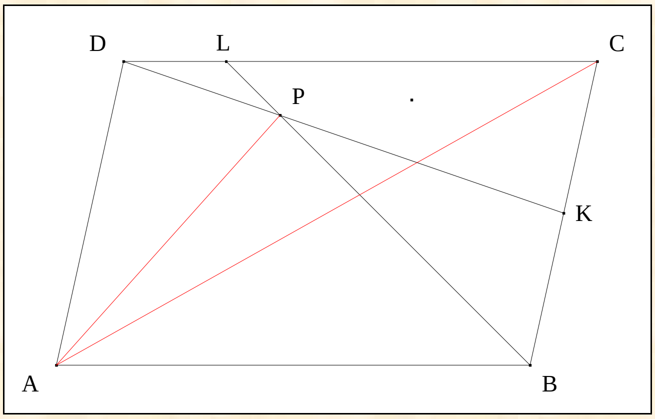
REGARD

†

Le regard est à la fois perception et vision

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente neuf "Regards" relevés, ici où là, au gré des ses lectures, et accompagnés de leur solution relevant d'un regard particulier...
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

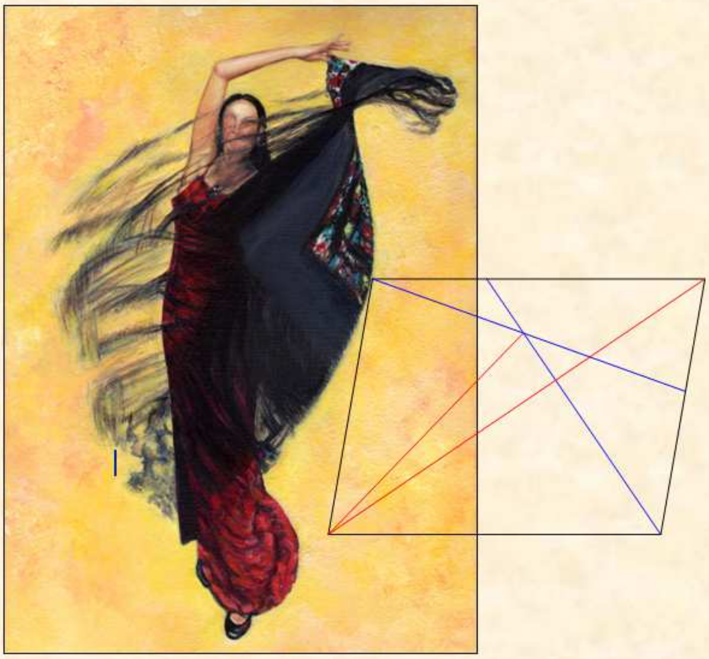
Abstract. The author presents nine "glances" identified, here and there, at the option of his readings, and accompanied by their solution within a particular look...
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Sommaire

[1] Saint-Denis, Île de La Réunion (Océan Indien, France), le 23/07/2014 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

POINT DE VUE

Tout semblable appelle son semblable [2]



Au fond de lui-même, le Géomètre est conscient qu'il n'a pas encore trouvé dans l'étude d'une configuration ce qu'il cherche inconsciemment...
Et c'est lorsqu'il cesse de chercher que la Dame Géométrie est là, à quelques empans de ses yeux, immobile et rayonnante de beauté. L'ovale parfait de son visage d'où se détachent deux yeux de braise, l'incendie en passant directement des yeux dans l'abîme de son regard. Dans l'obscurité d'un vide spacieux, son regard ravissant annule le monde extérieur et aspire le Géomètre dans un instant d'éternité.
Cette rencontre soudaine et irrésistible i.e. ce coup de foudre a tout simplement bouleversé son étroit point de vue. Dans cet instant magique, il ne savait pas qu'Elle avait le don par son jeu d'attirances et de dévoilement, de pouvoir l'éclairer en lui apportant une réponse vraie à chaque fausse question qu'il pouvait se poser, et de l'ébranler pour lui redonner un état potentiel de virginité active…

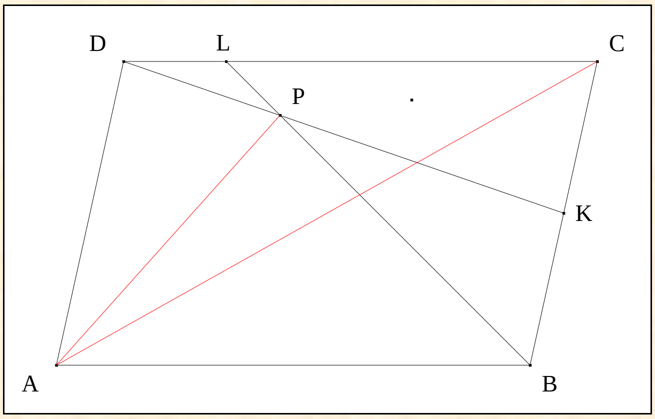
[2] Loi de similitude

REGARD 1 [3]

Poland (2001)

VISION

Figure :



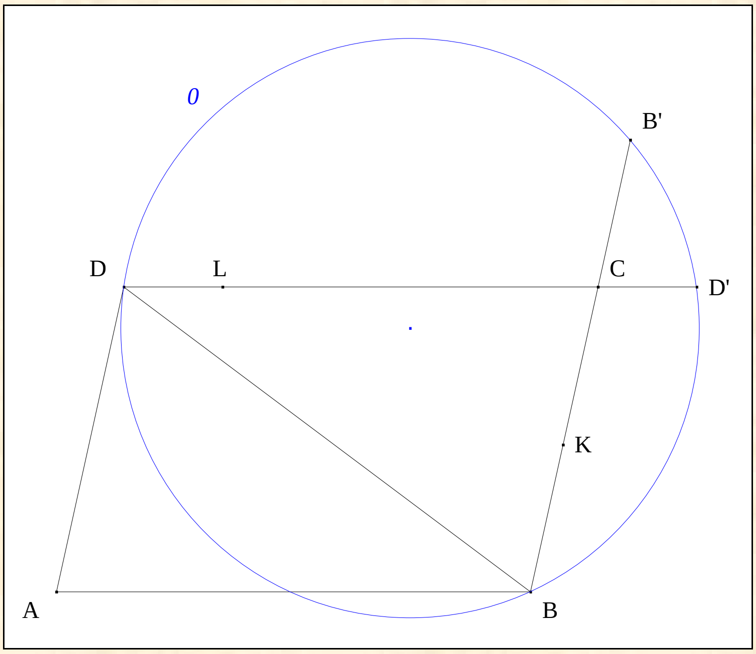
Traits :	ABCD	un parallélogramme,
	K, L	deux points resp. de [BC], [CD] tels que BK.AD = DL.AB
et	P	le point d'intersection de (DK) et (BL).

Donné : <DAP = <BAC.

Commentaire : une relation dans un parallélogramme conduisant à une symédiane.

VISUALISATION

[3] Parallelogramm, AoPS du 09/11/2004 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=19486



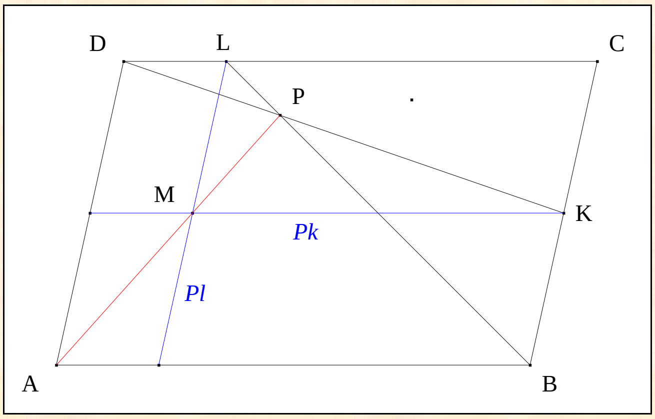
- **Commentaire :** une construction de K et L.

- Notons 0 un cercle passant par B et D tel que C soit à l'intérieur,
  B', D' les seconds points d'intersection de (BC), (CD) avec 0
  et $P_0(C)$ la puissance de C par rapport à 0.

- D'après Steiner, $P_0(C)$ = CB'.CB = CD'.CD ;
  ABCD étant un parallélogramme, CB'.AD = CD'.AB.

- Notons K, L les isotomes de C resp. à [BB'], [DD'].

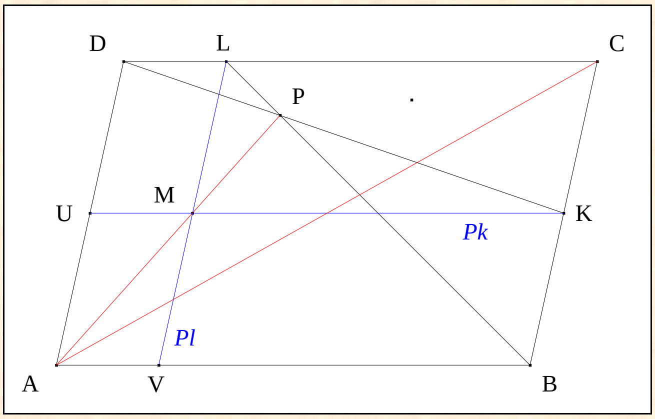
- **Conclusion :** BK.AD = DL.AB.



- Notons *Pk*, *Pl* les parallèles à (AB), (BC) issues resp. de K, L
  et M le point d'intersection de *Pk* et *Pl*.

- D'après Pappus [4], A, M et P sont alignés.

[4] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. **6**, p. 21 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Notons U, V les points d'intersection de *Pk* et (AD, *Pl* et (AB).
- **Scolie :** <AUM = <CBA.
- Une chasse de rapports :

  * par hypothèse, BK.AD = DL.AB
  * ou encore, BK/AB = DL/AD
  * par propriété de parallélogrammes, UA/BA = UM/BC.

- Les triangles UAM et BAC étant semblables, <UAM = <BAC.
- **Conclusion :** par une autre écriture, <DAP = <BAC.

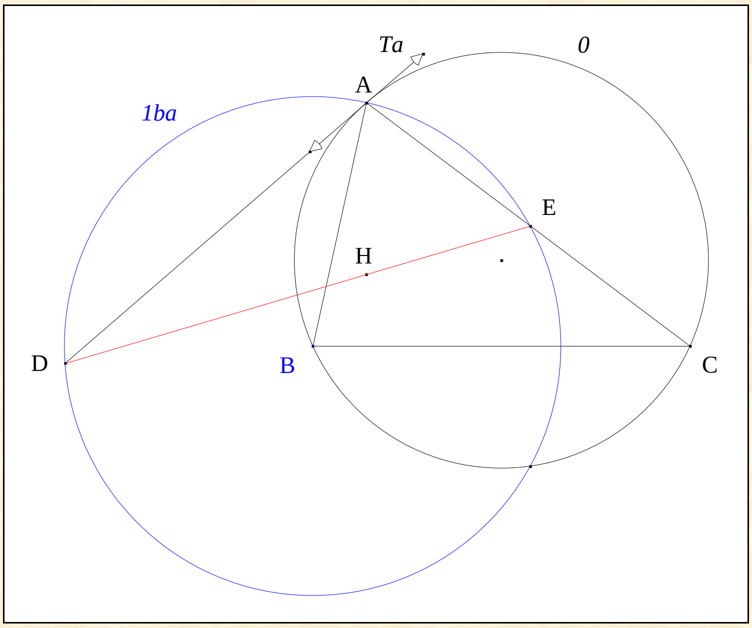
Scolie : (AM) est la A-symédiane du triangle ABD.

REGARD 2 [5]

Mexico National Olympiad Problem **2** (2001)

VISION

Figure :



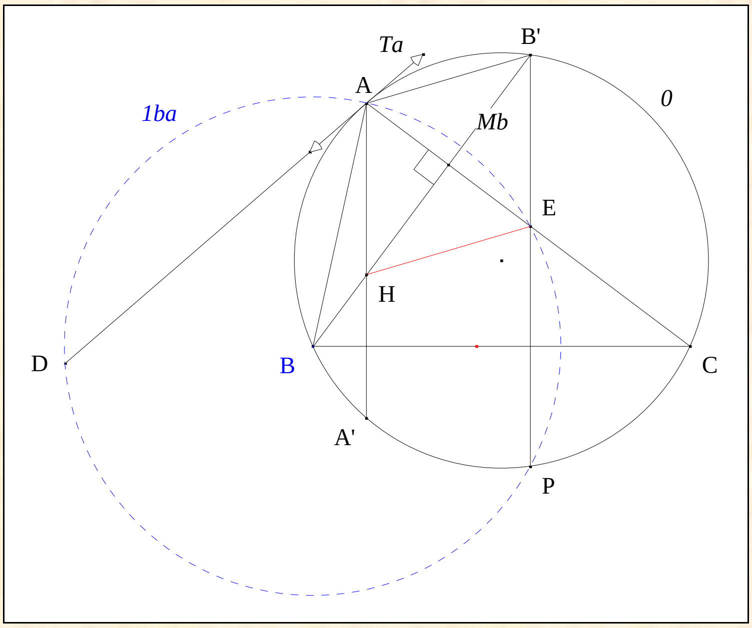
Traits : ABC un triangle acutangle tel que AB < AC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
Ta la tangente à *0* en A,
H l'orthocentre de ABC,
1ba le cercle de centre B passant par A
et D, E les points d'intersection de *1ba* resp. avec (AD), (AC).

Donné : H est sur (DE).

Commentaire : une façon originale sous le regard d'Auguste Miquel…

VISUALISATION

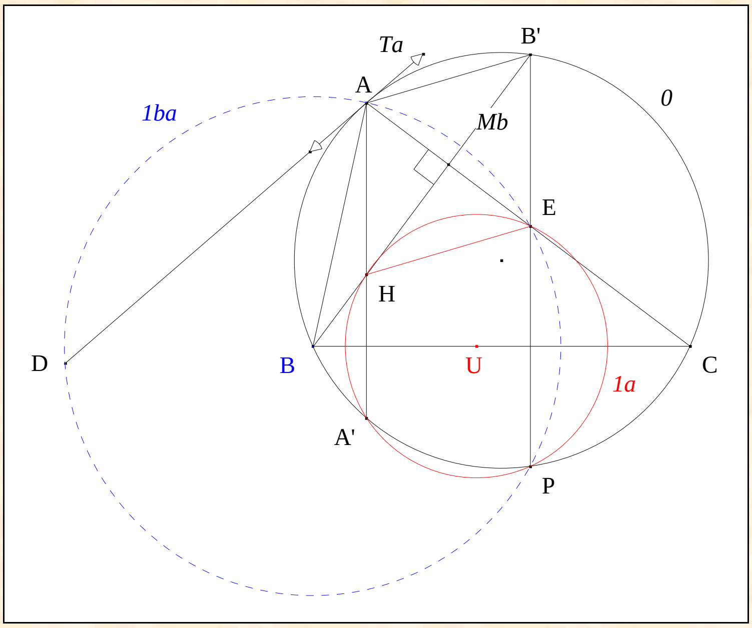
[5] Line through orthocenter, AoPS du 23/06/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=594716



- Notons *Mb* la médiatrice de [AE] ; elle passe par B et H ;
  et A', B' les seconds points d'intersection de (AH), *Mb* avec *0*.

- D'après Carnot "Symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté",
  A' est le symétrique de H par rapport à (AC).

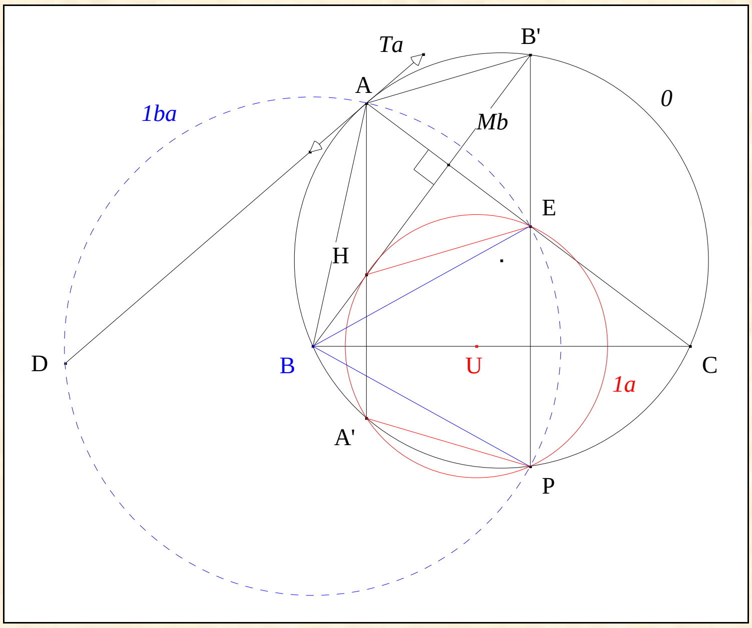
- **Conclusion partielle :** le quadrilatère AHEB' étant un parallélogramme, (AB') // (HE).



- Notons P le second point d'intersection de (B'E) avec *0*.

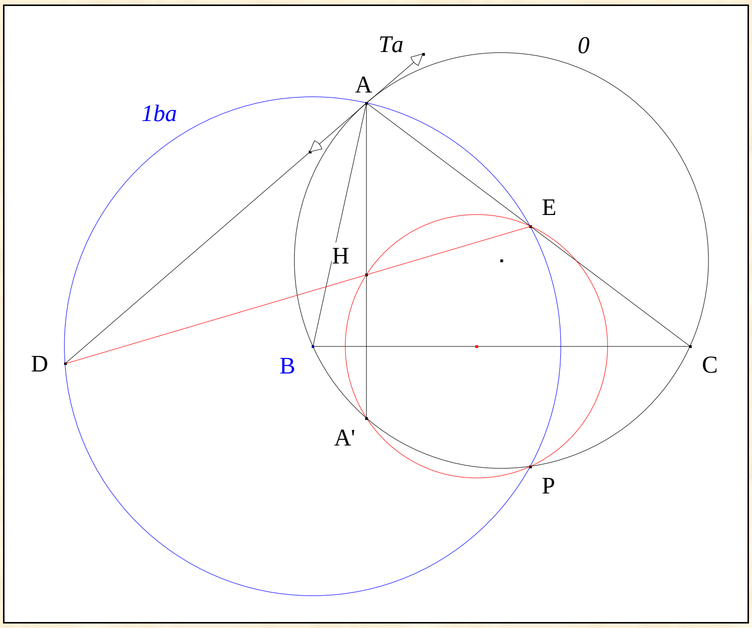
- Le cercle *0*, les points de base A' et P, la monienne (AA'H), les parallèles (AB') et (HE),
  conduisent au théorème ***0''*** de Reim ; en conséquence, A', P, H et E sont cocycliques.

- Notons *1a* ce cercle
  et U le centre de *1a*.



- **Scolies :** **(1)** U est sur (BC)
  (2) (BC) est l'axe de symétrie du trapèze cyclique A'HEP
  (3) P est le symétrique de E par rapport à (BC).

- **Conclusion partielle :** P est sur *1ba*.



- D'après Miquel "Le théorème du pivot" [6]
  appliqué au triangle HAD avec A' sur (HA), A sur (AD) et ayant P pour pivot, D, E et H sont alignés.

- **Conclusion :** H est sur (DE).

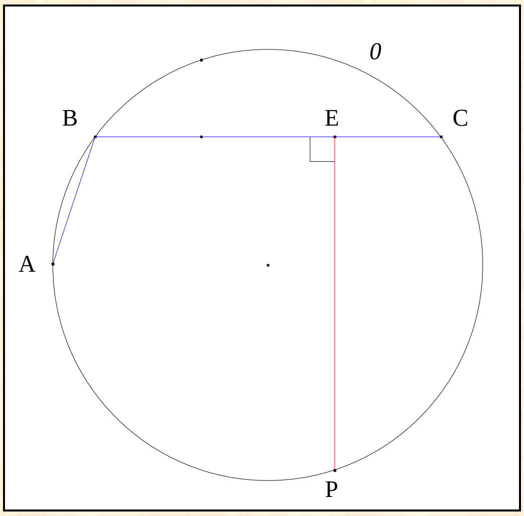
[6] Ayme J.-L., Miquel, G.G.G. vol. **13**, p. 4-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

REGARD 3

Le contre théorème de la corde brisée

VISION

Figure :

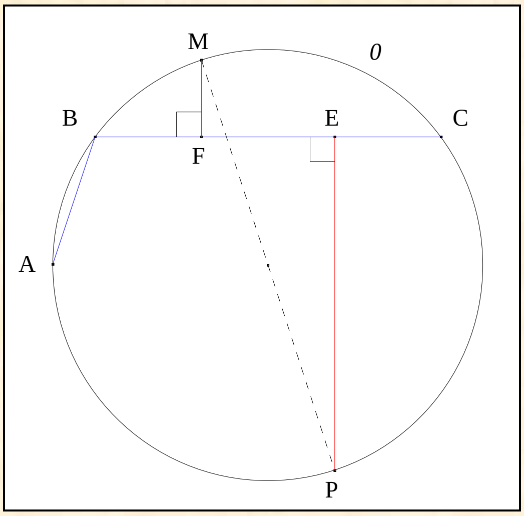


Traits : *0* un cercle,
[ABC] une corde brisée en B tel que AB < BC,
P le milieu de l'arc AC ne contenant pas B
et E le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur [BC].

Donné : AB + EC = BE.

Commentaire : un autre regard d'Archimède sur sa corde brisée…

VISUALISATION



- Notons M le milieu de l'arc ABC de *0* et F le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur [BC].

- D'après Archimède "Le théorème de la corde brisée" [7], AB + BF = FC.

- **Scolies :** **(1)** M est l'antipôle de P relativement à 0
  (2) F est l'isotome de P relativement à [BC] i.e. BF = EC ou FC = EB.

- **Conclusion :** par substitution, AB + EC = BE.

---

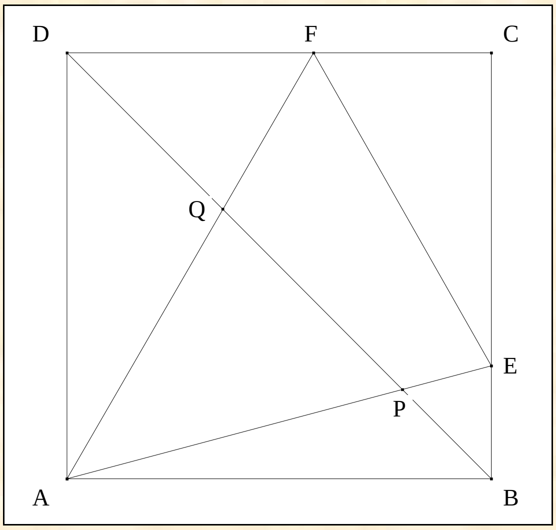
7 Ayme J.-L., Le cercle de Spieker, G.G.G. vol. **13**, p. 32-34 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
A relation, AoPS du 24/06/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=594933

REGARD 4 [8]

Une construction dans un carré

VISION

Figure :



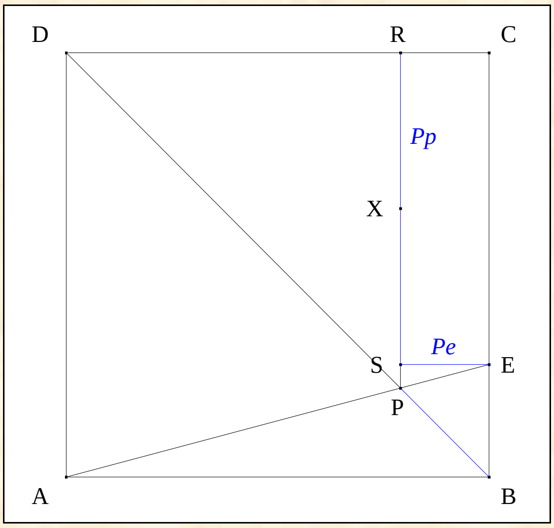
Traits : ABCD un carré,
E, F deux points resp. de [BC], [CD] tels que CE $\neq$ CF,
et P, Q le point d'intersection de (BD) resp. avec (AE), (AF).

Donné : *si*, BP.CE = DQ.CF *alors*, construire la figure.

Commentaire : la technique des aires développée par Euclide d'Alexandrie offre un regard renouvelé sur ce problème.

VISUALISATION

8 Angle in a square, AoPS du 27/09/2013 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=555880

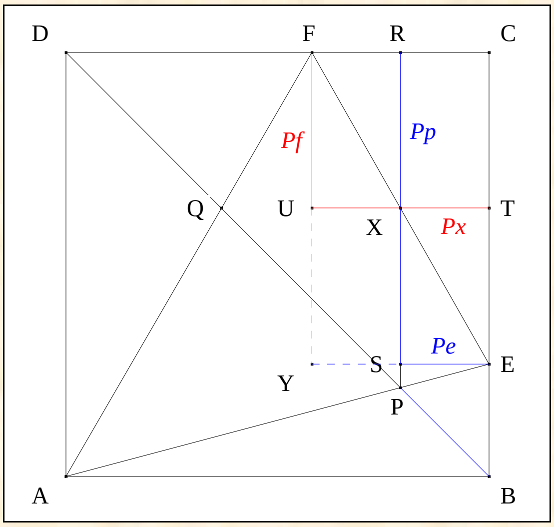


- Notons *Pe*, *Pp* les parallèles à (CD), (BC) issues resp. de E, P,
  R, S les points d'intersection de *Pp* resp. avec (CD), *Pe*
  et X le milieu de [RS].

- Nous avons : **(1)** [CESR] = CE.ES. [9]

  (2) ES = BP.cos 45°.

- **Commentaire :** considérons le théorème des parallélogrammes complémentaires [10] d'Euclide .
  La symétrie par rapport à (AC) étant exclue (CE ≠ CF), il reste celle par rapport à X.



- Notons F le symétrique de E par rapport à X
  Pf, *Px* les parallèles à (BC), (CD) issues resp. de F, X,
  T, U le point d'intersection de *Px* resp. avec (BC), *Pf*
  et Y le point d'intersection de *Pe* et *Pf*.

- D'après Euclide "**I**. Proposition **43**", [CESR] = [CFUT] = CF.CT = CF.FU.

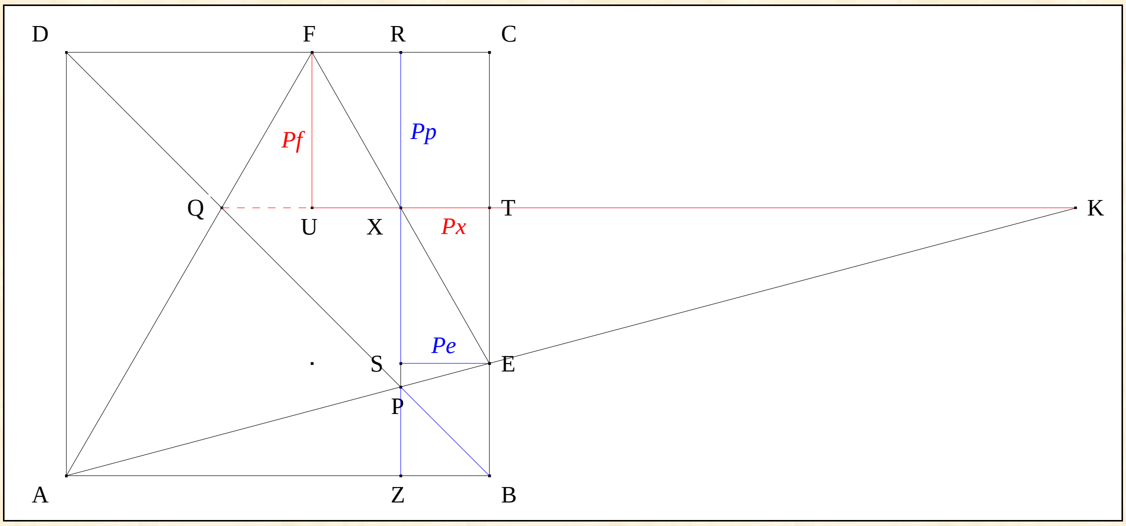
- **Scolie :** R et T sont les milieux resp. de [CF], [CE].

---

9 [CESR] représente l'aire du rectangle CESR

10 Euclide, *Éléments*, Livre **I**, proposition **43** ; http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI43.html

- **Commentaire :** pour retrouver la condition imposée, montrons que *Px* passe par Q.



- Notons Z, K les points d'intersection resp. de *Pp* et (AB), *Px* et (AE),
  et a, x les longueurs resp. de AB, BE.

- Par projection de BP, PZ = ES.

- Par "harmonicité" appliqué au trapèze ABED, 1/PZ = 1/a + 1/x ;
  en conséquence, ES = (ax)/(a+x).

- Notons k le produit QA/QF . XF/XE . KE/KA.

- Évaluons k :

  * QA = a , QF = CD – CF = AB – 2.CR = AB – 2.ES
  * XF = XE
  * KE/KA = ET/BT
  * ET = 1/2 . (BC – BE) , BT = BE + ET
  * k = 1.

- D'après "le théorème de Ménélaüs"
  appliqué au triangle AFE et à la ménélienne *Px*, *Px* passe par Q et FU = DQ.cos 45°.

- Nous avons :

  * [CESR] = [CFUT]
  * CE.ES = CF.FU
  * CE. BP.cos 45° = CF. DQ.cos 45°
  * CE. BP = CF. DQ i.e. la relation imposée.

- **Conclusion :** algorithme de la construction

  1. ABCD un carré
  2. E un point de [BC]

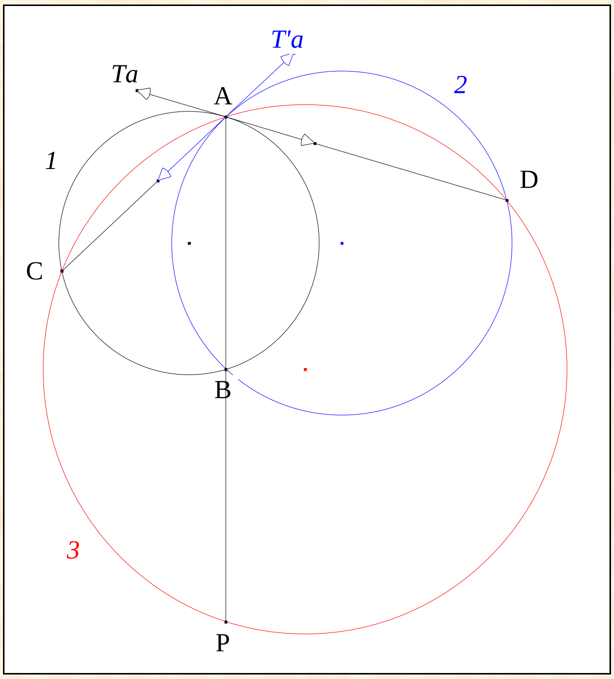
3.	P	le point d'intersection de (AE) et (BD)
4.	*Pe, Pp*	les parallèles à (CD), (BC) issues resp. de E, P
5.	R, S	les points d'intersection de *Pp* resp. avec (CD), *Pe*
6.	X	le milieu de [RS]
7.	F	le symétrique de E par rapport à X
8.	Q	le point d'intersection de (AF) et (BD).

REGARD 5 [11]

British Mathematical Olympiad Round **1** Problem **6** (2012)

VISION

Figure :



Traits :		*1*, *2*	deux cercles sécants,
		A, B	les points d'intersection de *1* et *2*,
		Ta, *T'a*	les tangentes resp. à *1*, *2* en A,
		C, D	les seconds points d'intersection de *T'a*, *Ta* resp. avec *1*, *2*,
		3	le cercle passant par A, C, D
	et	P	le second point d'intersection de (AB) avec *3*.

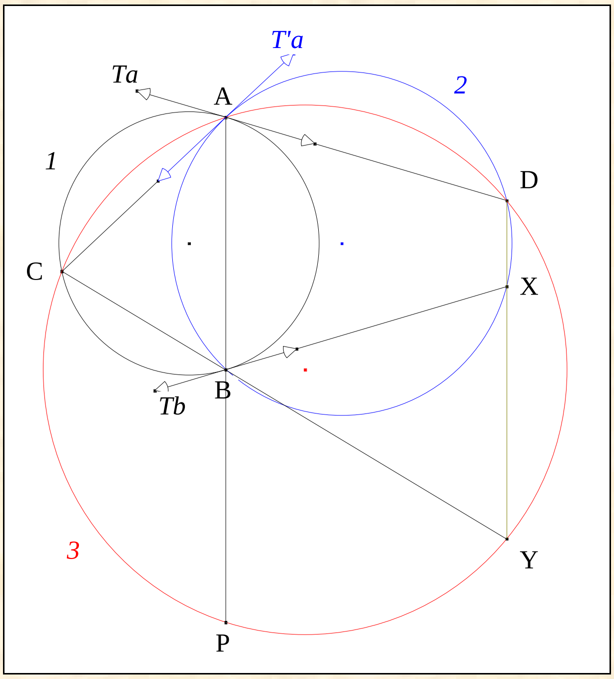
Donné : B est le milieu de [AP].

Commentaire : ce problème est un cas particulier de celui posé en Roumanie en 2005. [12]

VISUALISATION

[11] Proving Midpoint, AoPS du 14/07/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=597823

[12] Roumanie JBMO (Junior Balkan) TST (31/03/2005) day **1** problem **1** ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=199642
Nice, *Mathlinks* du 09/02/2008 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=187699

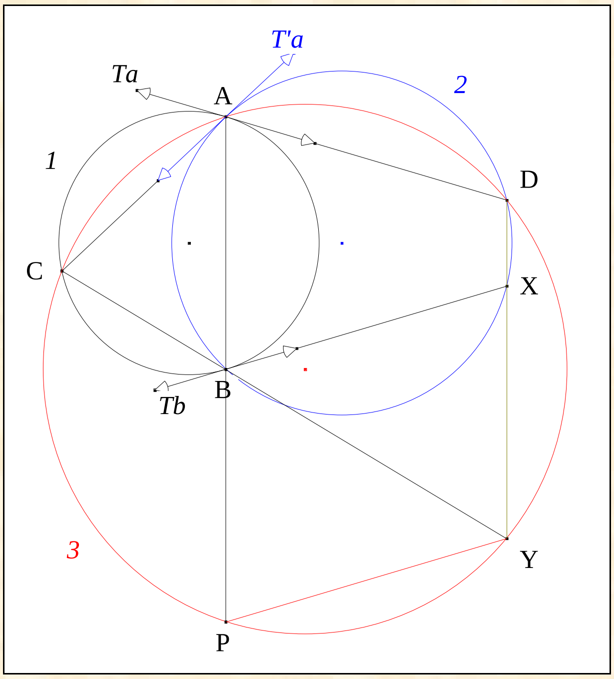


- Notons *Tb* la tangente à *1* en B
  et X, Y les seconds point d'intersection de *Tb*, (BC) resp. avec *2*, *3*.

- Les cercles *2* et *1*, les points de base A et B, les moniennes (DAA) et (XBB), conduisent au théorème **4** de Reim ; il s'en suit que (DX) // (AB).

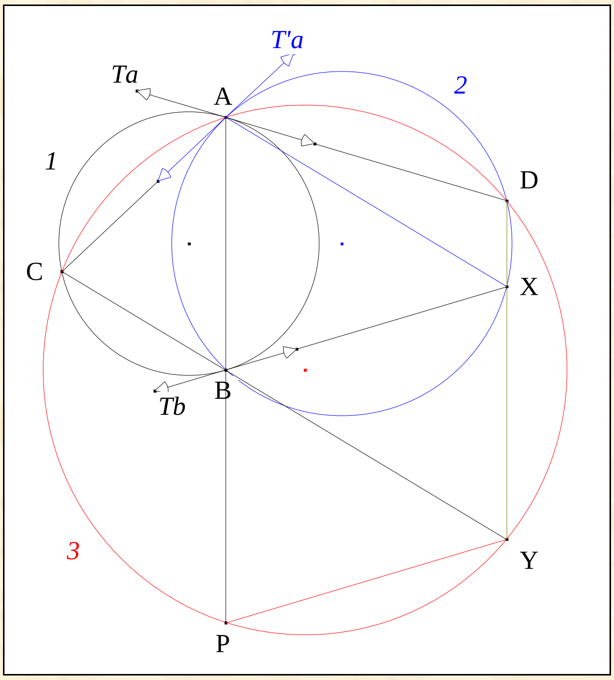
- Les cercles *1* et *3*, les points de base A et B, les moniennes (AAD) et (BCY), conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (AB) // (DY).
  par transitivité de la relation //, (DX) // (DY) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (DX) = (DT).

- **Conclusion partielle :** D, X et Y sont alignés.



- Les cercles *2* et *3*, les points de base A et D, les moniennes (BAP) et (XDY), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (BX) // (PY).

- **Conclusion partielle :** le quadrilatère BPYX ayant ses côtés opposés parallèles, est un parallélogramme ;
  en conséquence, BP = XY.



- Les cercles *2* et *3*, les points de base A et D, les moniennes (AAC) et (XDY),
  conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (AX) // (CY).

- Le quadrilatère ABYX ayant ses côtés opposés parallèles, est un parallélogramme ;
  en conséquence, XY = AB.
  par transitivité de la relation =, BP = AB.

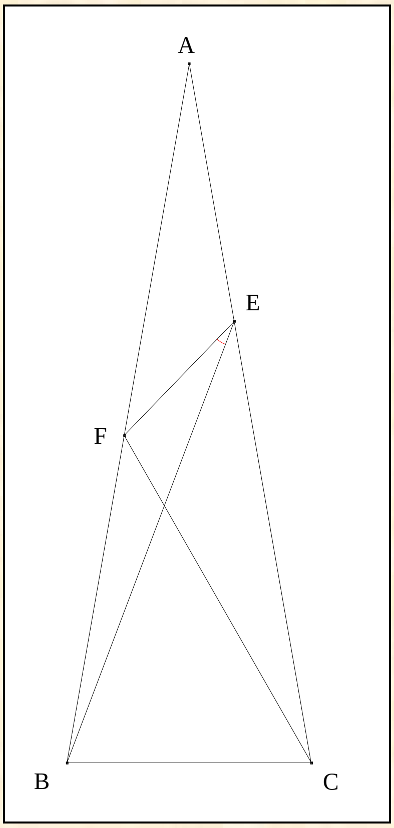
- **Conclusion :** B est le milieu de [AP].

REGARD 6 [13]

Entrance Examination for Peterhouse and Sidney Sussex Colleges, Cambridge (1916)

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle A-isocèle tel que <BAC = 20°,
E un point de [AC] tel que <ABE = 10°
et F un point de [AB] tel que <ACF = 20°.

Donné : évaluer <BEF.

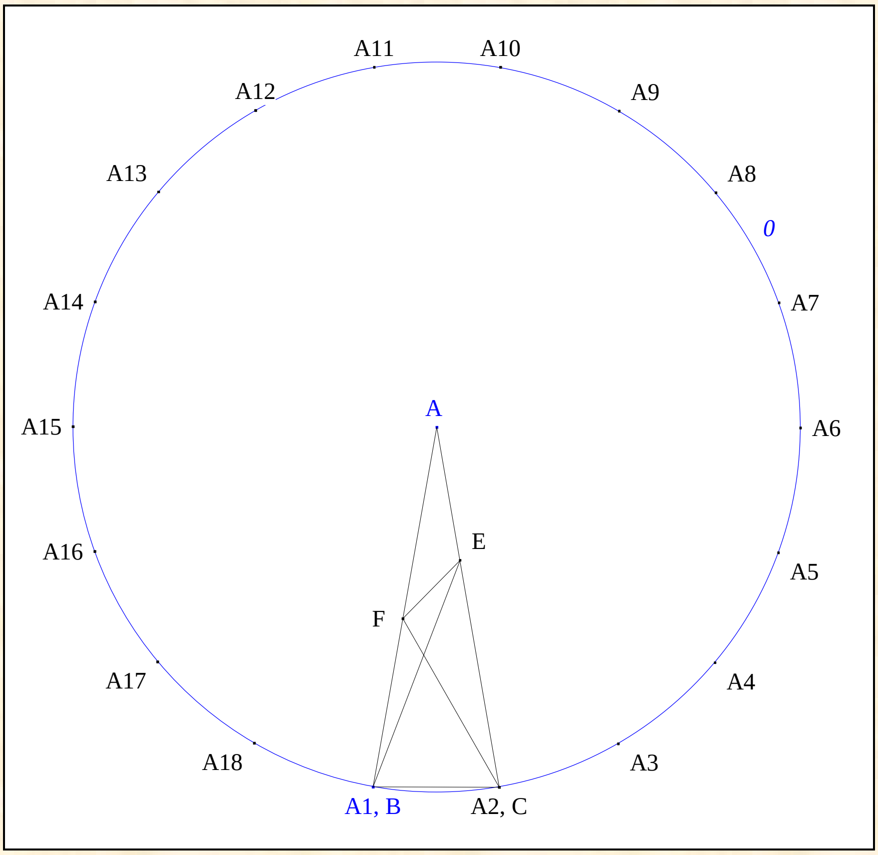
Commentaire : la technique [14] utilisée pour résoudre ce problème s'inspire de celle utilisée en 1951 par S. T. Thompson de Tacoma (Washington, États-Unis). Elle sera reprise par Victor Vasil'evich Prasolov [15] en 2000.

VISUALISATION

[13] Langley Edward M., **644**. A problem, *Mathematical Gazette*, **11**, n° **160** (Oct.1922) 173
Coxeter and Greitzer, Geometry revisited (1967) 26
Newsletter of the Brunei Mthematical Society (1991)
Hax C., the genius solution, *Washington Post* du 13/09/1995, p. B.5
Le Petit Archimède, n° 49-50 (1978)
World's Hardest Easy Geometry Problem, 16/07/2014 ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,970181

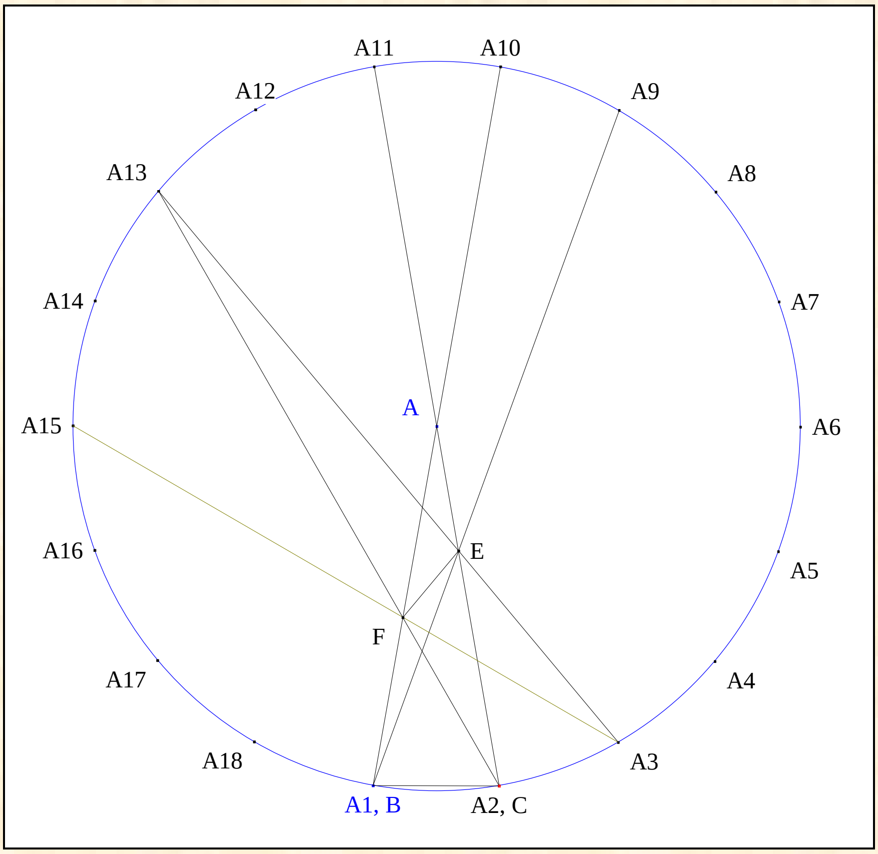
[14] Elle est présentée dans un langage muet en fin d'article

[15] Prasolov V.V., *Essays on numbers and figures*, AMS (2000) chapter **12** , Intersection points of the diagonals of regular polygons



- Immergeons la figure de départ dans
  un 18-gone régulier (A1…A18) inscrit dans le cercle de centre A passant par B   i.e.   A1.

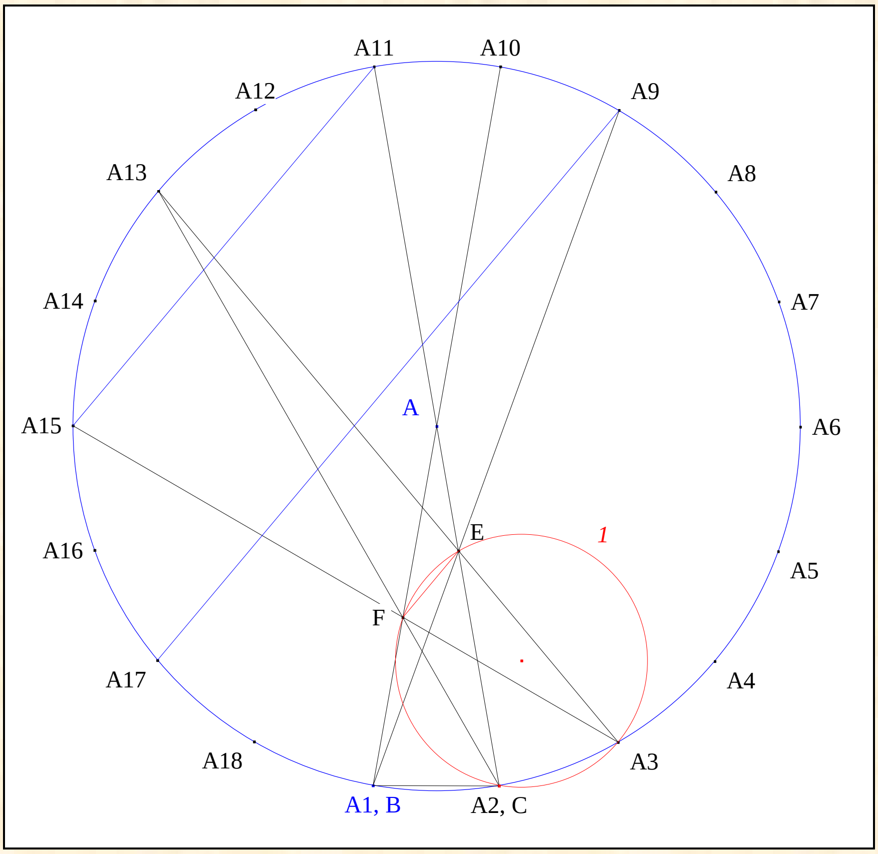
- Notons   *0*   ce cercle.



- **Scolies :** **(1)** A1, A et A10 sont alignés
  (2) A2, A, A11 sont alignés
  (3) A1, E et A9 sont alignés
  (4) A2, F et A13 sont alignés
  (5) A3, E et A13 sont alignés.

- D'après "Le lemme fédérateur" [16]
  appliqué au rayon [AA1], A3, F et A15 sont alignés.

16 Ayme J.-L., In memorian of Juan Carlos Salazar, vol. **2**, p. 2-5 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Les angles <EA2F et <EA3F étant égaux, A2, A3, E et F sont cocycliques.

- Notons *1* ce cercle.

- Les cercles *1* et *0*, les points de base A2 et A3, les moniennes (EA2A11) et (FA3A15), conduisent au théorème **0** de Reim ;
  il s'en suit que (EF) // (A11A15).

- Nous avons : (A11A15) // (A9A17)
  par transitivité de la relation //, (EF) // (A9A17) ;
  en conséquence, <A1A9A17 = 20°

- **Conclusion :** d'après "Angles correspondants", <A1EF = 20° ou encore <AEF = 20°.

Terminologie : ce problème correspond au thème "Adventitious Angles" [17] ou "Mahatma's Puzzle" [18] ou encore "Tantale" [19].

Note historique : le premier nom a été donné en 1922 par Edward M. Langley [20], le deuxième par la revue *Mathematical Spectrum* [21] en 1994-95 et le dernier par J. L. Heilbron [22] en 1998. Ce problème remonte à l'année 1916 où le célèbre problème de Langley a été posé à "Entrance Examination for Peterhouse and Sidney Sussex Colleges" à Cambridge. Depuis de nombreuses variations de ce problème ont été présentées [23].

---

17 En français, Aventure angulaire ou angles fortuits

18 Titre donné en Inde à des personnalités spirituelles de premier plan

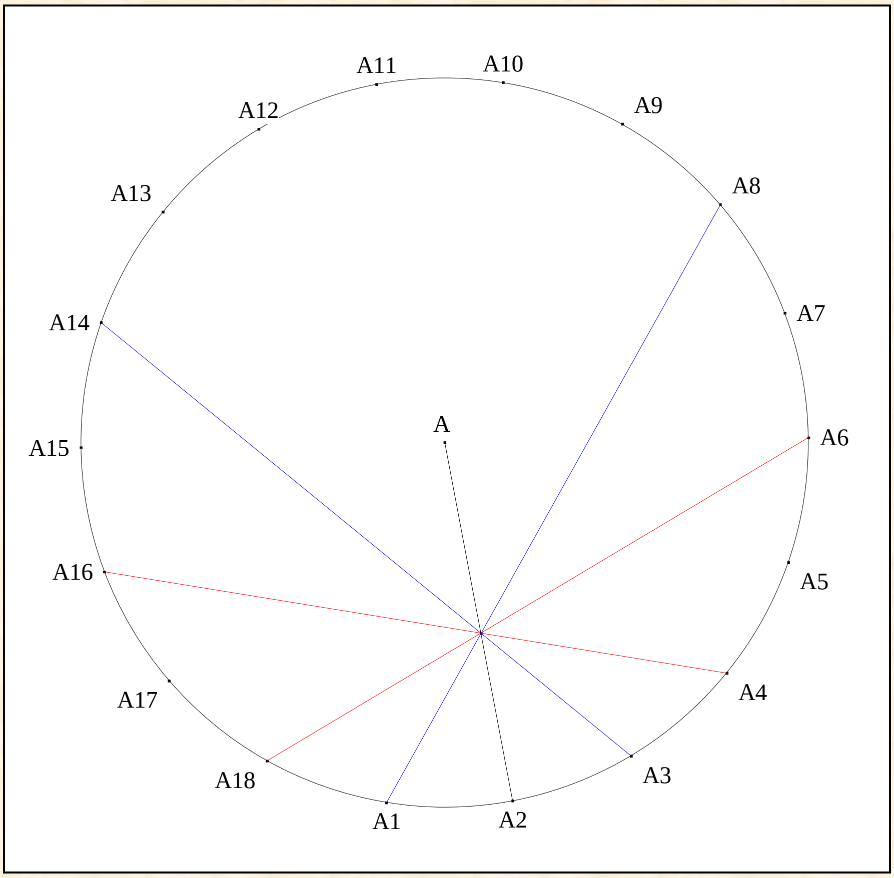
19 Dans la Mythologie, Tantale était le roi de Phrygie qui, pour avoir offensé les dieux, fut précipité dans les Enfers et condamné à une faim et à une soif dévorantes

20 Langley E. M., Adventitious Angles Problem, *Mathematical Gazette*, **11** (1923) 321-323

21 *Mathematical Spectrum* vol. **27** (1995-97) **7**, 65-67

22 Heilbron J. L., *Geometry civilised*, Clarendon Press, Oxford (1998) 292-295

La technique de S. T. Thompson



La preuve de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur [24].

[23] Rike T., An intriguing Geometry Problem, Berkeley Math Circle (2002) ;
Diamond R. A. & Georgiou G. R., Triangles and Quadrilaterals Revisted Part **2** ;
The solution, *Mathematics in School* **30**, **1** (November 2001) 11-13

[24] Ayme J.-L., In memorian of Juan Carlos Salazar, G.G.G. vol. **2**, p. 2-5 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

REGARD 7 [25]

IMO PROBLEM 4 (2014)

Day 2 - 09 July 2014

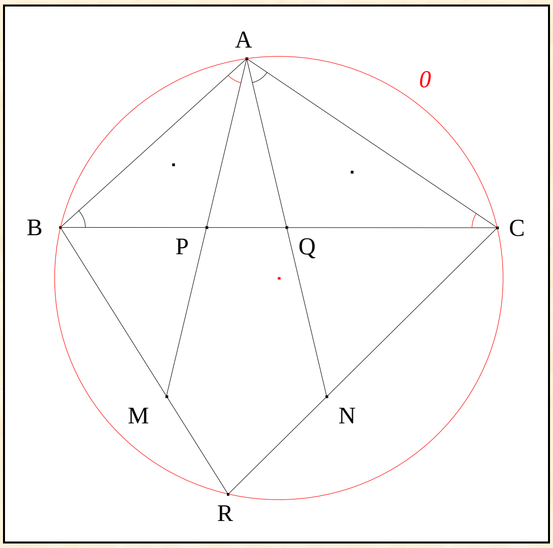
Proposed by

Giorgi Arabidze, Georgia

IMO 2014
Cape Town - South Africa

VISION

Figure :



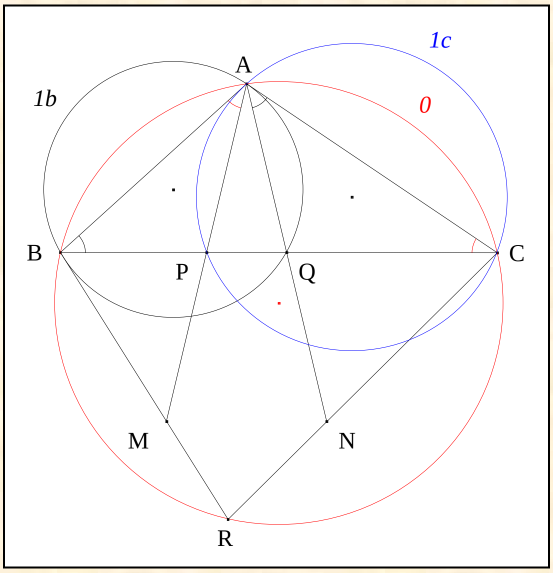
Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
P, Q deux points de (BC) tels que <PAB = <BCA et <CAQ = <ABC,
M, N les symétriques de A resp. par rapport P, Q
et R le point d'intersection de (BM) et (CN).

Donné : R est sur *0*.

Commentaire : pour des géomètres ayant une large vision, ce problème ramené à deux cercles sécants est lié à deux motifs
"les tangentes à l'un des points d'intersection" et au "cercle des milieux".

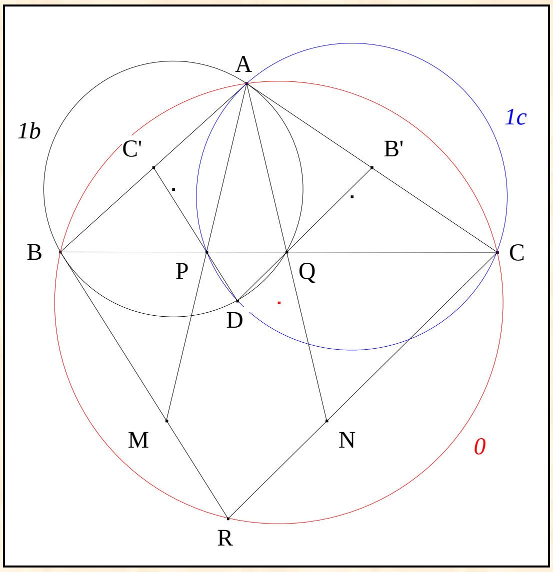
[25] IMO 2014 Problem **4**, AoPS du 09/07/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=3543136

VISUALISATION



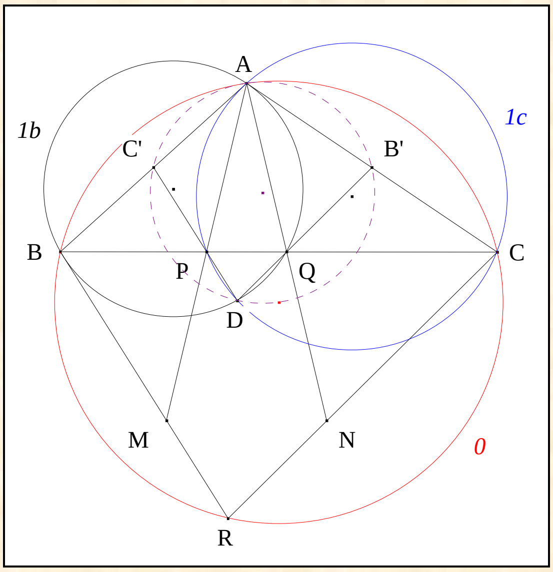
- Notons *1b*, *1c* les cercles circonscrits resp. aux triangles BAQ, CAP.

- D'après "Le théorème de la tangente", **(1)** (AC) est tangente à *1b* en A
  (2) (AB) est tangente à *1c* en A.



- Notons D le second point d'intersection de *1b* et *1c*,
  et B', C' les milieux resp. de [AC], [AB].

- **Scolies :** **(1)** D, Q et B' sont alignés
  (2) D, P et C' sont alignés.



- Une chasse "supplémentaire" :

  * nous avons : <BAC = <C'AB'.

  * d'après "Le cercle des milieux",
    A, D, B' et C' étant cocycliques, <C'AB' est le supplément de <B'DC'.

  * d'après Thalès "La droite des milieux"
    appliqué aux triangles ABM et ACN,
    (C'PD) // (BM) et (B'QD) // (CN)

  * en conséquence, <B'DC' = <CRB ;

  * il s'en suit que <BAC est le supplément de <CRB.

- **Conclusion :** R est sur *0*.

Archive :

Day 2 - *09 July 2014*

4 Let P and Q be on segment BC of an acute triangle ABC such that $\angle PAB = \angle BCA$ and $\angle CAQ = \angle ABC$. Let M and N be the points on AP and AQ, respectively, such that P is the midpoint of AM and Q is the midpoint of AN. Prove that the intersection of BM and CN is on the circumference of triangle ABC.

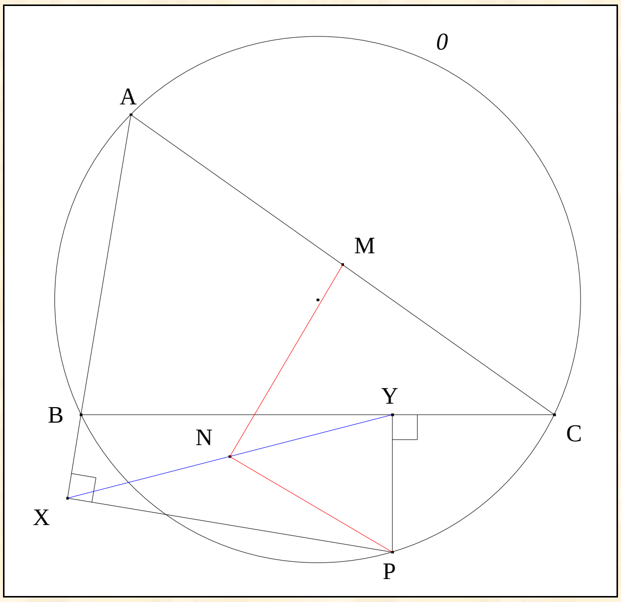
Proposed by Giorgi Arabidze, Georgia.

REGARD 8 [26]

Arseniy V. Akopyan, *Geometry in Figures* (2011)

VISION

Figure :



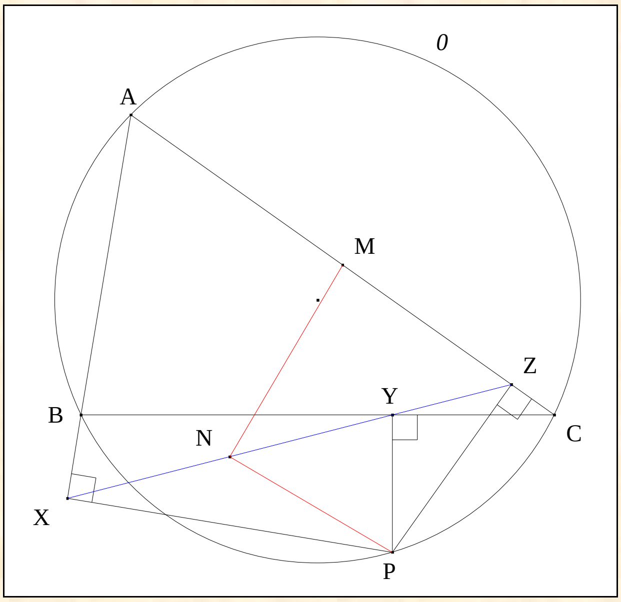
Traits : ABC un triangle acutangle tel que AB < AC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
M le milieu de [AC],
P un point de l'arc BC ne contenant pas A,
X, Y les pieds resp. des perpendiculaires à (AB), (BC) issues de P,
et N le milieu de [XY].

Donné : (NM) est perpendiculaire à (NP).

Commentaire : de la droite de Simson-Wallace au cercle des milieux.

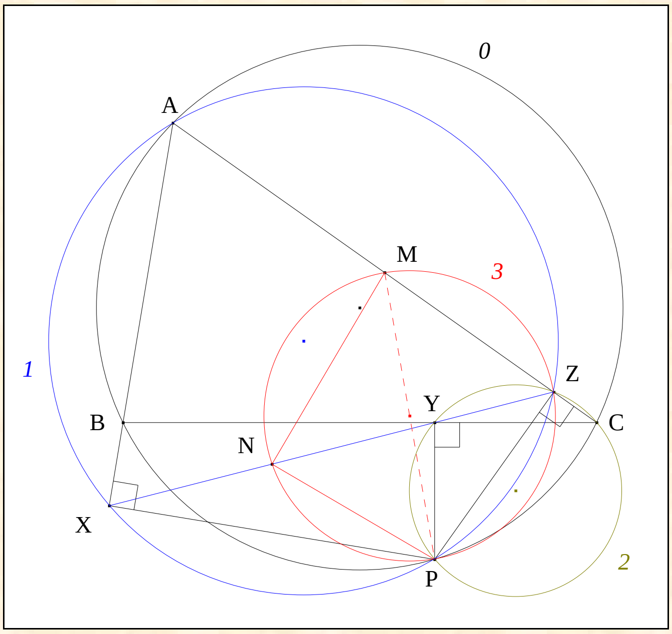
VISUALISATION

[26] Nice geometry problem, AoPS du 11/09/2014 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=605947



- Notons Z le pied de la perpendiculaire à (AC) issue de P.

- D'après "La droite de Simson-Wallace" [27]
  appliqué à P relativement à ABC, X, Y et Z sont alignés.



- Notons *1* le cercle de diamètre [AP] ; il passe par X et Z ;
  et *2* le cercle de diamètre [CP] ; il passe par Y et Z.

- D'après "Le cercle des milieux" [28]
  appliqué à *1* et *2*, P, Z, M et N sont cocycliques.

- Notons *3* ce cercle de diamètre [MP].

- **Conclusion :** d'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle",
  (NM) est perpendiculaire à (NP).

---

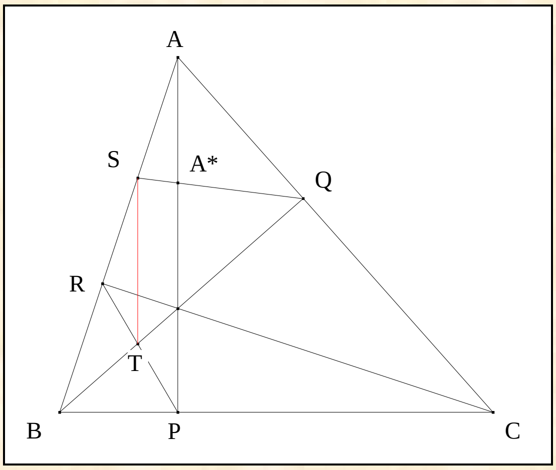
27 Ayme J.-L., Droite de Simson-Wallace de pôle Fe…, G.G.G. vol. **7**, p. 2-4 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
28 Ayme J.-L., The mid circle theorem, G.G.G. vol. **25**, p. 3-4 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

REGARD 9

L'équivalence d'Aubert-MacKensie

VISION

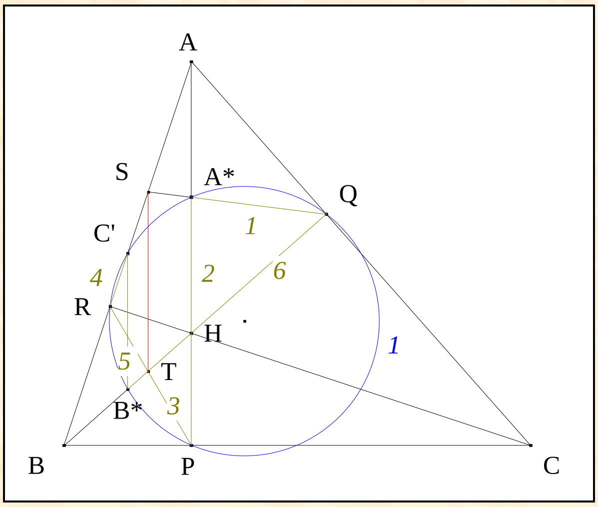
Figure :



Traits : ABC un triangle,
PQR le triangle orthique de ABC,
A* le A-point d'Euler de ABC
et S, T les points d'intersection resp. de (QA*) et (AB), (PR) et (BQ).

Donné : (ST) est perpendiculaire à (BC). [29]

VISUALISATION



- Notons H l'orthocentre de ABC,
  C' le milieu de [AB],
  B* le B-point d'Euler de ABC
  et *1* le cercle d'Euler de ABC.

[29] Two perpendiculars, APS du 05/01/2015 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=619855

- D'après Thalès "La droite des milieux" appliqué au triangle ABH, (B*C') // (AHP).

- D'après "L'équivalence d'Aubert- MacKensie" [30],

  (1) (ST) est la pascale de l'hexagone cyclique QA*PRC'B*Q

  (2) (ST) // (AHP).

- Par définition d'une hauteur, (AP) ⊥ (BC) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (ST) ⊥ (BC).

- **Conclusion :** (ST) est perpendiculaire à (BC).

Note historique : d'après mes lectures, une solution trigonométrique en a été donnée et
the greek IMO *constestand and medalist Silouan found a nice solution with harmonics*

[30] Ayme J.-L., La P-transversale de Q, G.G.G. vol. **3**, p. 6-8 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/