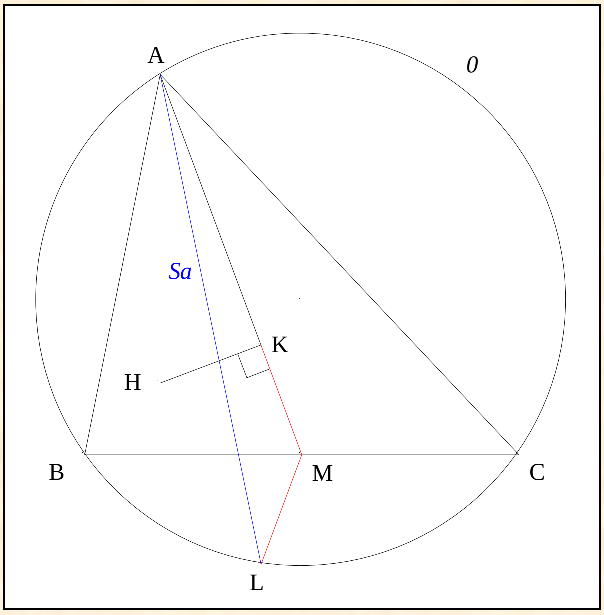
QUICKIES 1

✝

La sculpture donne de l'âme au problème

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente neuf "Quickies" relevés, ici où là, au gré des ses lectures, et accompagnés de leur solution relevant d'un point de vue personnel...
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents nine "Quickies" accompanied by their solution with a personal point of view...
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Sommaire

[1] Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 31/12/2013

POINT DE VUE

…en enlevant tout ce qu'il y a en trop
pour ne retenir que l'essentiel.

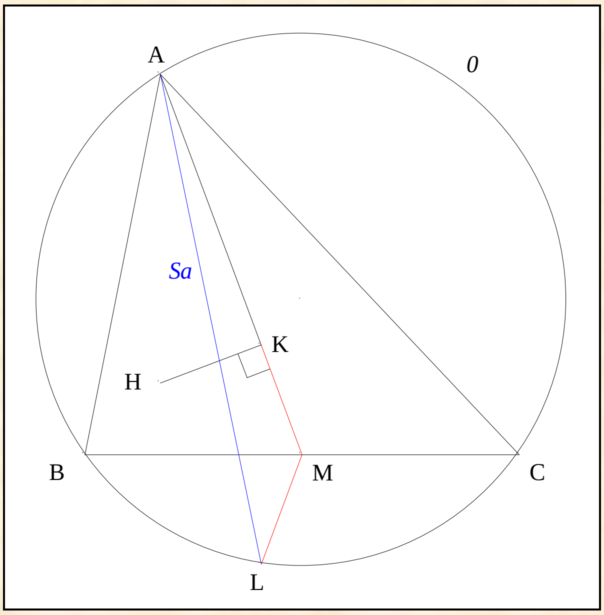
Sensible aux lignes pures, belles et puissantes, l'auteur agit dans cette série de "Quickies" comme un sculpteur.
Le problème de Géométrie analogue à un bloc de pierre, est taillé directement, sans modèle préalable, à l'aide d'élégants théorèmes eux-mêmes dépourvus de tout superflu. Cette taille permet de dégager de sa gangue et de faire émerger une forme imaginée par l'auteur…

QUICKIE 1 [2]

Art of Problem Solving

VISION

Figure :



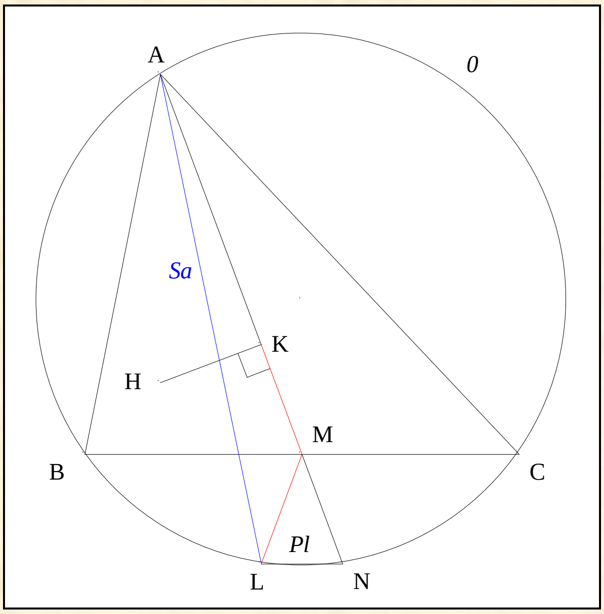
Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	H	l'orthocentre de ABC,
	M	le milieu de [BC],
	K	le pied de la perpendiculaire à (AM) issue de H,
	Sa	la A-symédiane de ABC
et	L	le second point d'intersection de *Sa* avec *0*.

Donné : MK = ML.

Commentaire : le cercle des milieux.

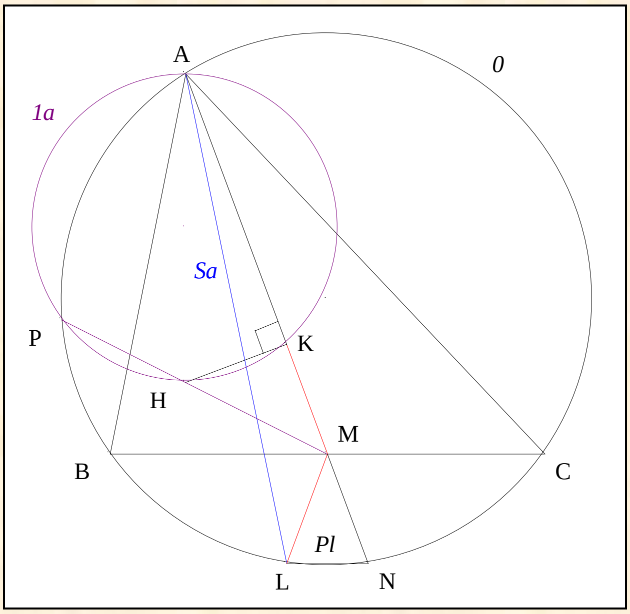
VISUALISATION

[2] Mk = ml, AoPS du 12/11/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=562291



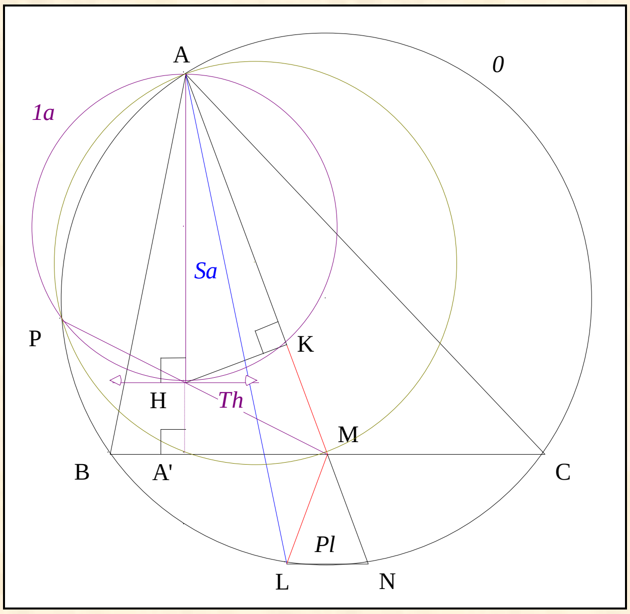
- Notons *Pl* la parallèle à (BC) issue de L
  et N le second point d'intersection de *Pl* avec *0*.

- Par symétrie d'axe la médiatrice de [BC], ML = MN.



- Notons *1a* le cercle de diamètre [AH]
  et P le second point d'intersection de *1a* et *0*,

- Par culture géométrique, P, H et M sont alignés.

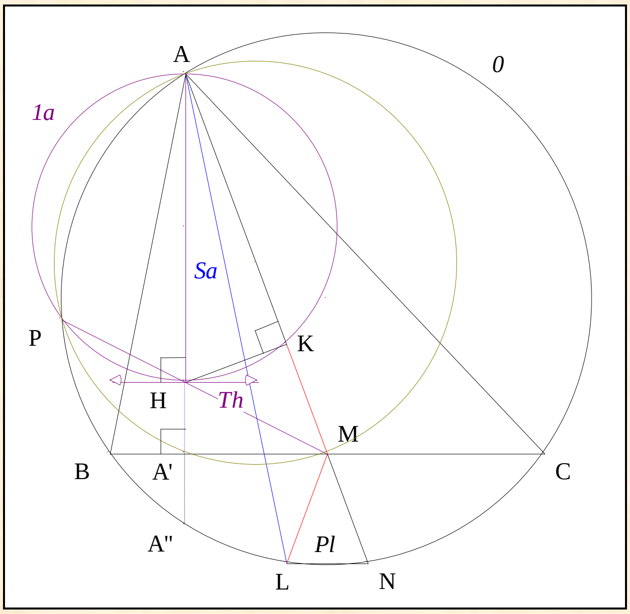


- Notons A' le pied de la A-hauteur de ABC
  et *Th* la tangente à *1a* en H.

- **Scolie :** *Th* // (A'M).

- Le cercle *1a*, les points de base A et P, les moniennes naissantes (HAA') et (HPM), les parallèles *Th* et (A'M), conduisent au théorème **1''** de Reim ; en conséquence, A, P, A' et M sont cocycliques.

- Notons *1'a* ce cercle.



- Notons A" la circumtrace de la A-hauteur de ABC.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté", A' est le milieu de [HA"].

- En conséquences, **(1)** *1'a* est le cercle des milieux de *0* et *1a*
  (2) MN = MK.

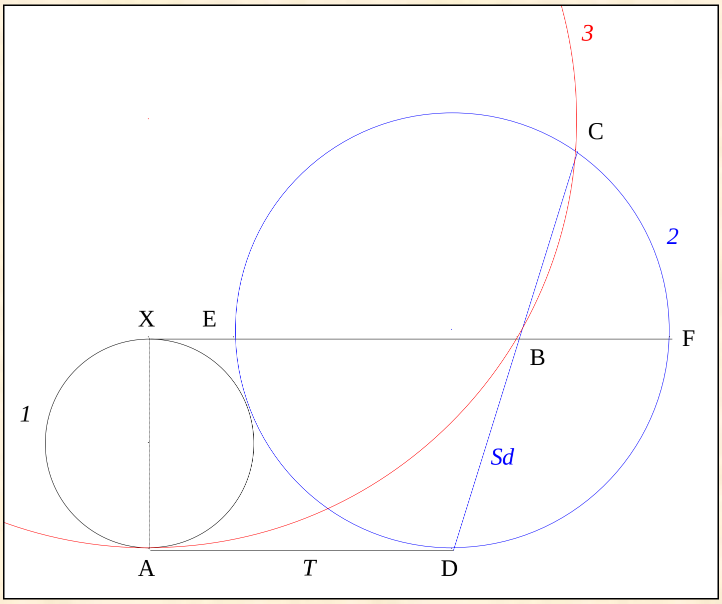
- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, ML = MK.

QUICKIE 2 [3]

Art of Problem Solving (2013)

VISION

Figure :



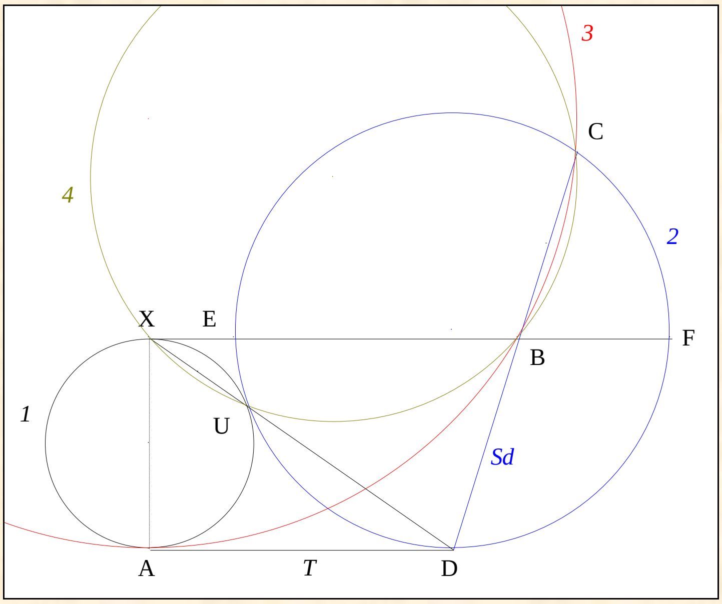
Traits :	*1*, *2*	deux cercles tangents extérieurement comme indiqué sur la figure,
	T	l'une des deux tangentes communes à *1* et *2*,
	A, D	les points de contact de *T* resp. avec *1*, *2*,
	X	l'antipôle de A relativement à *1*
	E, F	les points d'intersection de la parallèle à (AD) issue de X avec *2*,
	Sd	une sécante à *2* issue de D
	B, C	les points d'intersection de *Sd* resp. avec [EF], *2*
et	*3*	le cercle passant par A, B, C.

Donné : *3* est tangent à (AD) en A.

Commentaire : le théorème des trois cordes.

VISUALISATION

[3] Prove with inversion, AoPS du 10/11/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=561939



- Notons U le point de contact de *1* et *2*.

- **Scolies :** **(1)** X, U et D sont alignés
  (2) *T* // (XB).

- Le cercle *2*, les points de base U et C, les moniennes naissantes (DUX) et (DCB), les parallèles *T* et (XB), conduisent au théorème **1''** de Reim ; en conséquence, U, C, X et B sont cocycliques.

- Notons *4* ce cercle.

- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" [4],
  appliqué à *1*, *3* et *4*, *3* est tangent à (AD) en A.

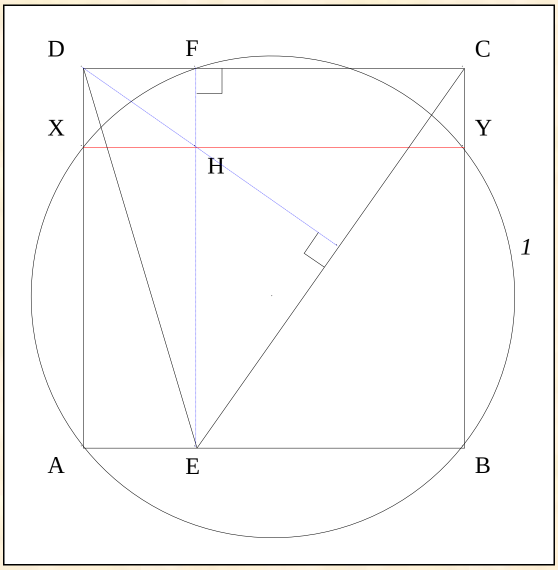
[4] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

QUICKIE 3 [5]

J275 *Mathematical Reflection* **4** (2013)

VISION

Figure :



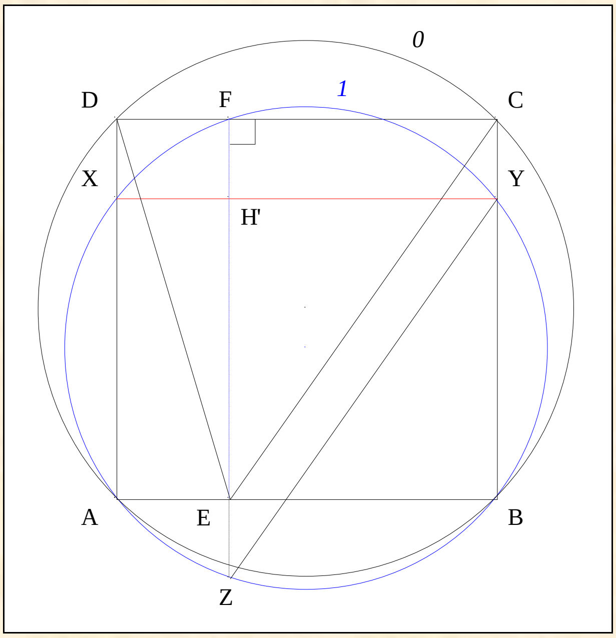
Traits :	ABCD	un carré,
	E	un point de [AB],
	F	le pied de la perpendiculaire à (CD) issue de E,
	1	le cercle passant par A, B, F
	X, Y	les points d'intersection de *1* resp. avec (AD), (BC).
et	H	l'orthocentre du triangle CDE.

Donné : H est sur (XY).

Commentaire : le théorème de Brahmagupta.

VISUALISATION

5 Andreescu T., University of Texas, Dallas (USA), **J275**, *Mathematical Reflection* 4 (2013) ;
https://www.awesomemath.org/assets/PDFs/MR_4_2013_Solutions.pdf
Ayme J.-L., For an original proof, AoPS du 12/11/2013 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=562418



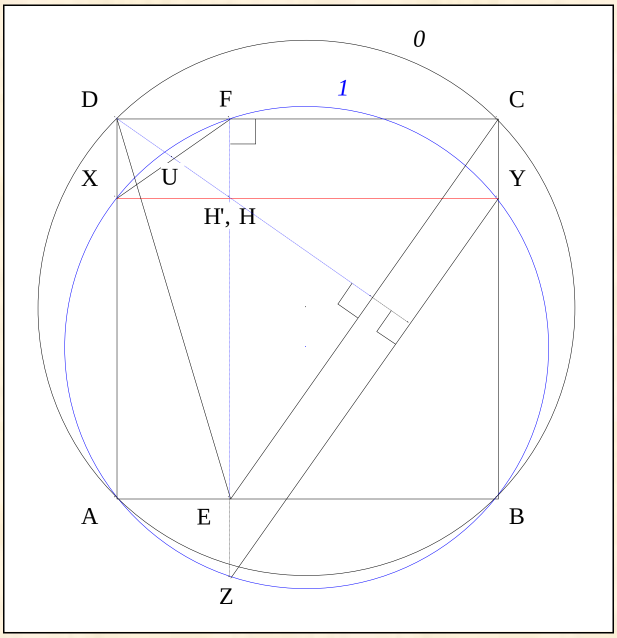
- Notons 0 le cercle circonscrit à ABCD,
  Z le second point d'intersection de (EF) avec 0 comme indiqué sur la figure
  et H' le point d'intersection de (EF) et (XY).

- Une chasse segmentaire :

  * le quadrilatère CFHY étant un rectangle, (CY) // (FH) et CY = FH

  * le quadrilatère cyclique ABYX étant un rectangle, (FH) = (EZ) FK = EZ

- **Conclusion partielle :** le quadrilatère CYZE étant un parallélogramme, (CE) // (YZ).



- Notons U le milieu de [XF].

- Le quadrilatère DXH'F étant un rectangle, D, U et H' sont alignés.

- D'après "Le théorème de Brahmagupta" [6], $(DH') \perp (YZ)$
  nous savons que $(YZ) \parallel (CE)$
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, $(DH') \perp (CE)$.

- D'après Archimède, H' est l'orthocentre du triangle CDE
  et H' et H sont confondus

- **Conclusion :** H est sur (XY).

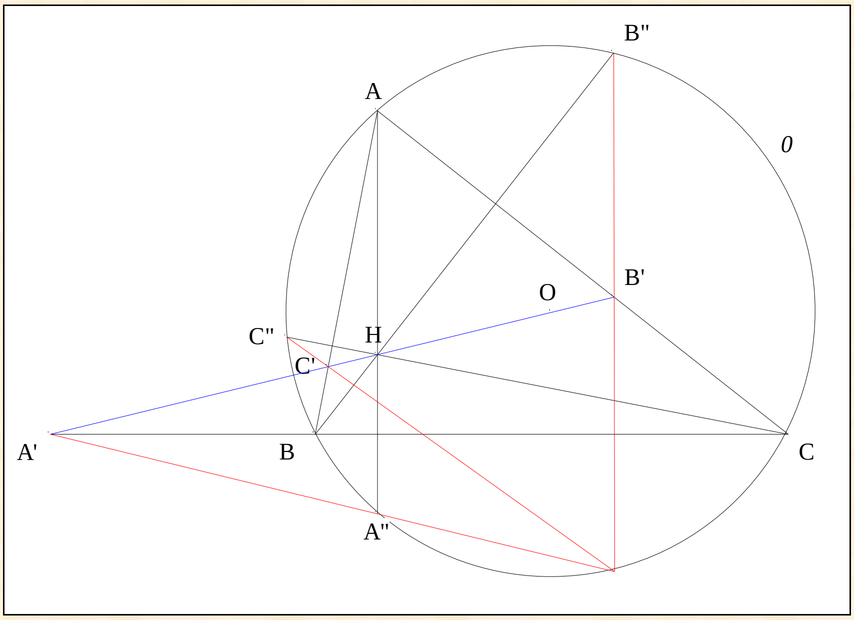
[6] Ayme J.-L., Le théorème de Brahmagupta, G.G.G. vol. **7** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

QUICKIE 4 [7]

Lemoine E., Question **1038-3**, *Mathesis* (1896) 174

VISION

Figure :



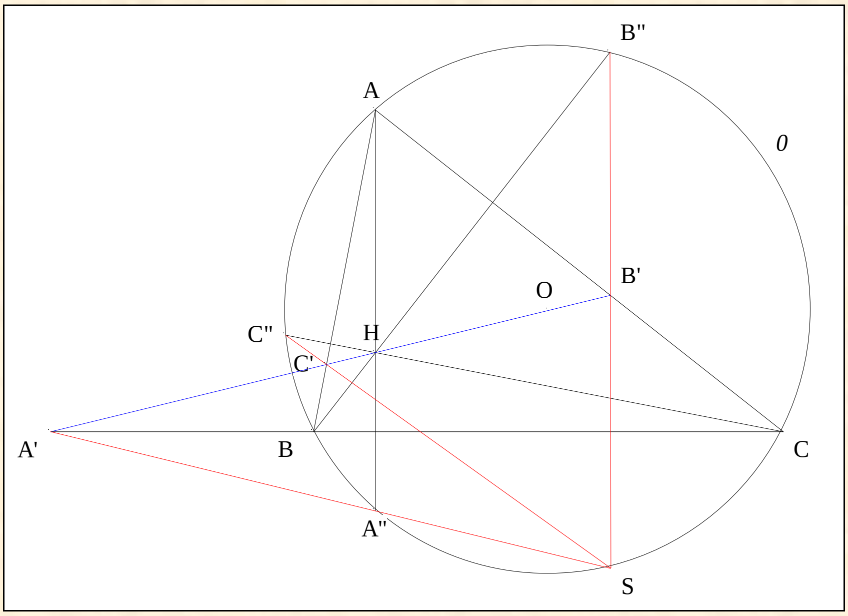
Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	A', B', C'	les points d'intersection de (OH) resp. avec (BC), (CA), (AB),
et	A", B", C"	les circumtraces de (AH), (BH), (CH).

Donné : (A'A"), (B'B") et (C'C") concourent sur *0*. [8]

Commentaire : la P-transversale de Q et symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté.

VISUALISATION

[7] Concurrent **1**, AoPS du 15/11/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=562726
[8] Lemoine E., Question **1038**, *Mathesis* 2, V (1895) 216



- **Conclusion :** d'après "L'équivalence de Clawson-Ayme" [9]
  appliqué à la transversale (A'B'C') et au point H,
  (A'A"), (B'B") et (C'C") concourent sur *0*.

- Notons S ce point.

- **Scolie :** (OH) est la droite d'Euler de ABC.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté",

  * A' est le symétrique de H par rapport à (BC)
  * B' est le symétrique de H par rapport à (BC)
  * C' est le symétrique de H par rapport à (BC)

  en conséquences,
  * (A'A") est la symétrique de (OH) par rapport à (BC)
  * (B'B") est la symétrique de (OH) par rapport à (CA)
  * (C'C") est la symétrique de (OH) par rapport à (AB).

- **Scolie :** S est l'antipoint d'Euler de ABC [10]. (Euler reflection point or X_{110})

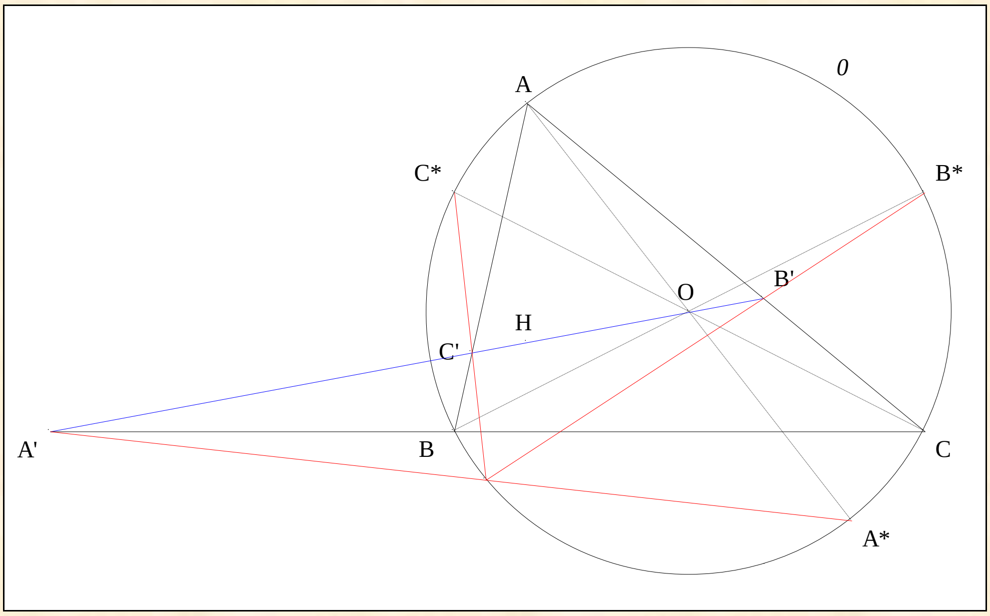
9 Ayme J.-L., La P-transversale de Q, G.G.G. vol. **3**, p. 8-12 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
10 Ayme J.-L., Euler reflexion point ou l'antipoint d'Euler, G.G.G. vol. **25** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

QUICKIE 5 [11]

Lemoine E., Question **1038-1, 2**, *Mathesis* (1896) 174

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	A', B', C'	les points d'intersection de (OH) resp. avec (BC), (CA), (AB),
et	A*, B*, C*	les circumtraces de (AO), (BO), (CO).

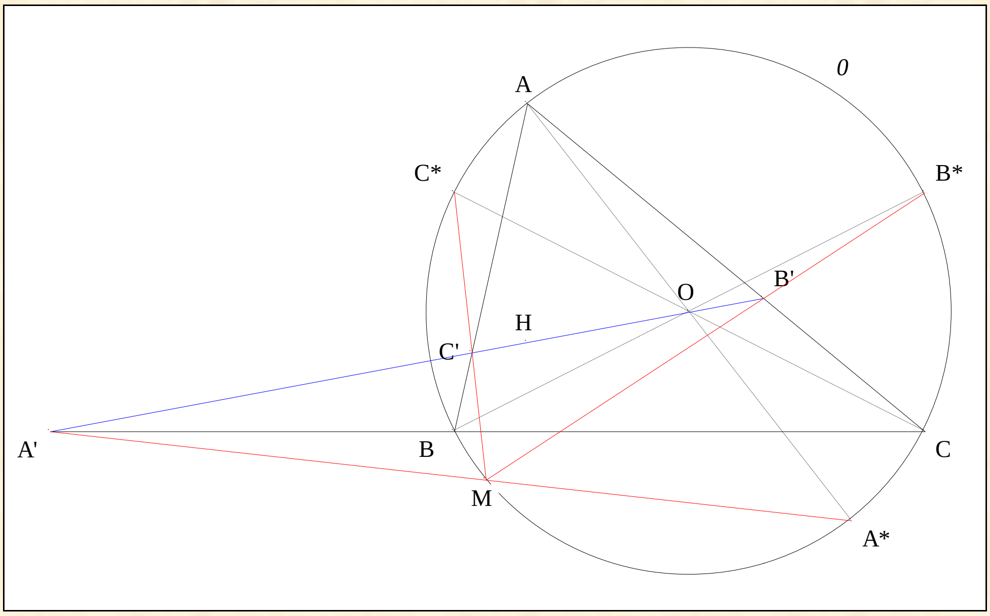
Donné : (A'A*), (B'B*) et (C'C*) concourent sur *0*. [12]

Commentaire : la P-transversale de Q et symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté.

VISUALISATION

[11] Concurrent **2**, AoPS du 16/11/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=562861

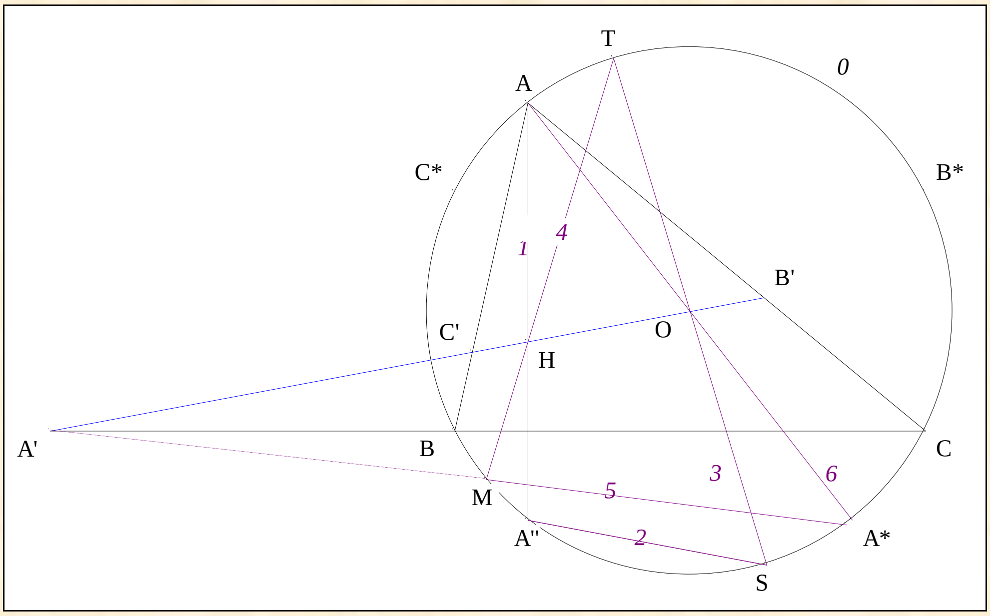
[12] Lemoine E., Question **1038**, *Mathesis* 2, V (1895) 216



- **Conclusion :** d'après "L'équivalence de Clawson-Ayme" [13]
  appliqué à la transversale (A'B'C') et au point O,
  (A'A*, (B'B*) et (C'*) concourent sur *0*.

- Notons M ce point.

Scolie : avec le point de Tarry



- Notons S l'antipoint d'Euler de ABC [14]
  T le point d'intersection de (SO) et (MH),
  A" la circumtrace de (AH)
  et M le point défini précédemment.

- D'après Pascal "Hexagramma mysticum" [15]

---

13 Ayme J.-L., La P-transversale de Q, G.G.G. vol. **3**, p. 8-12 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

14 Voir Quickie **4**

15 Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. **12** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

(A'HO) étant la pascale de l'hexagone AA"STMA*A, T est sur *0*.

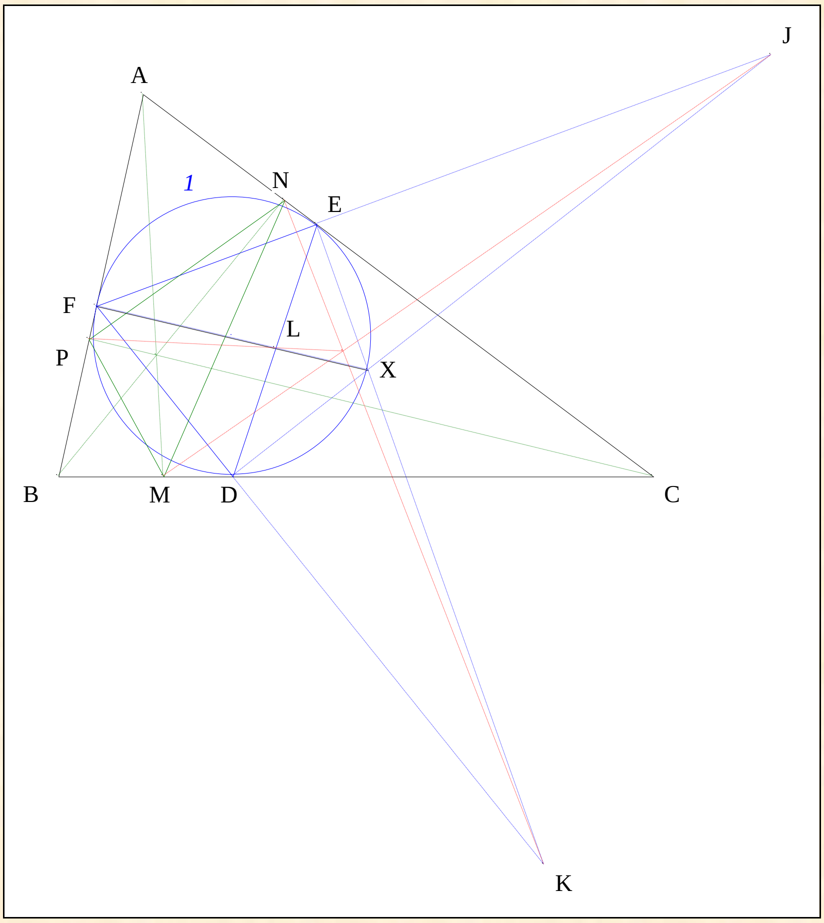
- **Conclusion :** T étant l'antipôle de S relativement à *0*, T est le point de Tarry (X_{98}) de ABC.

QUICKIE 6 [16]

Albanian MO

VISION

Figure :



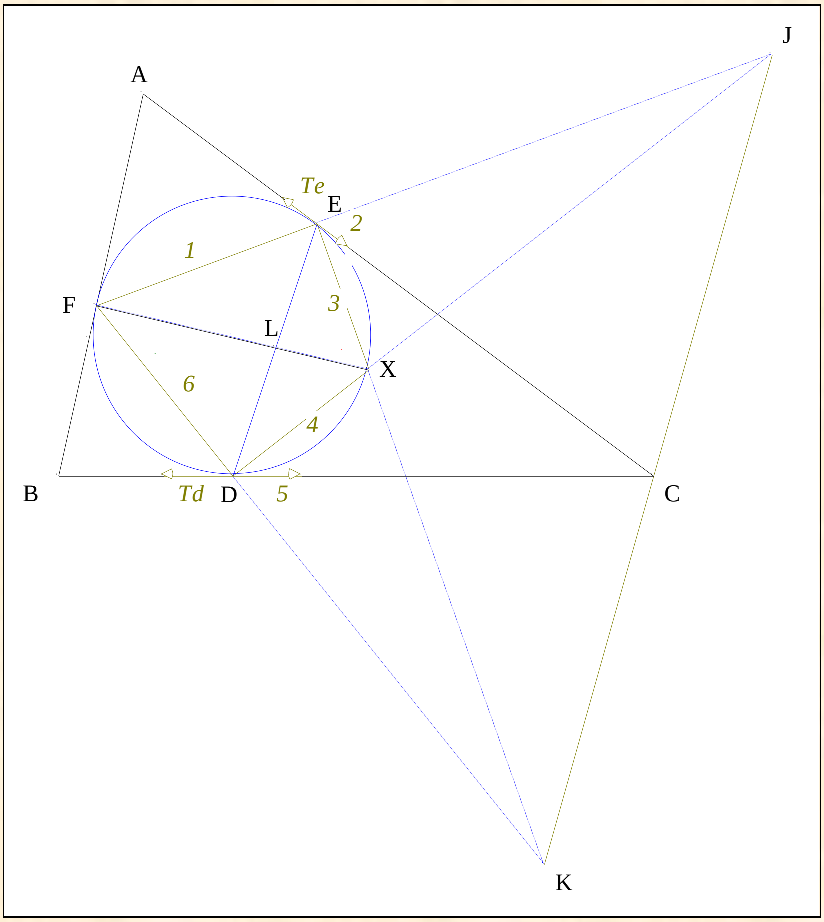
Traits :	ABC	un triangle,
	1	le cercle inscrit à ABC,
	DEF	le triangle de contact de ABC,
	X	un point de *1*,
	J, K, L	les points d'intersection resp. de (DX) et (EF), (EX) et (FD), (FX) et (DE),
et	MNP	un triangle cévien de ABC.

Donné : (MJ), (NK) et (PL) sont concourantes.

Commentaire : the cevian nests theorem.

VISUALISATION

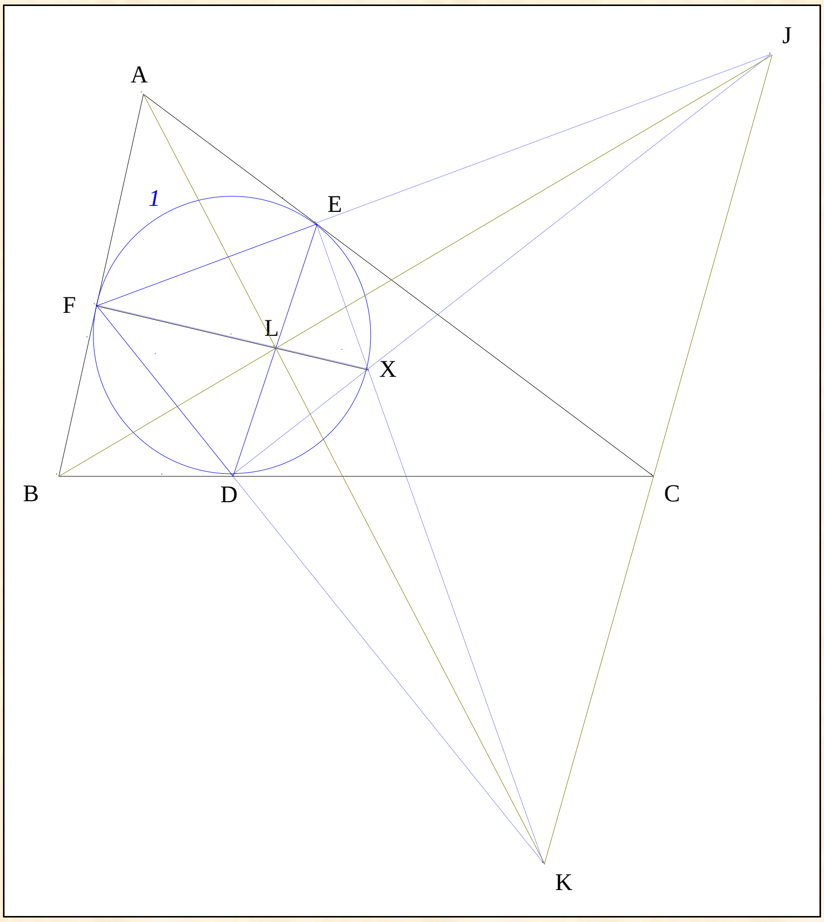
[16] Albanian MO, AoPS du 15/11/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=48&t=562866



- Notons *Td*, *Te* les tangentes à *1* resp. en D, E.

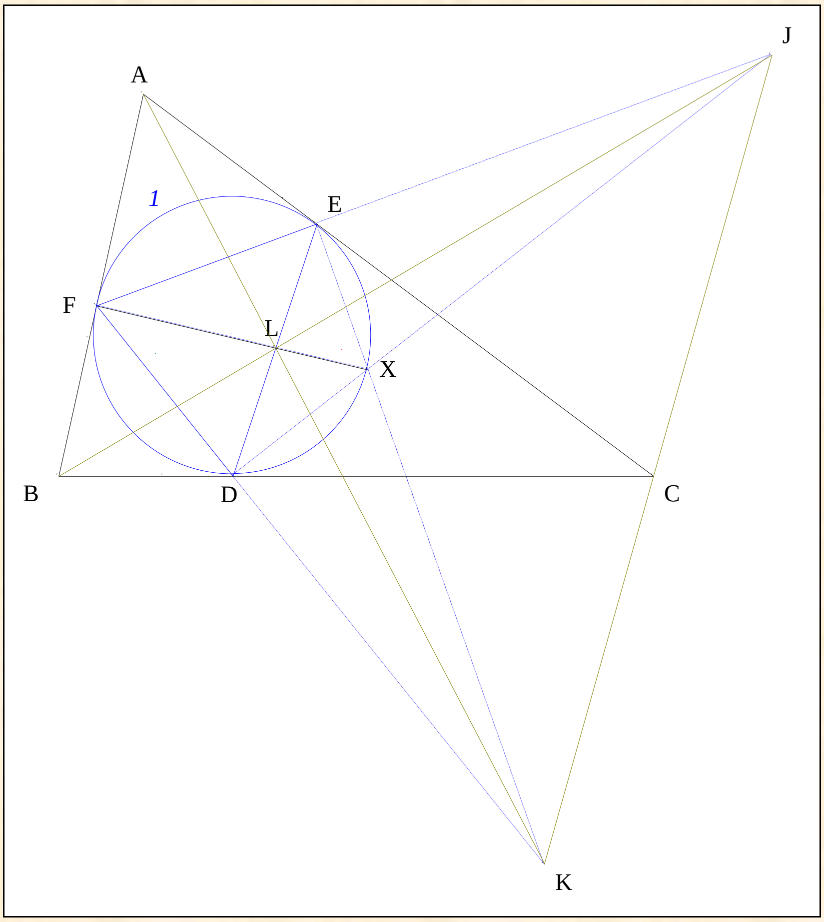
- **Scolies :** *Td* = (BC) et *Te* = (AC).

- D'après MacLaurin "Tetragramma mysticum",
  (JCK) est la pascale de l'hexagone dégénéré FE *Te* XD *Td* F ; en conséquence, J, C et K sont alignés.



- Mutatis mutandis, nous montrerions que K, A et L sont alignés
  L, B et J sont alignés.

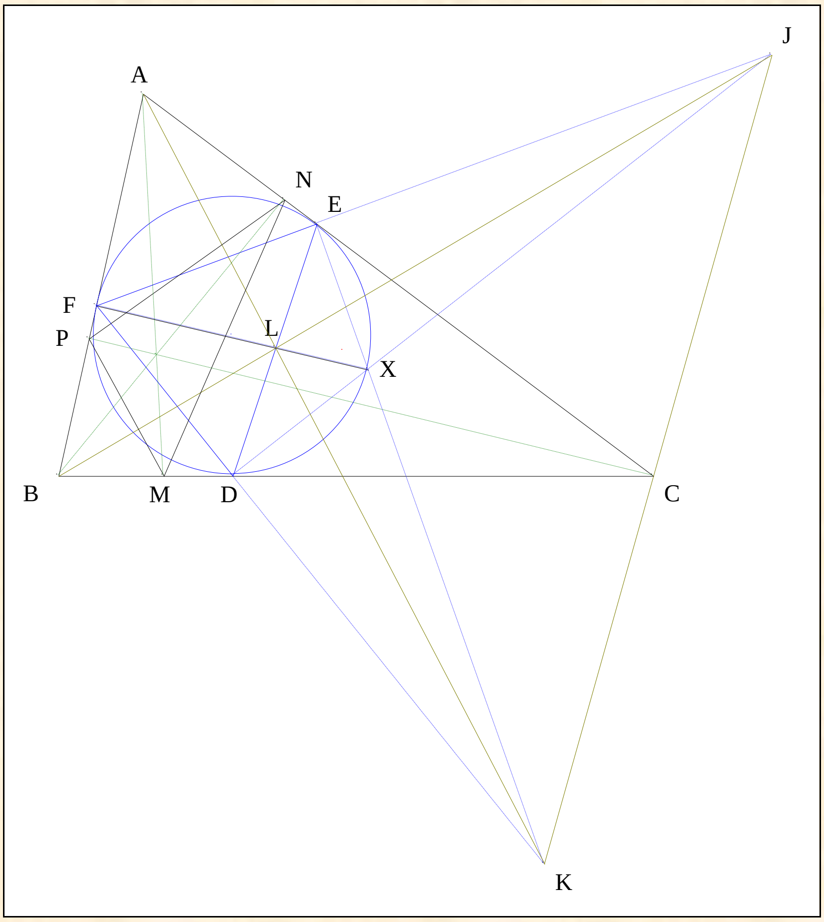
- **Conclusion partielle :** ABC est inscrit dans JKL.



- Nous avons : ABC est inscrit dans JKL, DEF est un cévien de ABC, DEF est perspectif à ABC.

- **Conclusion partielle :** d'après Döttl "The cevian nests theorem" [17], ABC est un cévien de JKL.

[17] Ayme J.-L., The cevian nests theorem, G.G.G. vol. **3** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



- Nous avons : MNP est un cévien de ABC, ABC est un cévien de JKL.
- D'après Johann Döttl "The cevian nests theorem", MNP est un cévien de JKL.
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [18] appliqué à MNP et JKL, (MJ), (NK) et (PL) sont concourantes.

Énoncé traditionnel :

le triangle P-*anticévien d'un triangle*
est en perspective avec
le triangle P-*cévien de ce triangle* [19].

[18] Ayme J.-L., Une rêverie de pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 39 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

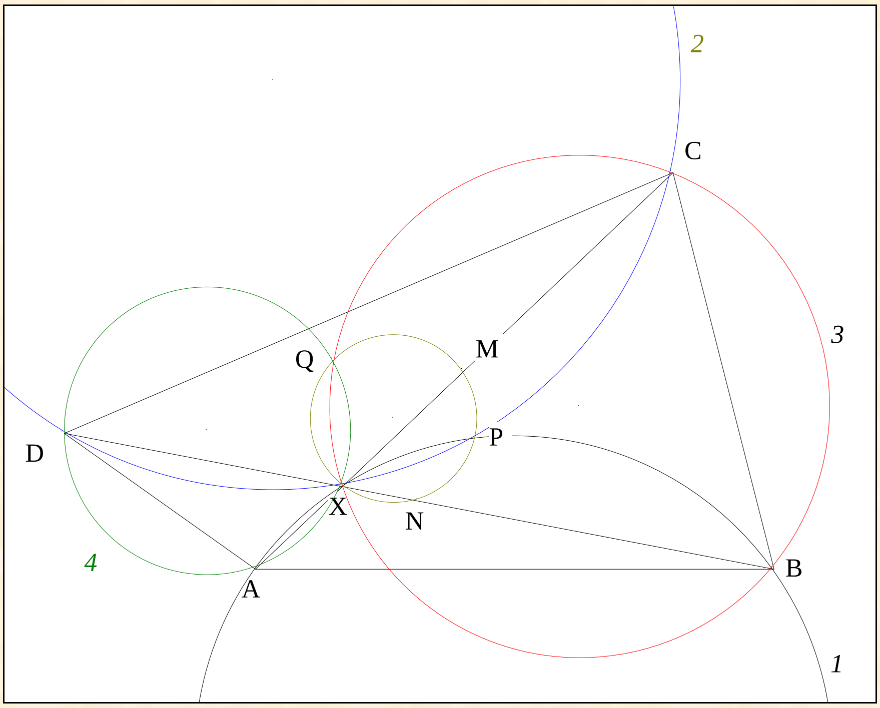
[19] Ayme J.-L., Produit de deux points, G.G.G. vol. **3**, p. 8-9 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

QUICKIE 7 [20]

Genese, *Educational Times*, **6282** (1880) 99

VISION

Figure :



Traits : ABCD		un quadrilatère convexe,
	X	le point d'intersection de (AC) et (BD),
	M, N	les milieux resp ; de [AC], [BD],
	1, *2*	les cercles circonscrits aux triangles XAB, XCD,
	P	le second point d'intersection de *1* et *2*,
	3, *4*	les cercles circonscrits aux triangles XBC, XDA
et	Q	le second point d'intersection de *3* et *4*.

Donné : M, N, X, P et Q sont cocycliques.

Commentaire : the midcevian circle.

VISUALISATION

- D'après "The midcircle theorem" [21] appliqué à *1* et *2*, M, N, X et P sont cocycliques.
- D'après "The midcircle theorem" appliqué à *2* et *3*, M, N, X et Q sont cocycliques.
- **Conclusion :** M, N, X, P et Q sont cocycliques.

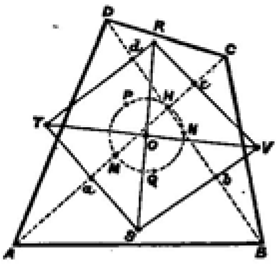
[20] Five concyclic points, AoPS du19/11/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=563265
[21] Ayme J.-L., The midcircle theorem, G.G.G. vol. **25** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Archive :

99

6282. (By Prof. Genese, M.A.)—ABCD is a quadrilateral, M, N are the middle points of the diagonals AHC, BHD; and the circles HAB, HCD meet in P, and the circles HBC, HDA in Q; prove that the points M, N, H, P, Q lie on one circle.

Solution by F. D. Thomson, M.A.; Prof. Scott, M.A.; *and others.*



Let R, S, T, V be the centres of the circles round HCD, HAB, HAD, HBC: then RTSV is a parallelogram whose sides bisect HA, HB, HC, HD at right angles in the points a, b, c, d.

Let O be the intersection of RS, TV. Then $ac = \frac{1}{2}$ AC = MC, therefore aM = cH; but Oc = Oa, therefore OH = OM. Similarly OH = ON; therefore O is the centre of the circle round HMN. But, since HP is the common chord of two circles, centres R and S, HP is bisected at right angles by RS, therefore OH = OP. Similarly OH = OQ, therefore O is the centre of a circle through HNQMP.

[22]

---

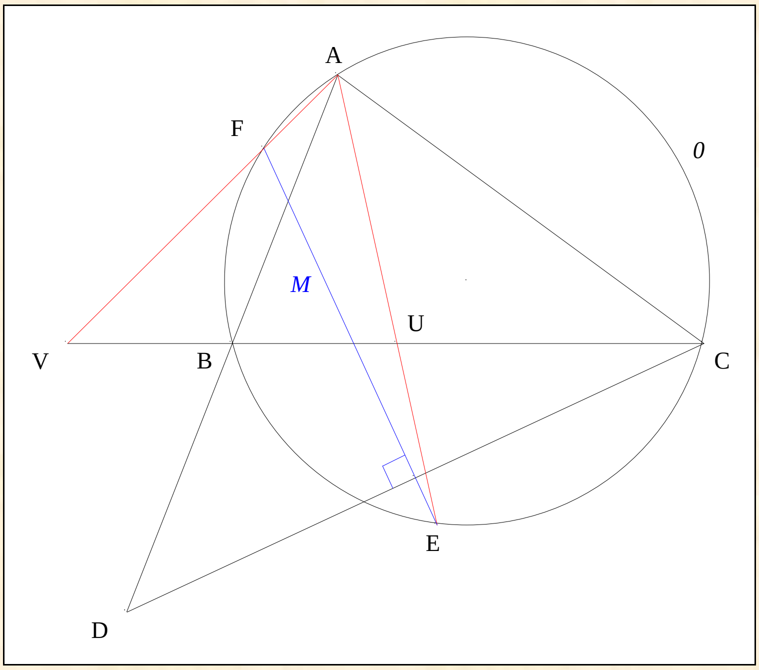
[22] Genese, *Educational Times*, **6282** (1880) 99

QUICKIE 8 [23]

Question **1170**, *Mathesis* 2 **VIII** (1899) 128

VISION

Figure :



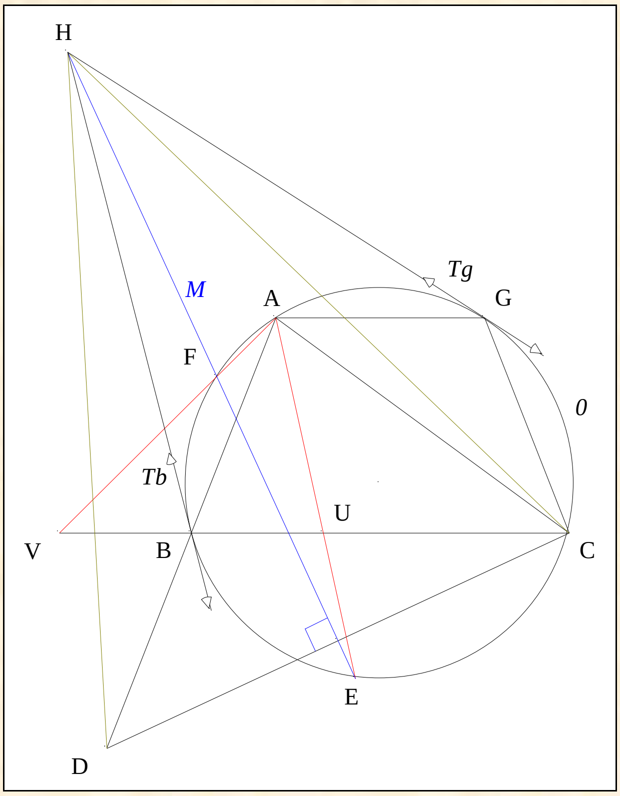
Traits : ABC un triangle,
D le symétrique de A par rapport à B,
0 le cercle circonscrit à ABC,
M la médiatrice de [CD],
E, F les points d'intersection de *M* avec *0*
et U, V les points d'intersection de (BC) resp. avec (AE), (AF).

Donné : B est le milieu de [UV].

Commentaire : pinceau harmonique.

VISUALISATION

[23] A midpoint, AoPS du 18/11/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=563129



- Notons G le second point d'intersection de la parallèle à (BC) issue de A avec *0*,
  Tg, *Tb* les tangentes à *0* resp. en G, B
  et H le point d'intersection de *Tg* et *Tb*.

- D'après "Le théorème c.a.c. ", les triangles HGC et HBD sont égaux ; en conséquence, HC = HD.

- D'après "Le théorème de la médiatrice", H est sur *M*.

- *Tg* et Tb se coupant sur la diagonale (EF) du quadrilatère cyclique BEGF, celui-ci est harmonique ; en conséquence, le pinceau (A ; B, E, G, F) est harmonique.

- **Conclusion :** (BC) étant parallèle au rayon (AG) de ce pinceau, B est le milieu de [UV].

Archive :

×Question 1170.

(Voir *Mathesis*, (2) t. VIII, p. 128).

Soit un triangle ABC; *on prolonge le côté* AB *d'une longueur* BD = AB *et l'on joint* DC. *On élève sur le milieu de* CD *une perpendiculaire qui rencontre le cercle* ABC *en deux points* E *et* F. *Démontrer que* B *est le milieu du segment déterminé sur* BC *par les droites* AE *et* AF. (A. Gob.)

Solution par MM. R. Buysens et Droz Farny. Menons la corde AG du cercle circonscrit parallèle à BC. Les tangentes aux points B et G se coupent en H. Les triangles HBD et HGC sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, savoir : l'angle

— 29 —

HBD égal à l'angle HGC comme ayant pour mesure respectivement la moitié des arcs égaux ACB et GBC ; les côtés HB et BD respectivement égaux à HG et GC.

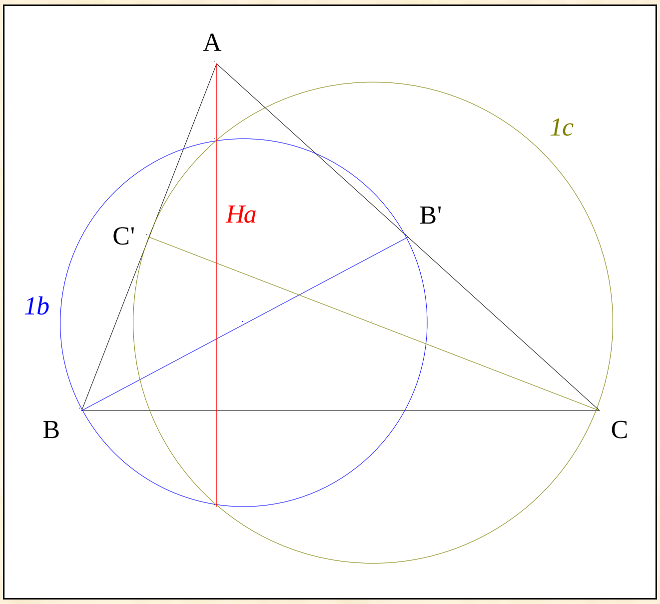
On a donc HD = HC et le point H appartient à la perpendiculaire élevée au milieu de CD. Les points B, G, E, F, forment un groupe harmonique, puisque EF passe par le pôle de BG. On a donc le faisceau harmonique A(BGEF), qu'il suffit de couper par BC parallèle au rayon AG pour démontrer le théorème.

QUICKIE 9

Rindi, problème n° **12036**, *Educational Time* **60** (1894) 107

VISION

Figure :

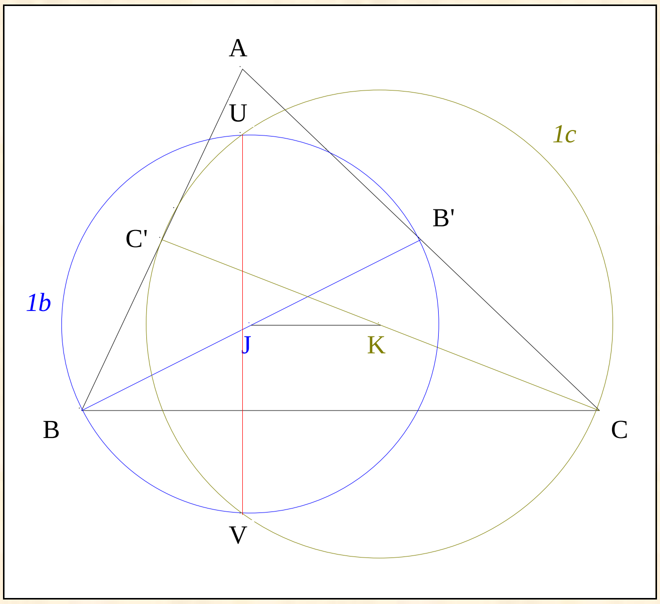


Traits :	ABC	un triangle,
	B', C'	les pieds des B, C-médianes de ABC,
	1b, *1c*	les cercles de diamètres resp. [BB'], [CC']
et	*Ha*	la A-hauteur de ABC.

Donné : *Ha* est l'axe radical de *1b* et *1c*.

Commentaire : le théorème des trois cordes.

VISUALISATION



- Notons J, K les centres resp. de *1b*, *1c*
  et U, V les points d'intersection de *1b* et *1c*.

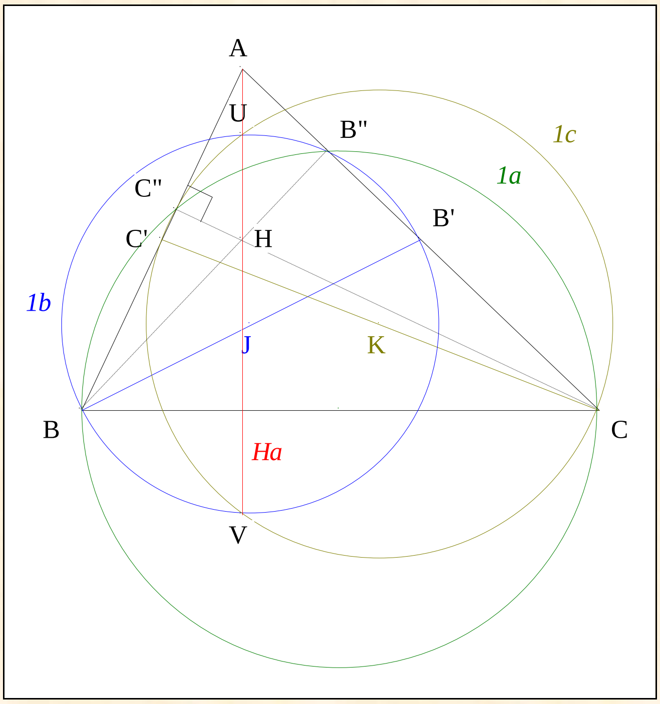
- **Scolie :** (UV) est l'axe radical de *1b* et *1c*.

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué à ABC, (B'C') // (BC).

- D'après Thalès "Rapports",
  J et K étant les milieux resp . de [BB'], [CC'], (BC) // (JK).

- D'après "Le théorème de la médiatrice", (JK) ⊥ (UV).

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (BC) ⊥ (UV).



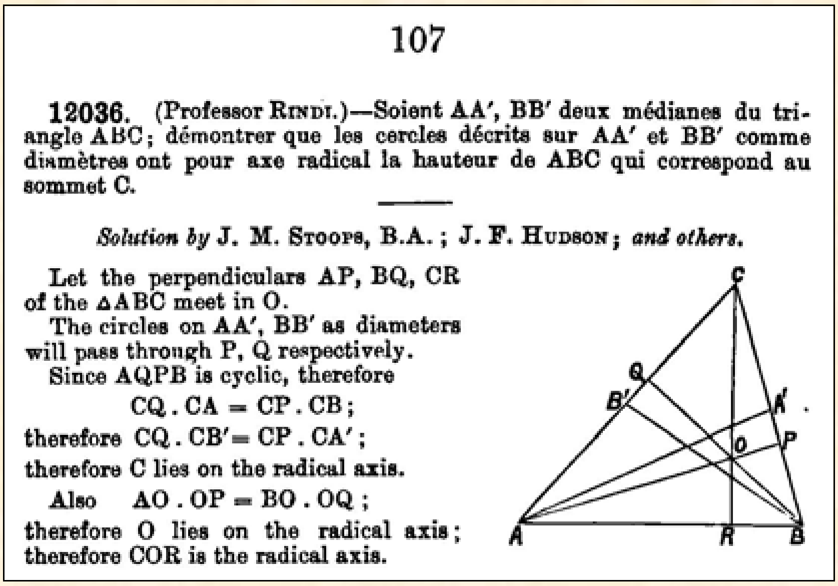
- Notons B", C" les pieds des B, C-hauteurs de ABC
  et H l'orthocentre de ABC.

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", *1b* passe par B"
  1c passe par C".

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [24]
  appliqué à *1a*, *1b* et *1c*, (UV) passe par H :
  en conséquence, (UV) et *Ha* sont confondues.

- **Conclusion :** *Ha* est l'axe radical de *1b* et *1c*.

Archive :


107

12036. (Professor RINDI.)—Soient AA′, BB′ deux médianes du triangle ABC; démontrer que les cercles décrits sur AA′ et BB′ comme diamètres ont pour axe radical la hauteur de ABC qui correspond au sommet C.

Solution by J. M. STOOPS, B.A.; J. F. HUDSON; *and others.*

Let the perpendiculars AP, BQ, CR of the △ABC meet in O.

The circles on AA′, BB′ as diameters will pass through P, Q respectively.

Since AQPB is cyclic, therefore

CQ . CA = CP . CB;

therefore CQ . CB′ = CP . CA′;

therefore C lies on the radical axis.

Also AO . OP = BO . OQ;

therefore O lies on the radical axis;

therefore COR is the radical axis.

[24] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme