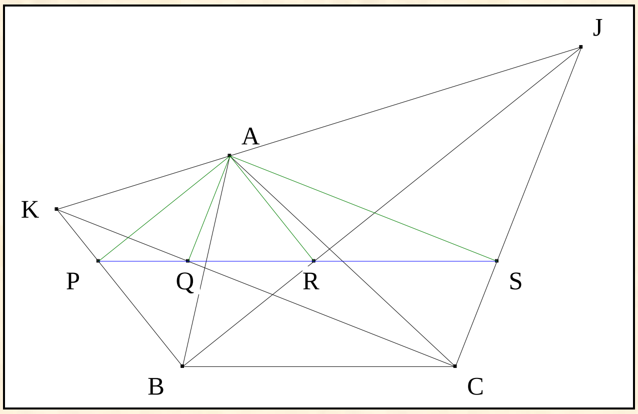
2. Le théorème d'Arthur Lascases ou Lescaze.

Elève de Gérono (1799-1892), le français Lascases de Lorient a publié dans les *Nouvelles Annales* de 1859, le résultat suivant [2] :

---

1 Ayme J.-L., Algunos teoremas olvidados, *Revistaoim* **10** (2003) ; http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

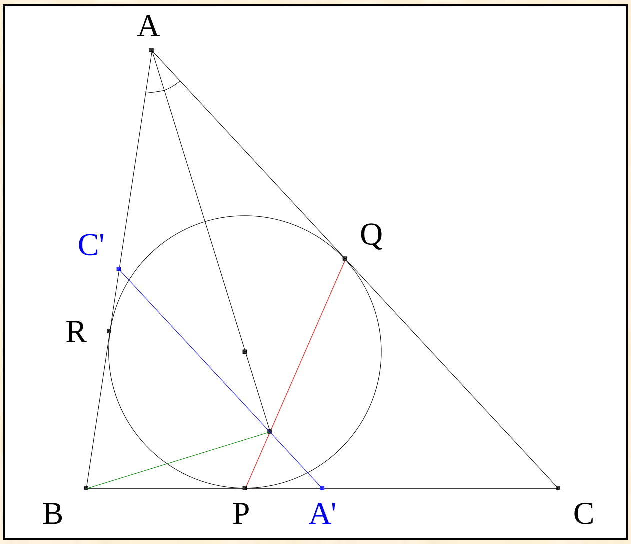
2 Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France) ; jeanlouisayme@yahoo.fr



Hypothèses :	ABC	un triangle,
	B', C'	les milieux des côtés [CA], [AB],
	J, K	les points excentraux de ABC en B, en C
et	P, Q, R, S	les pieds des perpendiculaires abaissées de A sur (BK), (CK), (BJ) et (CJ).

Conclusion : les points P, Q, R et S sont alignés sur la droite (B'C').

3. An unlikely concurrence.
Ce théorème qui a été étudié par Ross Honsberger [3], avait déjà été proposé comme exercice par Nathan Altshiller-Court [4] et résolu auparavant par Georges Papelier [5] dans le cas d'un triangle rectangle.



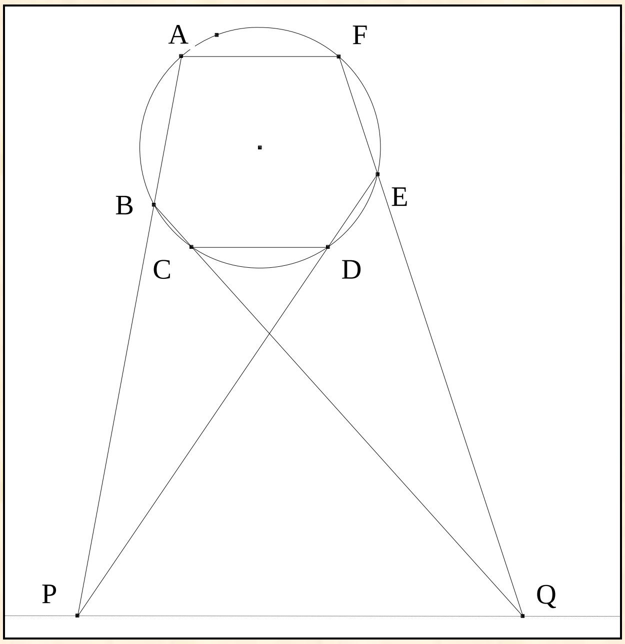
Hypothèses :	ABC	un triangle non isocèle en A,
	A', C'	les milieux des côtés [BC], [AB],
	γ	le cercle inscrit dans ABC,
	P, Q, R	les points de tangence de γ avec les côtés [BC], [CA], [AB],
	Δa	la A-bissectrice de ABC
et	Db	la perpendiculaire à Δa passant par B.

Conclusion : les droites Δa, Db et (PQ) sont concourantes sur (A'C').

Remarque : la droite (A'C') n'est mentionnée par aucun des auteurs cités précédemment.

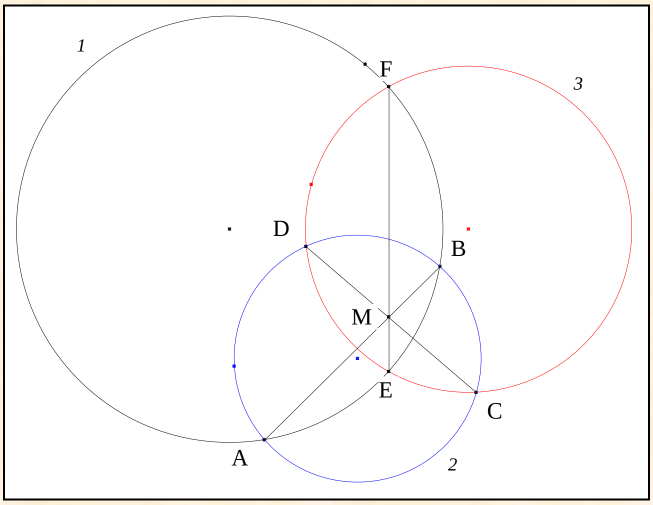
4. Le théorème d'Aubert.
En 1899, Paul Aubert [6] démontre un cas particulier de "L'hexagramma mysticum" de Pascal (1623-1662).

ABCDEFA étant un hexagone cyclique
si, (AF) // (CD)



alors, (PQ) // (AF)

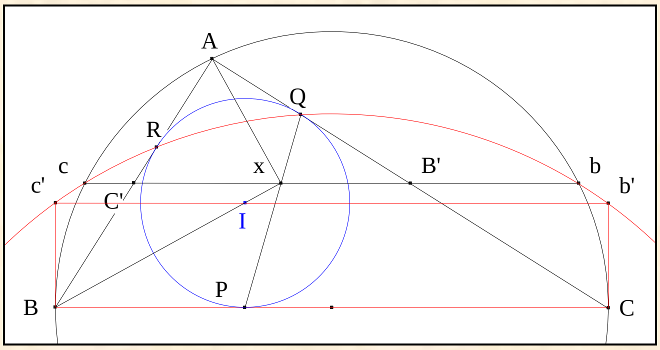
5. Le théorème des trois cordes de Monge.
Ce remarquable résultat a été attribué à Gaspard Monge (1746-1818) par Jean Victor Poncelet [8].



Hypothèses :	*1*, *2*, *3*	trois cercles sécants deux à deux,
	A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
	C, D	les points d'intersection de *2* et *3*
	E, F	les points d'intersection de *3* et *1*
et	M	le point d'intersection des cordes [AB] et [CD].

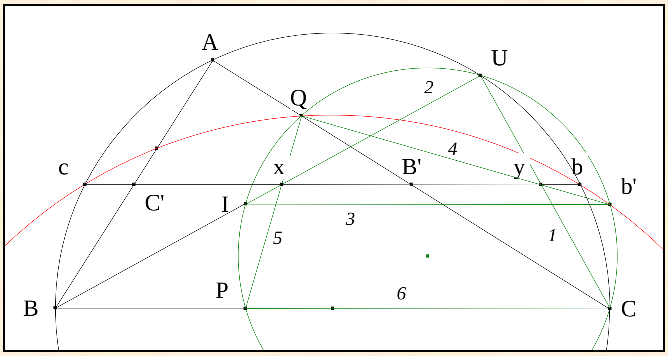
Conclusion : la corde [EF] passe par M.

6. Une nouvelle preuve du problème de T. Seimiya.



- Notons x le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur la bissectrice (BI);
  d'après Papelier, x est sur la droite (PQ);
  d'après Lascases, x est sur (B'C').
  D'après Thalès, (B'C') // (BC) i.e. (bc) // (BC).

- Notons b', c' les points tels que BCb'c' soit un rectangle dont le côté [b'c'] passe par I;
  le trapèze c'b'bc étant isocèle, est cyclique.



- Notons U le second point d'intersection de la B-bissectrice de ABC avec Γ
  et y le point d'intersection des droites (CU) et (Qb').
  D'après Thalès, le triangle UBC étant inscriptible dans un demi-cercle, est rectangle en U.

- Traçons le cercle vert de diamètre [CI]; il passe par les points P, Q, U et b';
  d'après Aubert, la droite (xy) de l'hexagone cyclique CUIb'QPC est parallèle à (BC);
  d'après le postulat d'Euclide, (xy) passe par b.

- D'après le théorème des trois cordes appliquées aux cercles noir, rouge et vert, le cercle rouge passe par Q.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que le cercle rouge passe par R.

- **Conclusion :** les points b, c, Q et R sont cocycliques.

Références (historiques et académiques)

[1] Toshio Seimiya (mars 1910-), Problem 1671, *Crux Mathematicorum* **8**, vol 17, (1991) 237
P. Penning, Solution to problem 1671, *Crux Mathematicorum* **7**, vol **18**, (1992) 216-218
[2] Arthur Lascases, Question 477, *Nouvelles Annales* **18** (1859) 171
F.G.M., Théorème 165, *Exercices de Géométrie*, (1920) 327, Rééditions J. Gabay
[3] R. Honsberger, An unlikely concurrence, *Episodes in Nineteeth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA (1995) 31
[4] N. Altshiller-Court, Exercise 43, *College Geometry*, Barnes & Noble, Inc. (1952) 118
[5] G. Papelier G., Pôles et polaires, *Exercices de géométrie Modernes* (1927), Rééditions J. Gabay, 19
[6] P. Aubert, Généralisation du problème de Pascal donnant neuf points en ligne droite, *Journal de mathématiques élémentaires* (1899)
P. Aubert P., Question 4604, *Journal de mathématiques élémentaires* de Vuibert (1899) 2
F.G.M., Théorème 374 III, *Exercices de Géométrie*, (1920) 560, Eds. Gabay
[7] J. L. M'Kensie , *Journal de Mathématiques Spéciales* de de Longchamps(1887) 201
[8] J. V. Poncelet, tome 1, *Traité projective des figures* (1822) 40