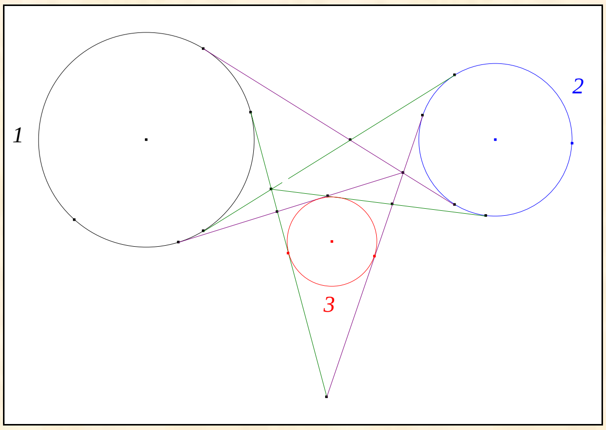
À PROPOS

DE

QUIDDE - MANNHEIM

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article présente un résultat datant de 1852 d'un géomètre peu connu, le professeur Adolph Gustave Quidde, et la preuve d'Amédée Mannheim alors Lieutenant d'Artillerie en 1854.
Deux conjectures remarquables sont proposées.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The paper presents a result dating from 1852 to a little-known geometer, Professor A. Quidde, and the proof of Amédée Mannheim then Lieutenant of artillery in 1854.
Two notable conjectures are proposed.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

---

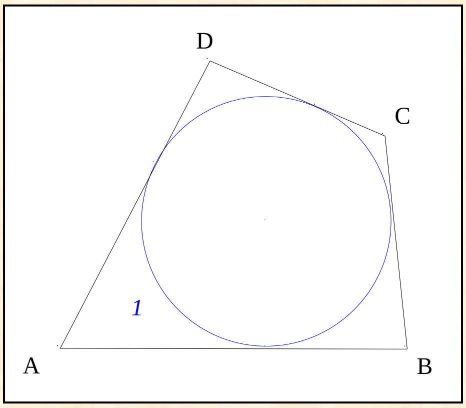
1 Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), 2010

Sommaire

A. LE THÉORÈME D'HENRI PITOT

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe
et *1* un cercle,

Donné : *1* est inscrit dans ABCD *si, et seulement si,* AB + CD = BC + DA.[2]

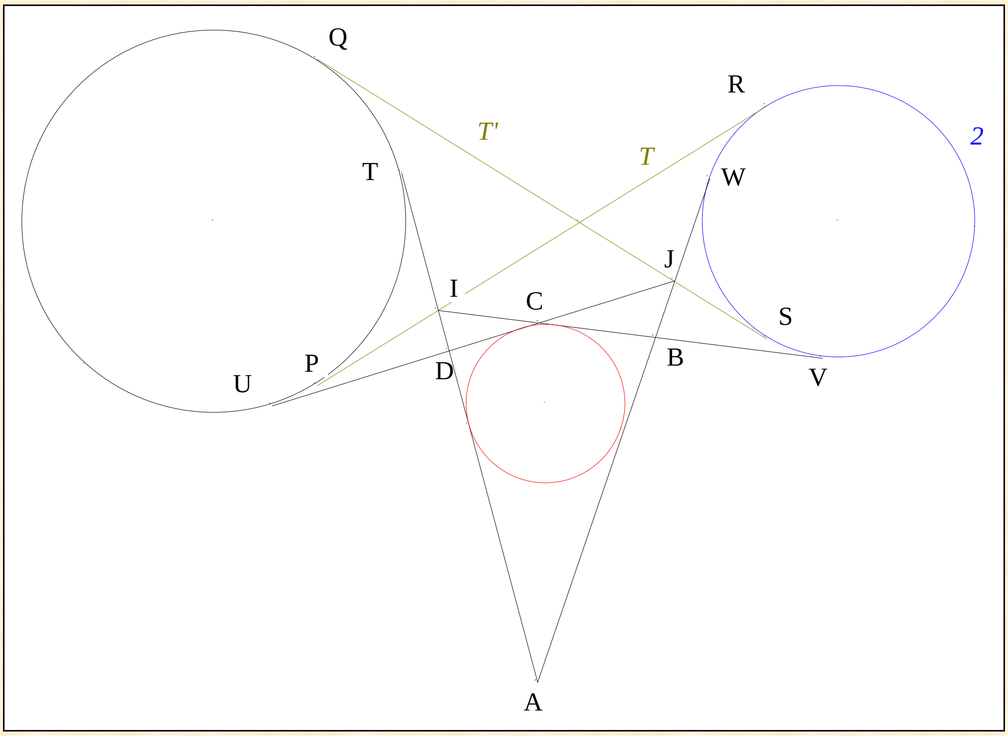
B. LE THÉORÈME DE QUIDDE - MANNHEIM

1. Un quadrilatère circonscriptible

VISION

Figure :

[2] Ayme J.-L., Le résultat de Larrosa Canestro, G.G.G. vol. **5**, p. 7-10 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



Traits : *1*, *2* deux cercles extérieurs l'un de l'autre,
T, *T'* les deux tangentes communes intérieures à *1* et *2*,
P, R les points de contact de *T* avec de *1* et *2*,
Q, S les points de contact de *T'* avec de *1* et *2*,
I, J deux points de *T*, *T'*,
T le point de contact de la seconde tangente à *1* menée à partir de I,
U le point de contact de la seconde tangente à *1* menée à partir de J,
V le point de contact de la seconde tangente à *2* menée à partir de I,
W le point de contact de la seconde tangente à *2* menée à partir de J,
A le point d'intersection de (IT) et (JW),
B le point d'intersection de (JW) et (IV),
C le point d'intersection de (IV) et (JU),
et D le point d'intersection de (JU) et (IT).

Donné : le quadrilatère ABCD est circonscriptible.

VISUALISATION

- D'après "Deux tangentes égales" (Cf. Annexe 1), DT = DU et IT = IP ;
  par soustraction membre à membre des ces deux égalités, DI = DU – IP.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que BI = IR – BW , DJ = JQ – DU , BJ = BW – JS.

- Calculons DI + DJ = (DU – IP) + (JQ – DU) = JQ - IP
  BI + BJ = (IR – BW) + (BW – JS) = IR – JS.

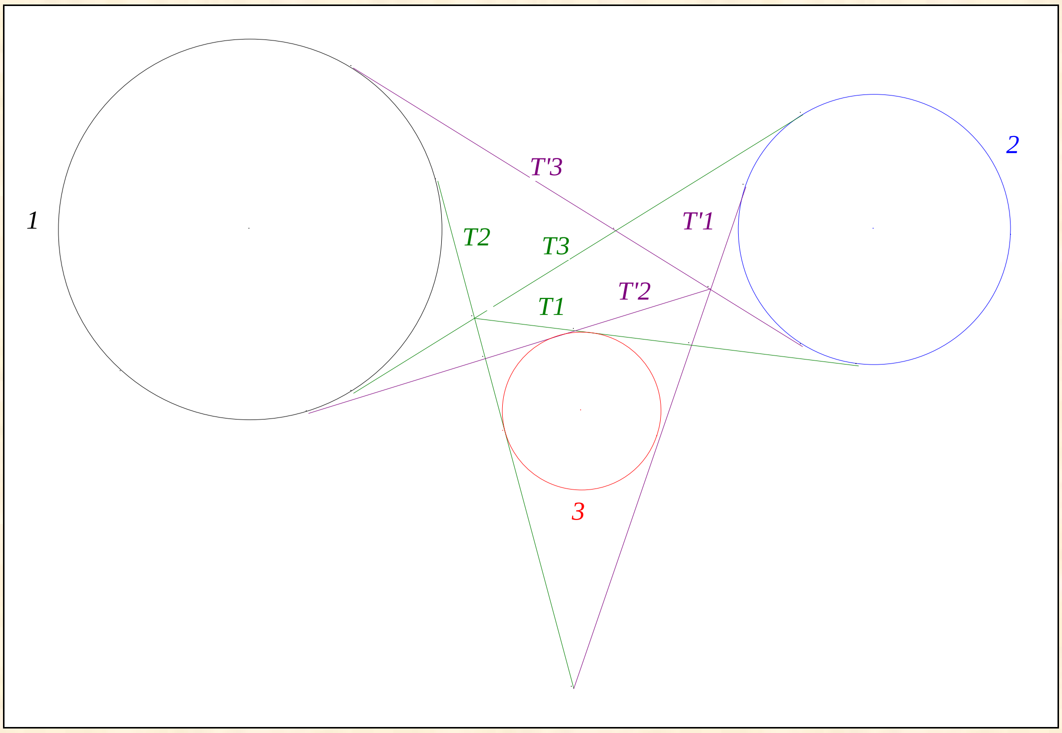
- D'après "Deux tangentes égales" (Cf. Annexe 1), PR = IP + IR = JQ + JS = QS ;
  ou encore, JQ – IP = IR – JS ;
  en conséquence, DI + DJ = BI + BJ.

- **Conclusion :** d'après **A.** Le théorème de Pitot, le quadrilatère ABCD est circonscriptible.

2. Le théorème de Quidde et la preuve de Mannheim

VISION

Figure :

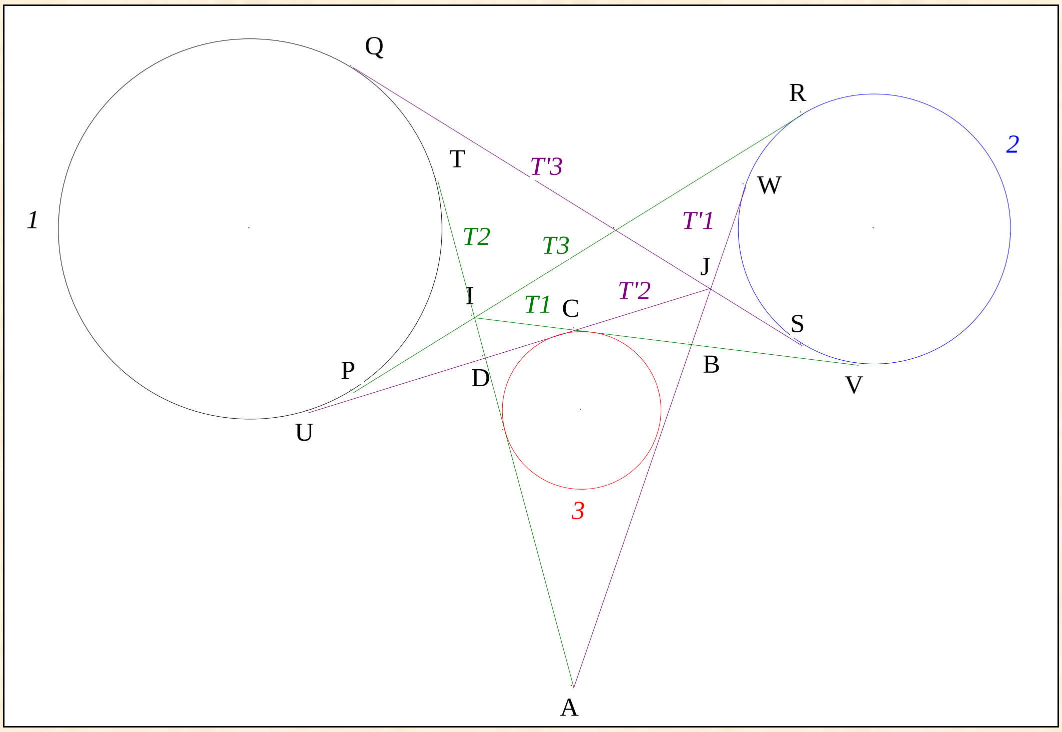


Traits : *1, 2, 3* trois cercles extérieurs l'un de l'autre,
T3, T'3 les deux tangentes communes intérieures à *1* et *2*,
T1, T'1 les deux tangentes communes intérieures à *2* et *3*,
et *T2, T'2* les deux tangentes communes intérieures à *3* et *1*.

Donné : *T1*, *T2* et *T3* sont concourantes *si, et seulement si,* *T'1*, *T'2* et *T'3* sont concourantes.[3]

VISUALISATION NÉCESSAIRE

[3] Quidde A., Question **255**, *Nouvelles annales* **11** (1852) 313-314 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0 ;
Grunert's Archiv der Math. u. Phys. **15** (1850), 197-204
F. G.-M., Exercices de Géométrie, 6th ed. (1920). Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris (1991) Théorème #**164** p. 326



- Notons I le point de concours des tangentes *T1*, *T2* et *T3*,
  P, R les points de contact de *T3* avec de *1* et *2*,
  V le point de contact de *T1* avec de *2*,
  T le point de contact de *T2* avec de *1*,
  J le point d'intersection de *T'3* et *T'2*,
  Q, S les points de contact de *T'3* resp. avec *1*, *2*,
  U le point de contact de *T'2* avec *1*,
  T"1 la tangente à *2* issue de J et distincte de *T3*,
  W le point de contact de *T"1* avec *2*,
  A le point d'intersection de (IT) et (JW),
  B le point d'intersection de (JW) et (IV),
  C le point d'intersection de (IV) et (JU),
  et D le point d'intersection de (JU) et (IT).

- D'après **B. 1.** Un quadrilatère circonscriptible, le quadrilatère ABCD est circonscriptible
  i.e.
  T1, *T2*, *T'2* et *T"1* sont tangente à un cercle.

- Notons *3'* ce cercle.

- Ce cercle étant le cercle I-excercle du triangle IDC, est tangent à (CD) ;
  en conséquence, *3* et *3*' sont confondus ainsi que *T"1* et *T'1*.

- **Conclusion :** *T'1*, *T'2* et *T'3* sont concourantes.

VISUALISATION NÉCESSAIRE

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que *T1*, *T2* et *T3* sont concourantes.

Énoncé traditionnel ou **le théorème int-int-int:**

étant donné trois cercles extérieurs l'un de l'autre,

si, trois tangentes communes intérieures aux cercles pris deux à deux passent par un même point

alors, les trois autres tangentes intérieurs communes passent par un même point.

Scolie : une autre situation ou **le théorème int-ext-ext**

étant donné trois cercles extérieurs l'un de l'autre, noté *1*, *2*, *3*,

si, une tangente commune intérieure à *1* et *2*,
une tangente commune extérieure à *2* et *3*,
une tangente commune extérieure à *3* et *1*, passent par un même point

alors, la seconde tangente commune intérieure à *1* et *2*,
la seconde tangente commune extérieure à *2* et *3*,
la seconde tangente commune extérieure à *3* et *1*, passent par un même point.

Note historique : une preuve du résultat du professeur Adolf Quidde a été donnée par le Lieutenant d'Artillerie Amédée Manheim [4]
Rappelons que cette situation a été revisitée en 1936 par le Professeur Henry Frederick Baker [5] dans un article dont le résumé est

There is a theorem for three circles in a plane, that if three tangents, each of two of these circles, either all transverse or one transverse and two direct, can be drawn to meet in a point, then the three tangents, each of two of the circles, respectively conjugate to those first taken, likewise meet in a point. The theorem was stated by Quidde, with a proof for the necessity of the condition as to the tangents to be taken, in a paper designed to establish Steiner's solution of Malfatti's problem. Casey gives the theorem with omission of the condition for the character of the tangents, as does Salmon, who, however, gives a proof depending on the right choice of certain square roots which enter. Quidde's theorem is stated, accurately, in the *Nouvelles Annales*, and a simple metrical proof, from the diagram drawn (essentially Quidde's, see 6 below) is given later in the same *Journal* by Mannheim; this is practically repeated by Hart. Recently, Prof. Neville, emphasizing the necessity of the condition for the character of the tangents, has called attention to Quidde's paper.

---

4 Mannheim A., Question 255, *Nouvelles Annales* **13** (1854) 210-211 ;
http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.

5 Baker H. F. (1866-1956), On the contacts of circles, Cambridge Philosophical Society Vol. **32** (January 1936) Part 1

3. Archives

QUESTIONS.

255. Trois cercles a, b, c sont situés dans un même plan.

1°. Si par un même point passent trois tangentes intérieures communes aux cercles a, b; b, c; c, a, les trois autres tangentes intérieures communes passent aussi par un même point.

2°. Si par un même point passent une tangente intérieure commune aux cercles a, b; une tangente extérieure commune aux cercles b, c; une tangente extérieure commune aux cercles c, a; les deux autres tangentes extérieures communes aux cercles b, c; c, a, et la seconde tangente intérieure commune aux cercles a, b, passent aussi par un même point.

3°. Si par le même point passent une tangente extérieure commune aux cercles a, b; une tangente extérieure commune aux cercles b, c; une tangente intérieure com-

(314)

mune aux cercles c, a; et si les deux autres tangentes extérieures communes aux cercles a, b; b, c ne forment qu'une seule droite m, alors la seconde tangente intérieure commune aux cercles a, c passe par le point où cette droite m touche le cercle b. (QUIDDE.)

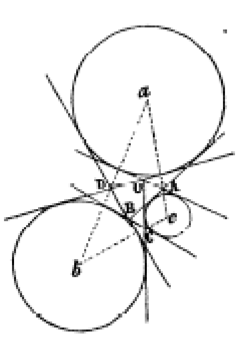
[6]

[6] Quidde A., Question **255**, *Nouvelles annales* **11** (1852) 313-314 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.

SOLUTION DE LA QUESTION 255

(voir t. XI, p. 314) ;

PAR M. MANNHEIM,
Lieutenant d'Artillerie.



Première partie. Supposons que trois des tangentes intérieures se coupent au même point O, je dis que les trois autres se coupent aussi en un même point.

Soit B le point de rencontre des deux tangentes AB, BC. Du point B je mène au cercle b la tangente BD; il suffit de démontrer que cette droite est tangente au cercle a.

Le quadrilatère OABC étant circonscrit au cercle c, on a

$$\mathrm{OA} + \mathrm{AB} = \mathrm{OC} + \mathrm{BC}.$$

Le quadrilatère OABC étant circonscrit au cercle b, on a

$$\mathrm{OC} + \mathrm{CB} = \mathrm{BD} + \mathrm{OD}.$$

De ces deux égalités on déduit

$$\mathrm{OA} + \mathrm{AB} = \mathrm{BD} + \mathrm{OD}.$$

Le quadrilatère OABD est donc circonscriptible, et comme trois des côtés sont tangents à la même circonférence a, le quatrième côté BD doit aussi être tangent à cette même circonférence. C. Q. F. D.

Remarque. On peut considérer les points O, B comme foyers d'une ellipse qui passerait par les points D, C, A. Cette conique est tangente en ces points aux lignes des centres des trois cercles donnés.

La deuxième et la troisième partie de la question se démontrent de même.

[7]

[7] Mannheim A., Question **255**, *Nouvelles Annales* **13** (1854) 210-211 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

4. Une courte biographie du Colonel Amédée Mannheim [8]

L'élégant Amédée

dit *Canon*

Victor Mayer Amédée Mannheim naît à Paris (France), le 17 juillet 1831.
Élève au lycée Charlemagne à Paris, classe de Catalan, puis admis 78-ème à l'entrés à l'École Polytechnique en 1848 à l'âge de 17 ans, il rejoint à sa sortie, l'École d'Application de Metz. Promu officier d'artillerie, il devient répétiteur en 1859, puis examinateur en 1863 et, enfin, en 1864 professeur de Géométrie descriptive à l'École Polytechnique, tout en continuant sa carrière militaire et en fondant la *Société Amicales des Anciens Élèves de l'École*. En 1872, il reçoit le prix *Poncelet* décerné par l'Académie des Sciences.
En 1890, il quitte l'armée avec le grade de colonel, mais continue d'enseigner jusqu'à l'âge de 70 ans.
Passionné de cinématique, il publie un traité intitulé *Géométrie cinématique* dans lequel il applique la transformation par polaire réciproque que Chasles avait initiée.
En fait, Amédée a toujours été un éternel étudiant. De 1979 à 1886, il n'a pu s'empêcher de rédiger pour *Nouvelles Annales*, toutes les solutions des problèmes d'admission à l'École polytechnique en signant "par un ancien élève de Mathématiques spéciales". Pour Charles-Ange Laisant, il se cachait aussi sous le pseudonyme de "Canon" en posant de nombreuses questions de mathématiques.
Nous retiendrons ce commentaire en anglais

Although virtually forgotten today, in his own time
he was considered to be one of the more important synthetic geometers
in the tradition of Michel Chasles

Il décède à Paris (France) le 11 décembre 1906.

[8] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Mannheim.html


CONCOURS DE 1848.

N° d'immatriculation. 7262

EXAMEN de Paris

N° d'admission. 78

DATE d'enregistrement. 28 8bre

Signature de l'Élève :

BOURSES ET DÉGRÈVEMENTS.

Trousseau et première mise d'équipement.

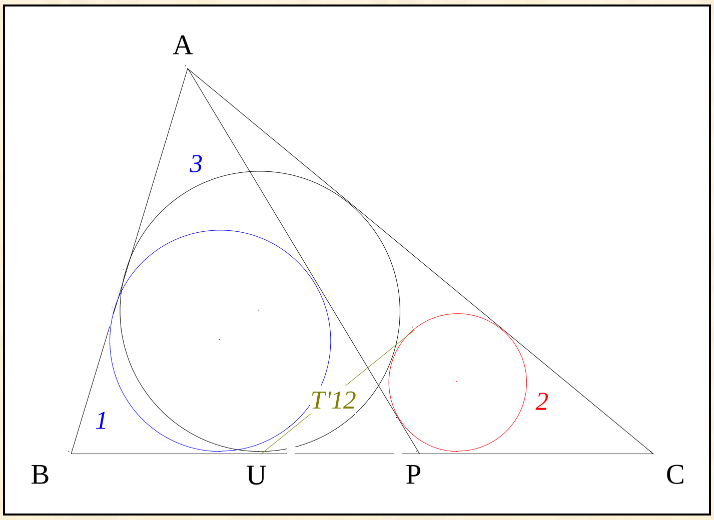
Mannheim, Victor Mayer Amédée né le 17 Juillet 1831.
à Paris, département de la Seine
fils de Sigismond Mannheim et de Marianne Spreyer, son épouse
Signalement : Cheveux et sourcils chât. clair front haut nez aquilin
yeux bleus bouche moyenne menton rond visage long taille d'un mètre 66 centim. 7
Marques apparentes :
Services militaires :
Domicile des parents : Son père Commerçant rue de la Paix, 10 à Paris
Grades obtenus :
Passé à la 1re division en 1849, le 92e d'une liste de 104 Élèves.
Déclaré admissible dans les services publics en 1850, le 60e d'une liste de 122 Élèves.
Admis dans le service de l'Artie de terre en 1850, le 13e d'une liste de 43 Élèves.

[9]

5. La troisième proposition de Quidde

VISION

Figure :

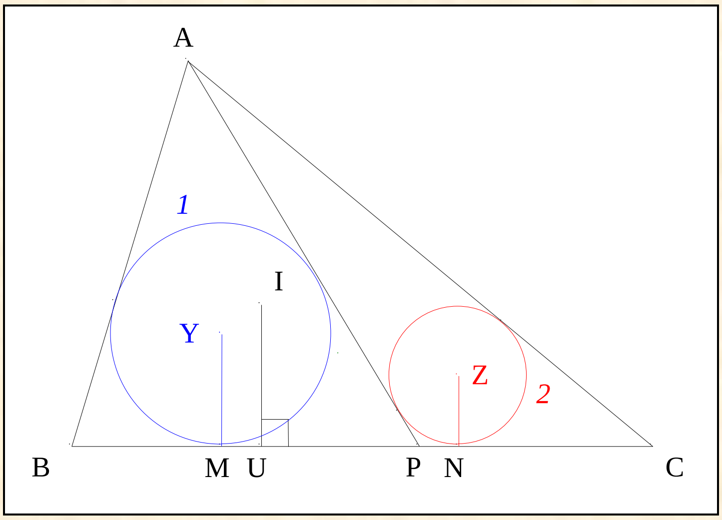


Traits : ABC un triangle,
P un point de [BC],
1, *2* les cercles inscrits resp. des triangles APB, APC
T'12 la seconde tangente commune intérieure de *1* et *2*,
3 le cercle inscrit de ABC
et U le point de contact de *1* avec (BC).

Donné : *T'12* passe par D.

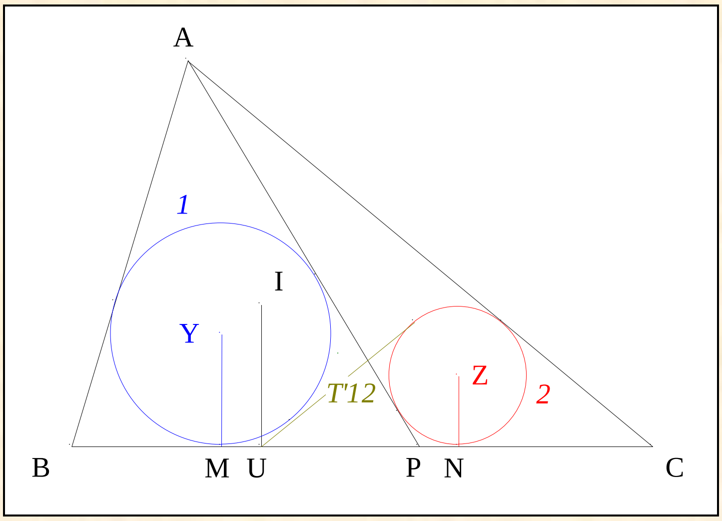
[9] Bibliothèque centrale de l'École Polytechnique; http://bibli.polytechnique.fr/F/?func=file&file_name=find-b&local_base=BCXC2

VISUALISATION



- Notons *1*, *2* les cercles inscrits resp. des triangles APB, APC
  et M, N les points de contact resp. de *1* et *2* avec (BC).

- Un chasse segmentaire : 2.MU = 2.BU - 2.BM ;
  d'après "Le théorème (p – a)" (Cf. Annexe **4**) 2.MU = [AB + BC + CA] **-** [AB + BP – PA] ;
  en conséquence, 2.MU = AP+ PC – CA
  i.e. 2.MU = 2.PN.

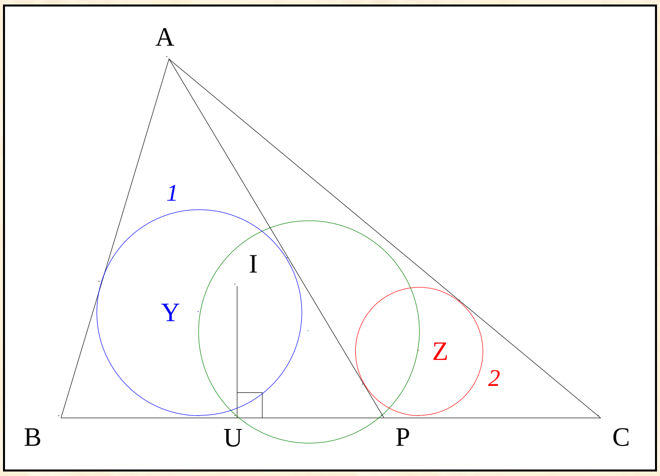


- **Conclusion :** d'après Euclide "Deux tangentes égales" (Cf. Annexe **5**), *T'12*, passe par U.

Commentaire : cette troisième proposition sera utilisée comme lemme dans l'article intitulé "Zaslavsky et Malfatti".[10]

Note historique :

[10] Ayme J.-L., Zaslavsky et Malfatti, G.G.G. vol. **20** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



La troisième proposition d'Adolph Gustav Quidde a permis de trouver un nouveau résultat concernant la cocyclité de quatre points remarquables qui a été présentée dans *American Mathematical Monthly*.

Commentaire : la preuve synthétique de cette cocyclité qui repose sur la troisième proposition d'Adolph Gustav Quidde est présentée sur le site de l'auteur. [11]

6. Une courte biographie d'Adolf Gustav Quidde

Adolf Gustav Quidde est né à Halberstadt (Saxe-Anhalt, Allemagne) le 11 juillet 1815.
Étudiant à Halle, puis Probelehrer au gymnasium de Halberstadt de1838-1839, il enseigne, en janvier 1840, les mathématiques et les sciences naturelles au gymnasium de Herford. Le 1er avril 1862, il enseigne les mathématiques et temporairement l'anglais au Gymnasium de Bückeburg, puis est nommé professeur au Realschule d'Erfurt en juin 1865.
A Pâques de l'année 1884, il prend des vacances en raison de maladie et démissionne le 1er juillet 1884 pour prendre sa retraite.

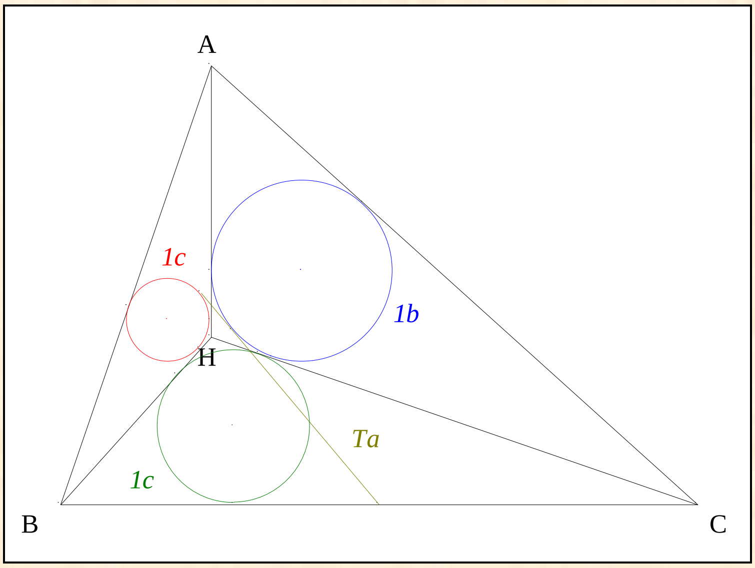
C. APPLICATIONS

1. La conjecture de Paul Yiu

VISION

Figure :

[11] Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach-Ayme, G.G.G. vol. **5**, p. 9 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



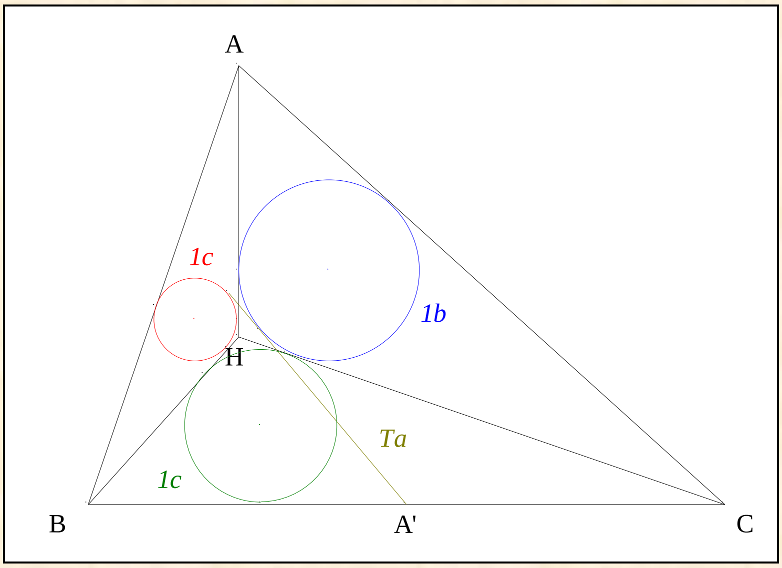
Features : ABC an acute triangle,
H the orthocenter of ABC,
1a, *1b*, *1c*, the incircles of the resp. triangles HBC, HCA, HAB
and *Ta*, *Tb*, *Tc* the second internal common tangents to *1b* and *1c*, *1c* and *1a*, *1a* and *1b*.

Given : *Ta*, *Tb* and *Tc* are concurrent. [12]

VISUALIZATION

- **Conclusion :** according to **B. 2.** The theorem of Quidde-Mannheim, *Ta*, *Tb* and *Tc* are concurrent.

Remark :



- Note A' the midpoint of the segment BC.
- **Conclusion :** *Ta* goes through A'.[13]

---

[12] Yiu P., One more triad of circles, Message *Hyacinthos* # **888** (16/04/2000) ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

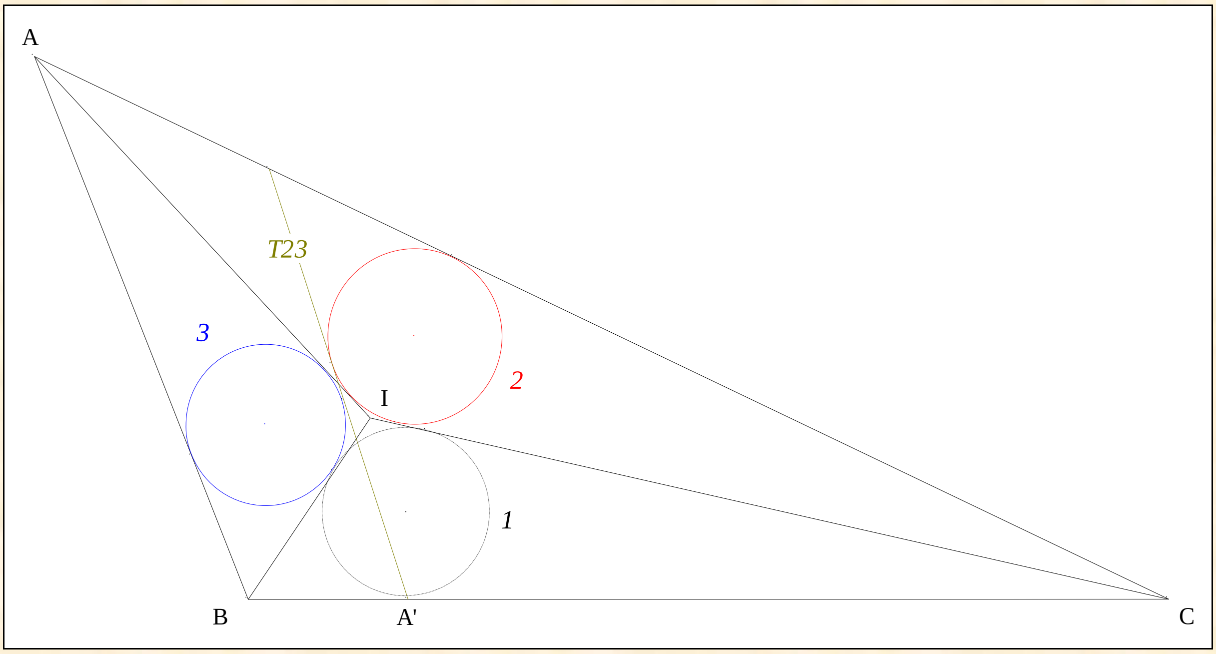
[13] Ayme J.-L., Two parallel tangent theorems, G.G.G. vol. **11** p. 14 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

Historic note : this problem which has attracted a dozen mail *Hyacinthos* group can be generalized for any point not just H. [14]

2. La conjecture d'Alexey Zaslavsky

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
1, *2*, *3* les cercles inscrits resp. des triangles IBC, ICA, IAB,
A' le point de contact de *1* avec (BC)
et *T23* la seconde tangente intérieure de *2* et *3*.

Donné : *T23* passe par A'.

Commentaire : une preuve ouverte de cette conjecture est présentée sur le site de l'auteur dans l'article intitulé

Zaslavsky et Malfatti
Parcours et détour dans une recherche. [15]

Une autre preuve est aussi présentée dans l'article

Le problème de Malfatti. [16]

---

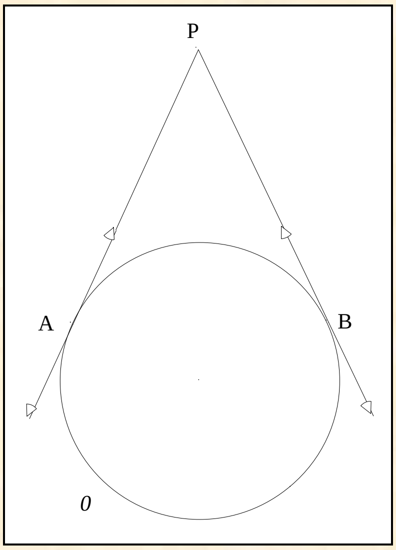
14 Hatzipolakis A., One more triad of circles, Message *Hyacinthos* # **892** (16/04/2000) ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

15 Ayme J.-L., Zaslavsky et Malfatti, G.G.G. vol. **20** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

16 Ayme J.-L., Le problème de Malfatti, G.G.G. vol. **20** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

D. ANNEXE

1. Deux tangentes égales



Traits : *0* un cercle,
P un point extérieur à *0*,
et A, B les points de contact des deux tangentes à *0* menées à partir de P.

Donné : PA = PB.[17]

[17] Conséquence de la proposition **36** du Livre **III** des *Éléments* d'Euclide.