LE POINT DE SCHIFFLER

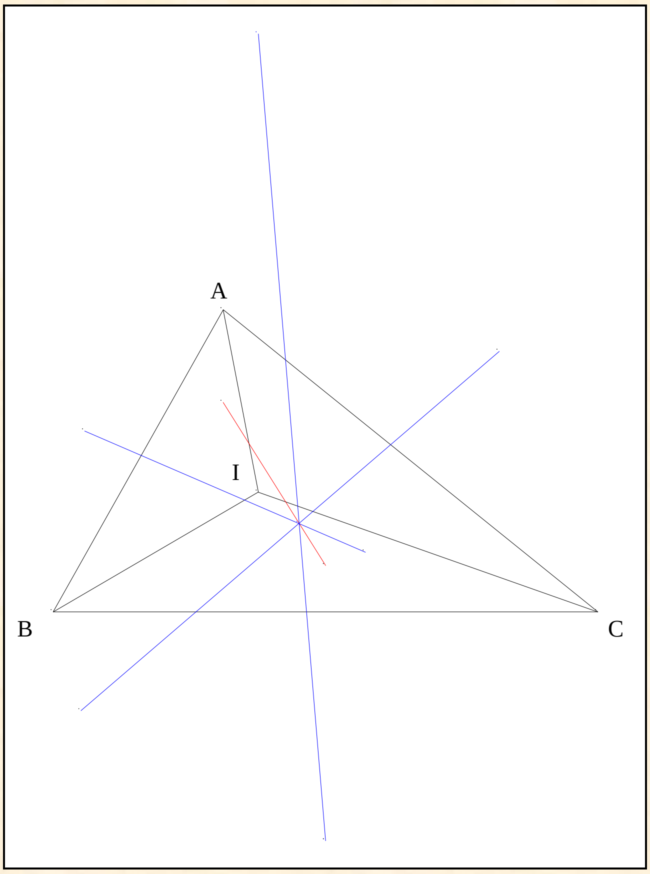
ET

LE RÉSULTAT DE LEV ET TATIANA EMELYANOV

A NEW AND SIMPLE SYNTHETIC PROOF

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article présente un centre remarquable, le point de Schiffler ainsi que les deux résultats de Lev et Tatiana Emelyanov par une nouvelle approche à la fois simple et élémentaire.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The paper presents a remarkable center, the Schiffler's point and the result of Lev and Tatiana Emelyanov by a new approach to both simple and elementary.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically

[1] St-Denis, Île de la Réunion (France), le 01/08/2011.

Sommaire

A. LE PROBLEME 1018

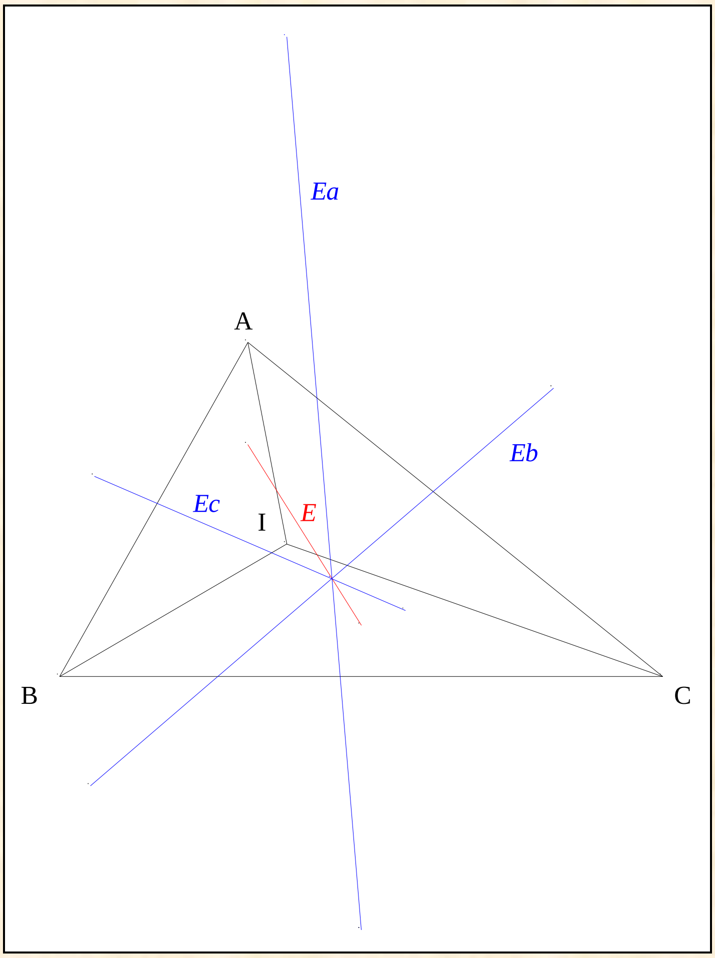
DE

CRUX MATHEMATICORUM

1. Le problème

VISION

Figure :

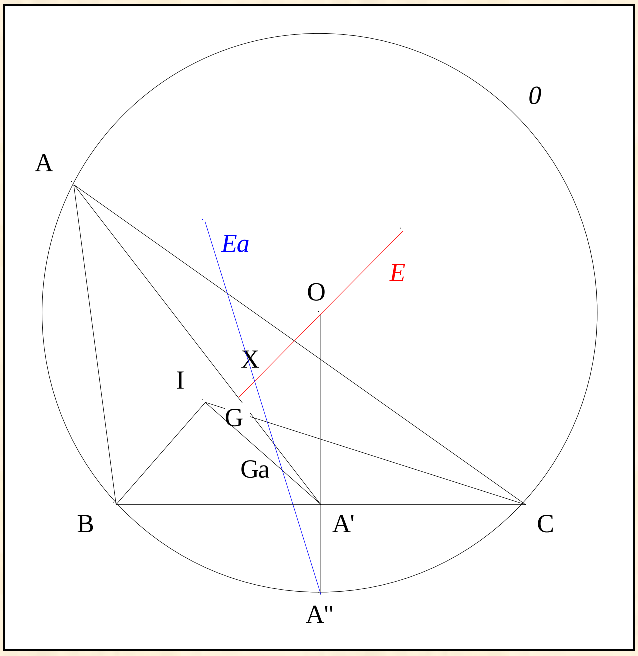


Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
et	*E*, *Ea*, *Eb*, *Ec*	les droites d'Euler des triangles ABC, IBC, ICA et IAB.

Donné : *E*, *E*a, *E*b et *E*c sont concourantes. [2]

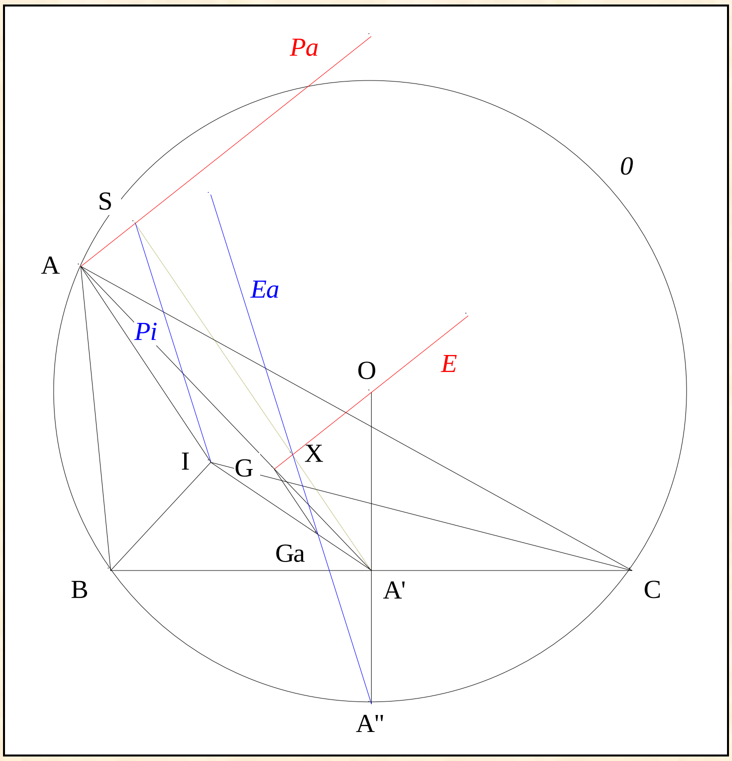
VISUALISATION [3]

[2] Schiffler K., Problème **1018**, *Crux Mathematicorum* vol. **11**, **2** (février 1985) 51.
[3] de l'auteur.



• Notons	A'	le milieu du côté [BC],
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	G	le point médian de ABC,
	A"	le second A-perpoint de ABC,
	Ga	le point médian de IBC
et	X	le point d'intersection de *E* et *E*a.

• **Scolies :**	**(1)**	d'après "La droite d'Euler" [4],	*E* = (OG)
	(2)	A" est le centre du cercle circonscrit à IBC ;	
		en conséquence,	*Ea* = (A"Ga).



[4] Ayme J.-L., La fascinante figure de Cundy, G.G.G. vol. **2** p. 3-4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

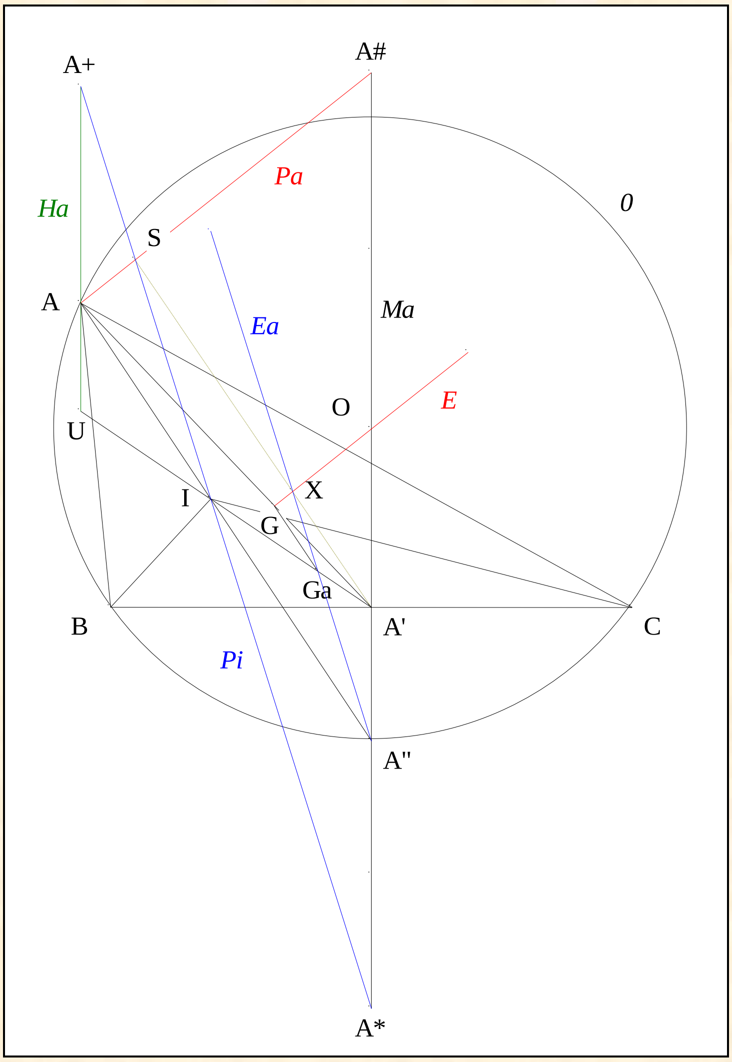
- Notons *Pa* la parallèle à *E* passant par A,
  Pi la parallèle à *Ea* passant par I
  ety S le point d'intersection *Pi* et *Pa*.

- **Scolies :** **(1)** G est le deuxième tiers-point de [AA'] à partir de A
  (2) Ga est le deuxième tiers-point de [IA'] à partir de I.

- D'après Thalès "Rapports", (GGa) // (AI).

- D'après Desargues "Le théorème faible"
  appliqué aux triangles homothétiques ASI et GXGa, S, X et A' sont alignés.

- **Conclusion partielle :** $\frac{XG}{XO} = \frac{SA}{SA\#}$.



- Notons *Ma* la médiatrice de [BC],
  A*, A# les points d'intersection de *Ma* resp. avec *Pi*, *Pa*,
  Ha la A-hauteur de ABC,
  A+, U les points d'intersection de *Ha* resp. avec *Pi*, (A'I),
  et R, r les rayons des cercles resp. circonscrit, inscrit à ABC.

- Un premier calcul segmentaire :

* d'après Thalès "Rapports", *Ha* étant parallèle à *Ma*,
A est le deuxième tiers-point de [A+U] à partir de A+

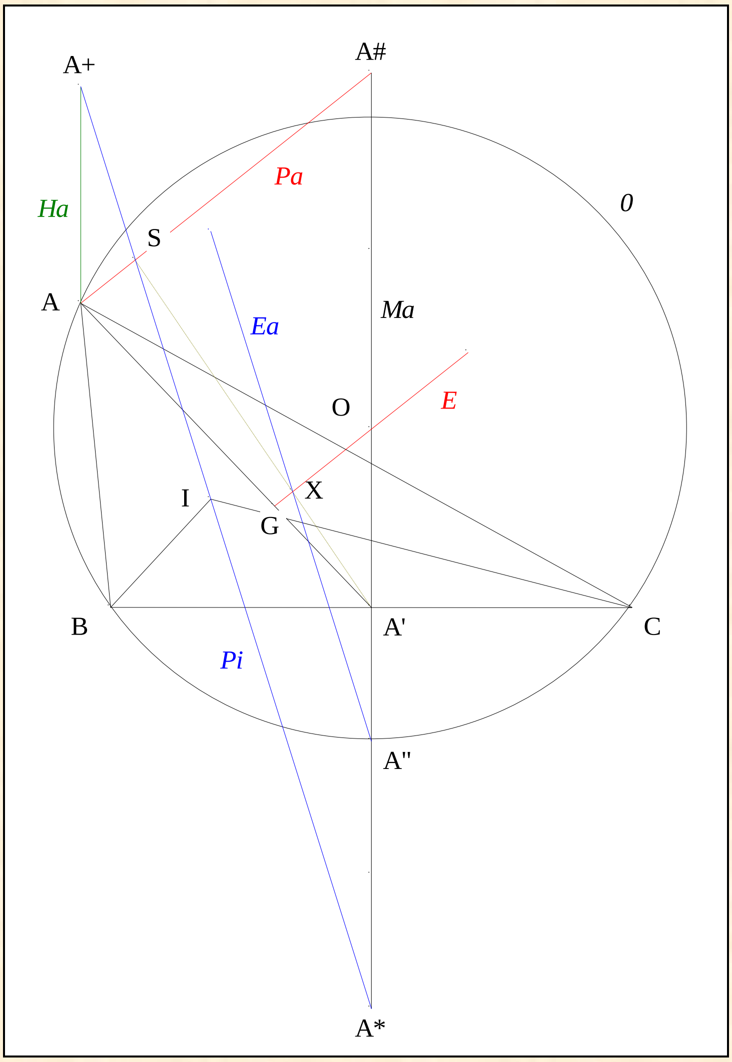
(2) *E* étant parallèle à *Ea*,
O est le deuxième tiers-point de [A#A'] à partir de A#

* par recomposition, A*A# = 3.R

- Un second calcul segmentaire :

* d'après Thalès "Rapports", **(1)** (GaA") étant parallèle à (IA*),
A" est le deuxième tiers-point de [A*A'] à partir de A*

* d'après "Rayon du cercle inscrit" (Cf. **D.** Annexe **1**), AU = r ;
en conséquence, AA+ = 2.r



- Nous avons : $\frac{SA}{SA\#} = \frac{AA+}{A\#A*}$;

$\frac{AA+}{A\#A*} = \frac{2r}{3R}$;

par transitivité, $\frac{XG}{XO} = \frac{2r}{3R}$.

- **Conclusion partielle :** *Ea* passe par le point fixe X.

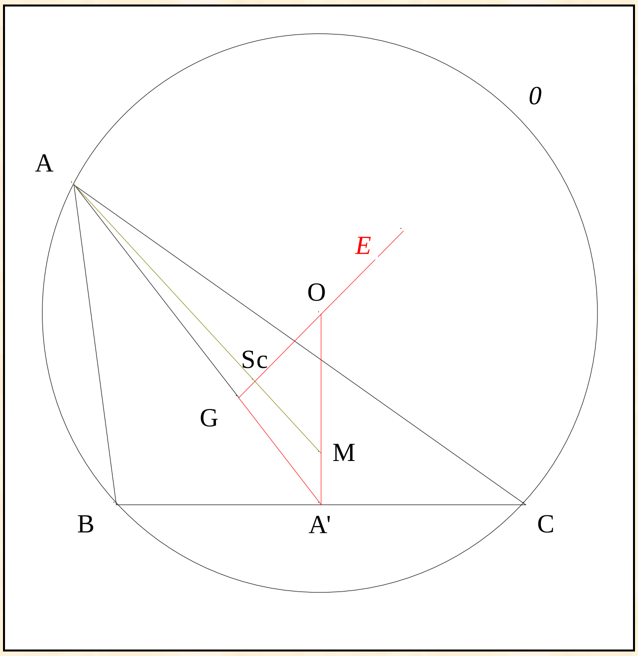
- Mutatis mutandis, nous montrerions que *Eb* passe par le point fixe X
Ec passe par le point fixe X.

- **Conclusion :** *E*, *E*a, *E*b et *E*c sont concourantes en X.

Énoncé traditionnel : *les droites d'Euler des triangles* IBC, ICA, IAB *et* ABC *sont concourantes*.

Scolies : **(1)** ce point de concours, noté Sc, est "le point de Schiffler de ABC" et est répertorié sous X_{21} chez ETC [5].

(2) Le premier point d'appui



- D'après **A. 1.** Le problème, $\frac{XG}{XO} = \frac{2r}{3R}$.

- Nous savons que G est le deuxième tiers-point de [AA'] à partir de A.

- **Conclusion :** d'après le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle GOA' et à la ménélienne (ScMA), $\frac{MA'}{MO} = \frac{r}{R}$.

Note historique : ce résultat de 1985 découvert par l'ingénieur allemand Kurt Schiffler de Schorndorf (Allemagne) et proposé dans la revue canadienne *Crux Mathematicorum*, a été résolu l'année suivante à l'aide du théorème de Ménélaüs , dans la même revue, par deux hollandais, G. R. Veldkamp de Bilt et W. A. van der Spek de Leeuwarden [6]. L'éditeur

---

[5] Kimberling C., Triangle Centers and Central Triangles, *Congressus Numerantium*, 129 (1988) 70 ;
Encyclopedia of Triangle Centers ; http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

[6] Veldkamp G. R., van der Spek W. A., Problème **1018** and Solution, *Crux Mathematicorum* **12**, **6** (June 1986) 150-152.

précise à la fin de la solution qu'il a été aussi résolu par l'hollandais D. J. Smeenk de Zaltbommel. Des demandes peuvent être vues sur le site *Mathlinks*.[7]

Rappelons que le lieu des points P pour lesquels les triangles ABC, PBC, PCA et PAB ont des droites d'Euler concourantes avait été mentionné en 1954 par Frank Morley et son fils, Frank Vigor Morley, dans leur livre *Inversive Geometry* [8] et qu'en 2001, Antreas P. Hatzipolakis, Floor van Lamoen, Barry Wolk, et Paul Yiu [9] publiaient dans la revue électronique *Forum Geometricorum* un article approfondi sur le sujet en remplaçant "droites d'Euler" par "axes de Brocard" ou par "droites (OI) joignant le centre O du cercle circonscrit au triangle au centre I de son cercle inscrit".

2. A propos du nom de ce point

G. R. Veldkamp et W. A. van der Spek ont suggéré dans leur solution de nommer ce point d'après l'auteur du problème.
En janvier 2000, sur le site *Hyacinthos*, Floor van Lamoen[10] adoptant le point de vue de l'analyse géométrique i.e. l'application de l'Analyse à la Géométrie déclare

"It is not correct to attribute this theorem to Kurt Schiffler. According to Zvonko Cerin's paper [11], the Neuberg cubic was mentioned as locus curve for P such that the Euler lines of ABC, PBC, APC and ABP concur by F. Morley and F. V. Morley [12] already, as an exercise on page 200. This is far before Schiffler's problem appeared. Perhaps in the forthcoming ETC he will change it. But where appeared the theorem for the FIRST time? In Morley & Morley, or was it known before? When Veldkamp and van der Spek suggested the name "Schiffler point," they may not have been aware of the theorem that puts this point on a known curve. But, in their defence, did anyone call specific attention to this point before Schiffler did? "

et poursuit dans un autre message[13]

"I did not intend to ask withdrawing Schiffler's name from his point, but withdrawing his name from the theorem that the four Euler lines concur".

3. Une courte biographie de Kurt Schiffler

---

[7] Concurrence of 4 Euler lines [Schiffler point], *Mathlinks* du 28/08/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=108577
Pure Geometric Proof Of Schiffler Point, *Mathlinks* du 21/07/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=419530
Grinberg D., Schiffler Theorem proven synthetically??, Message *Hyacinthos* # 7024 du 22/04/2003 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/7024

[8] Morley F., Morley F. V., *Inversive Geometry*, Chelsea Publ. Co., New York (1954) 200.

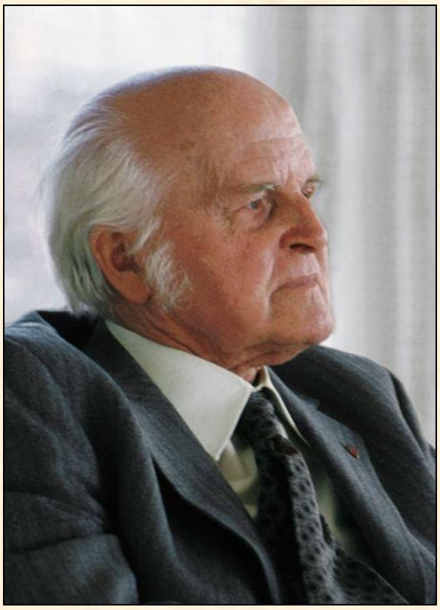
[9] Hatzipolakis A., van Lamoen F., Wolk B., Yiu P., Concurrency of Four Euler Lines, *Forum Geometricorum* vol. **1** (2001) 59-68.

[10] Van Lamoen F., Locus problem, Messge *Hyacinthos* # **96** du 08/01/2000 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

[11] Cerin Z., Locus properties of the Neuberg cubic, *Journal of Geometry* **63** (1998) 39-56.

[12] Morley F. and Morley F. V., Inversive Geometry, Chelsea Publ. Co., New York (1954).

[13] Van Lamoen F., Schiffler Point (was: extra's and ex's), Message *Hyacinthos* # **159** du 13/01/2000 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



Kurt Schiffler est né le 6 avril 1896 à Gotha (Thuringe, Allemagne).
Après des études d'ingénieur à la Bergakademie de Freiberg (Saxe) et ensuite à l'Université technique de Stuttgart (Wurtemberg), cet homme déterminé et talentueux, fasciné par les sciences, et en symbiose avec l'art, la musique et l'éducation, fonde le 7 octobre 1925 l'entreprise DUSYMA[14] qui se spécialise dans la fabrication de jouets, de meubles et de matériel pédagogique pour les écoles maternelles.

Joueur de mandoline et passionné par géologie des minéraux et des cristaux, il est aussi un géomètre accompli qui aura la grâce de découvrir l'un des points les plus fascinants centres de la géométrie du triangle.
Il décède le 25 février 1986.

B. LE RÉSULTAT DE LEV ET TATIANA EMELYANOV

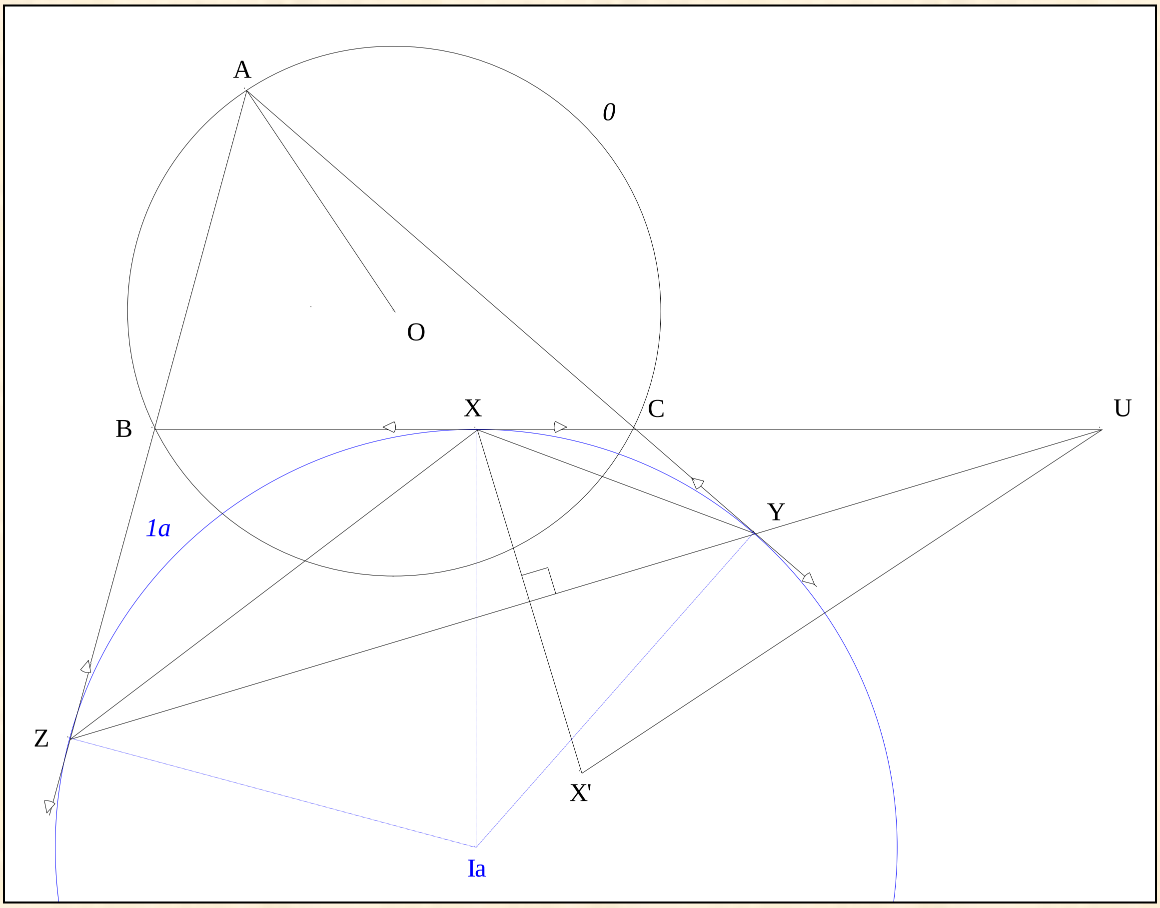
1. Deux perpendiculaires

VISION

Figure :

---

[14] Dusyma sont les initiales de "Durchmesser-Symmetrie-Masstabes".
Schiffler K., Problem 1018, *Crux Mathematicorum* (1985) 51.



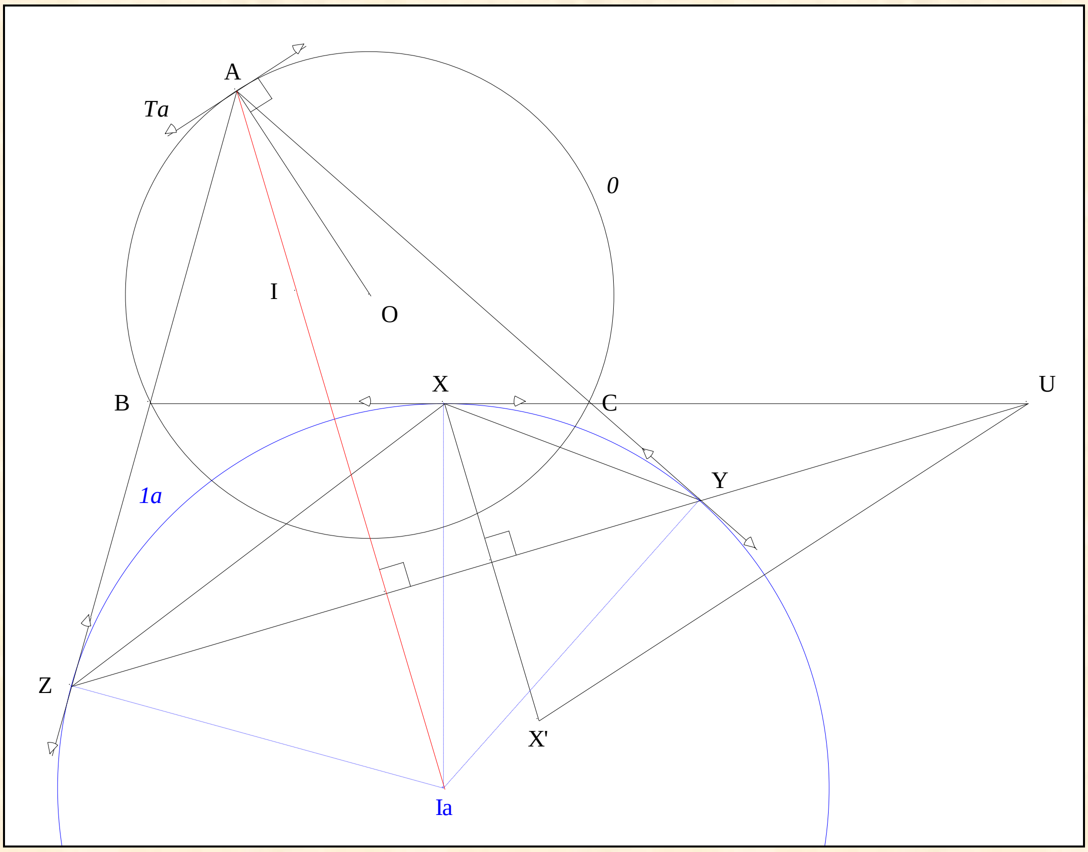
Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
1a le A-excercle de ABC,
Ia le centre de *1a*,
XYZ le triangle A-excontact de ABC,
X' le symétrique de X par rapport à (YZ)
et U le point d'intersection de (YZ) et (BC).

Donné : (X'U) est perpendiculaire à (AO). [15]

VISUALISATION

---

[15] Ayme J.-L., A perpendicular to AO, *Mathlinks* du 26/07/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=420335



- Notons *Ta* la tangente à *0* en A
  et I le centre de ABC.

- Par définition, (AO) ⊥ *Ta* .

- D'après "Le théorème de la médiatrice", (AIa) ⊥ (YZ) ;
  par hypothèse, (YZ) ⊥ (XX') ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AIa) // (XX').

- **Scolie :** (AB) et (AC) admettent les mêmes bissectrices que (UCB) et (UX').

- La technique de l'antiparallélisme (Cf. **C.** Appendice) **(1)** [(BC), *Ta*] \\ [(AB), (AC)]

  (2) [(AB), (AC)] \\ [(UCB), (UX')]

  (3) [(UCB), (UX')] \\ [(BC), (UX')]

  par transitivité de la relation \\, [(BC), *Ta*] \\ [(BC), (UX')]

  en conséquence, *Ta* // (UX') ;

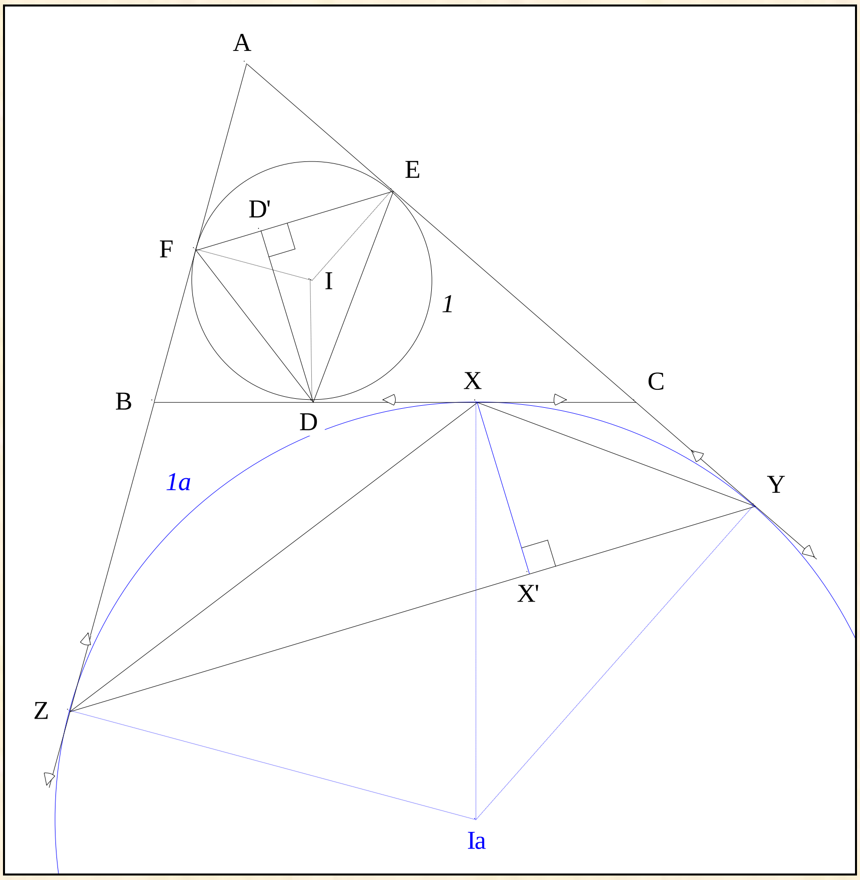
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (AO) ⊥ (UX').

- **Conclusion :** (X'U) est perpendiculaire à (AO).

2. Deux hauteurs égales

VISION

Figure :

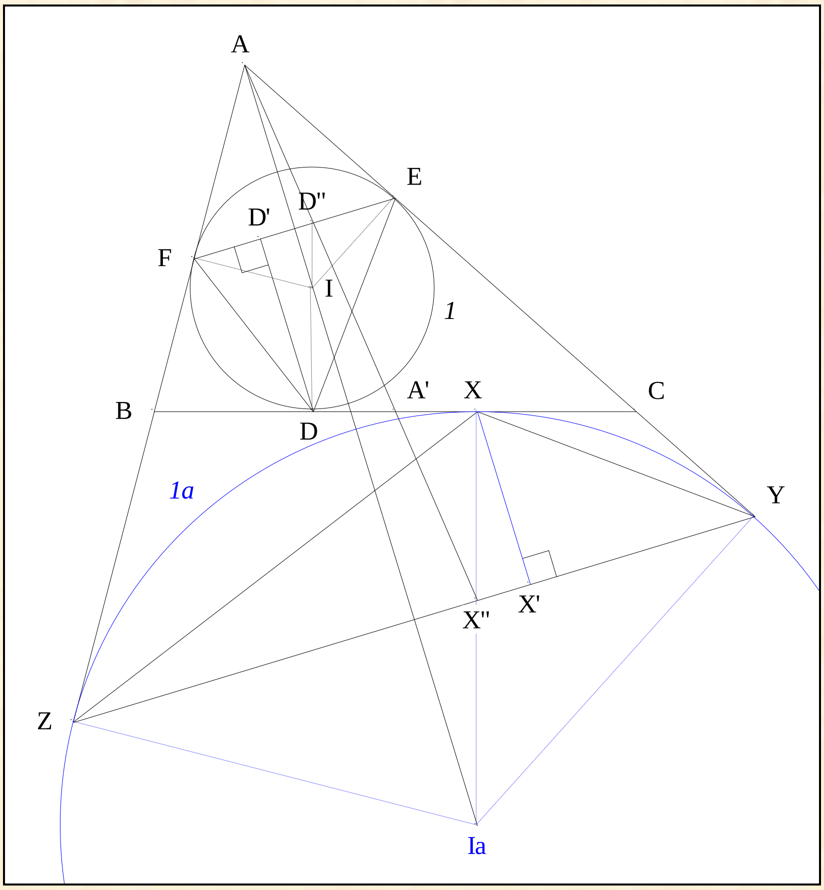


Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit de ABC,
I le centre de *1*,
DEF le triangle de contact de ABC,
D' le pied de la D-hauteur de DEF,
1a le A-excercle de ABC,
Ia le centre de *1a*,
XYZ le triangle A-excontact de ABC,
et X' le pied de la X-hauteur de XYZ.

Donné : XX' = DD'. [16]

VISUALISATION

[16] Ayme J.-L., Two equal altitudes, *Mathlinks* du 24/07/2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=419980



- Notons D" le point d'intersection de (DI) et (EF),
  et X" le point d'intersection de (XIa) et (YZ).

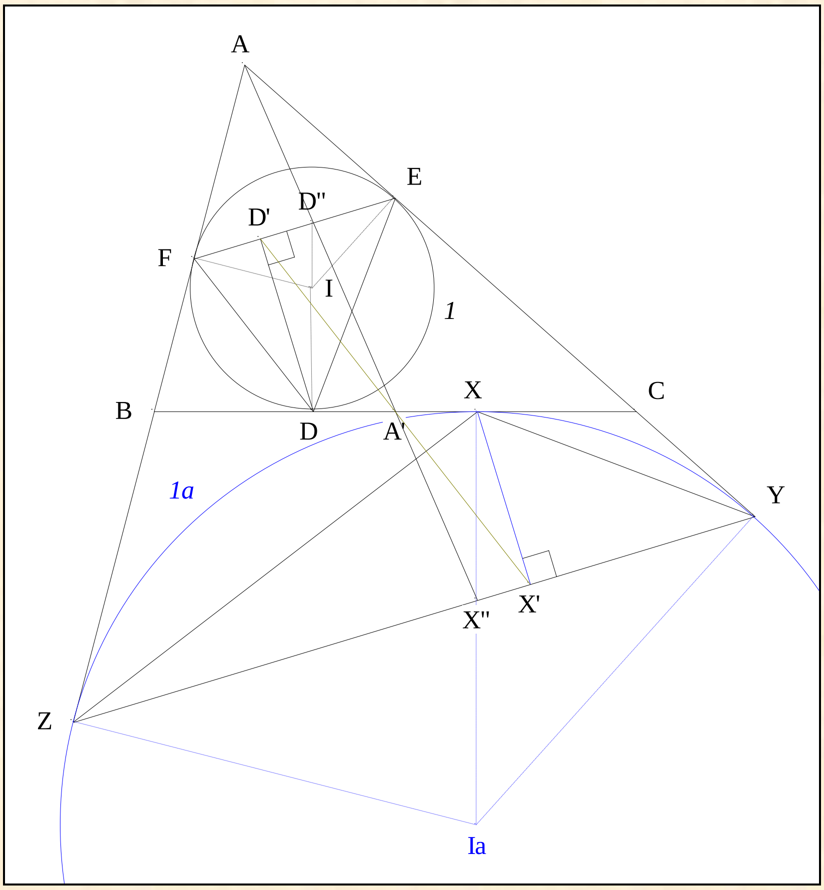
- **Scolies :** **(1)** A, I et Ia sont alignés
  (2) (DID") // (XX"Ia) , (ED"F) // (YX"Z) , (IE) // (IaY).

- D'après Desargues "Le théorème faible"
  appliqué aux triangles homothétiques ID"E et IaX"Y, A, D" et X" sont alignés.

- D'après "Un médiane" (Cf. **D.** Annexe **2**), A, D" et A' sont alignés ;
  d'après l'axiome d'incidence Ia, A, D", A' et X" sont alignés.

- **Scolie :** A' est le milieu de [DX].

- D'après l'axiome de passage IIIa
  appliqué à la bande de frontières (DD") et (XX"), A' est le milieu de [D"X"].



- **Scolies :** **(1)** A' est le milieu de [DX]
  (2) (DD') (XX').

- D'après Desargues "Le théorème faible"
  appliqué aux triangles homothétiques XX'X" et DD'D", X', A' et D' sont alignés.

- D'après l'axiome de passage IIIa
  appliqué à la bande de frontières (DD") et (XX"), A' est le milieu de [D'X'].

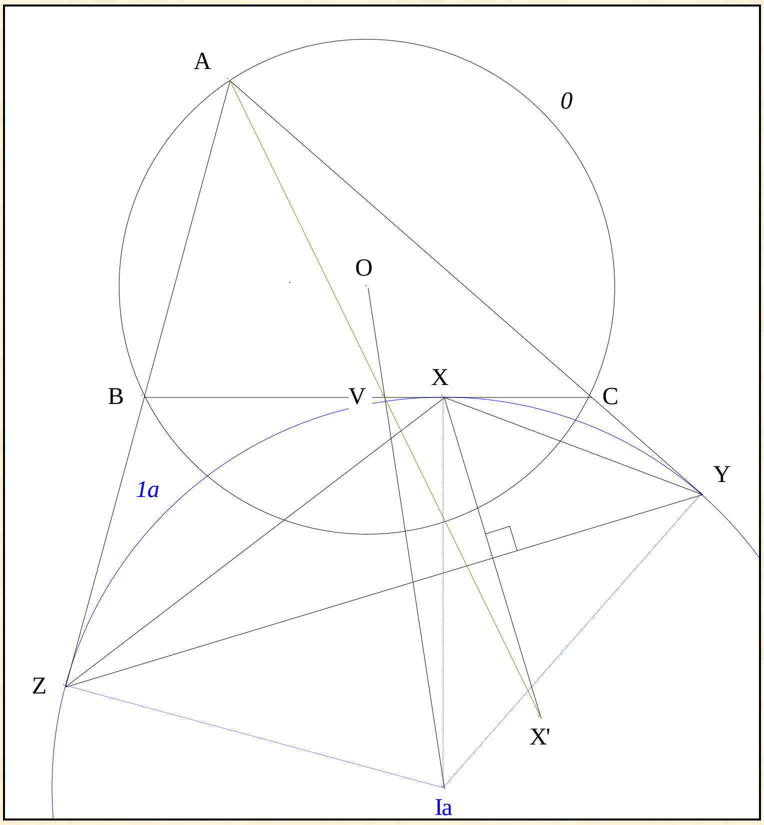
- Le quadrilatère DD'XX' ayant ses diagonales se coupant en leurs milieux, est un parallélogramme.

- **Conclusion :** XX' = DD'.

3. Trois points alignés

VISION

Figure :

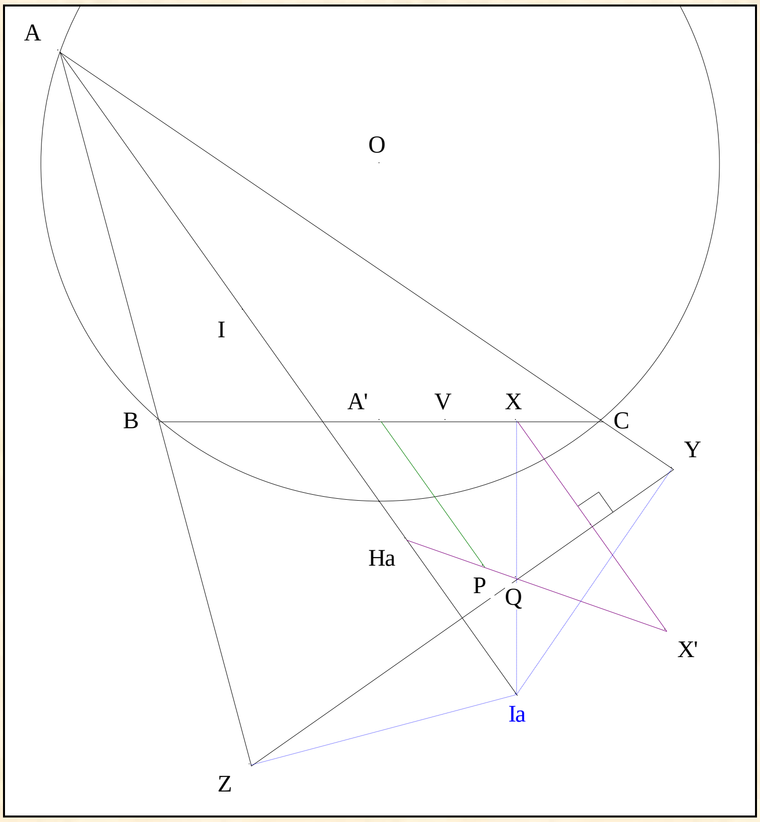


Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
O le centre du cercle circonscrit à ABC,
1a le A-excercle de ABC,
Ia le centre de *1a*,
XYZ le triangle A-excontact de ABC,
X' le symétrique de X par rapport à (YZ)
et V le point d'intersection de (OIa) et (BC).

Donné : A, V et X' sont alignés. [17]

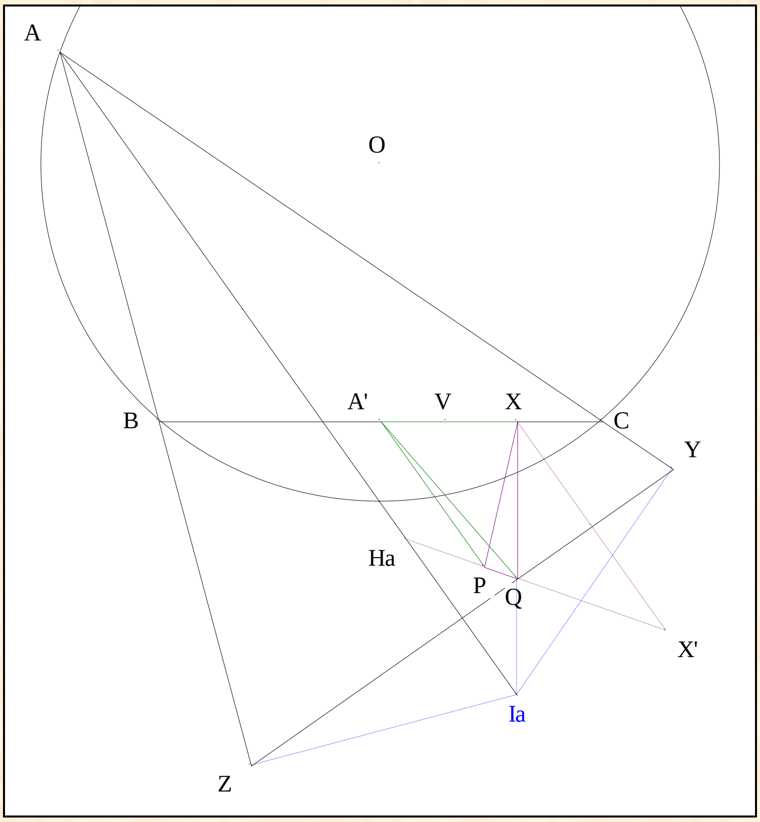
VISUALISATION

[17] Ayme J.-L., Three collinear points, *Mathlinks* du 26/07/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=420356

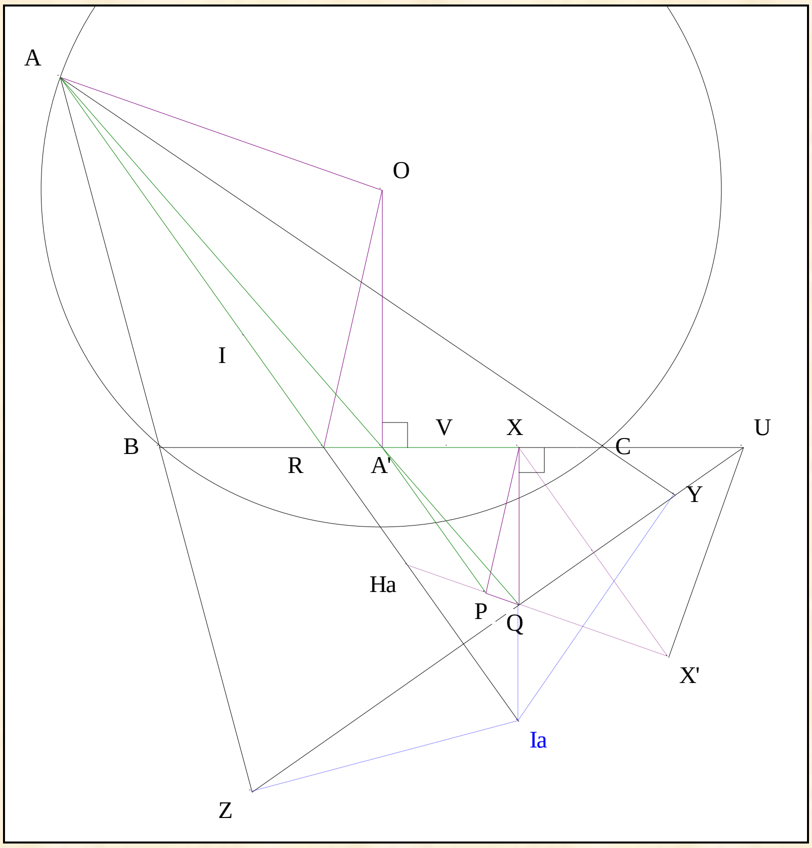


- Notons Ha l'orthocentre du triangle AYZ,
  I le centre de ABC,
  A' le milieu de [BC],
  P le point d'intersection de la parallèle à (XX') avec (X'Ha)
  et Q le point d'intersection de (XIa) et (X'Ha).

- **Scolies :** **(1)** Ha est le symétrique de Ia par rapport à (YZ)
  (2) Q est sur (YZ)
  (3) (A'P) // (AIa).



- Considérons le triangle PQX et ses trois céviennes (PA'), (QA'), (XA') concourantes en A'.



- Notons R, U les points d'intersection de (BC) resp. avec (AIa), (YZ).

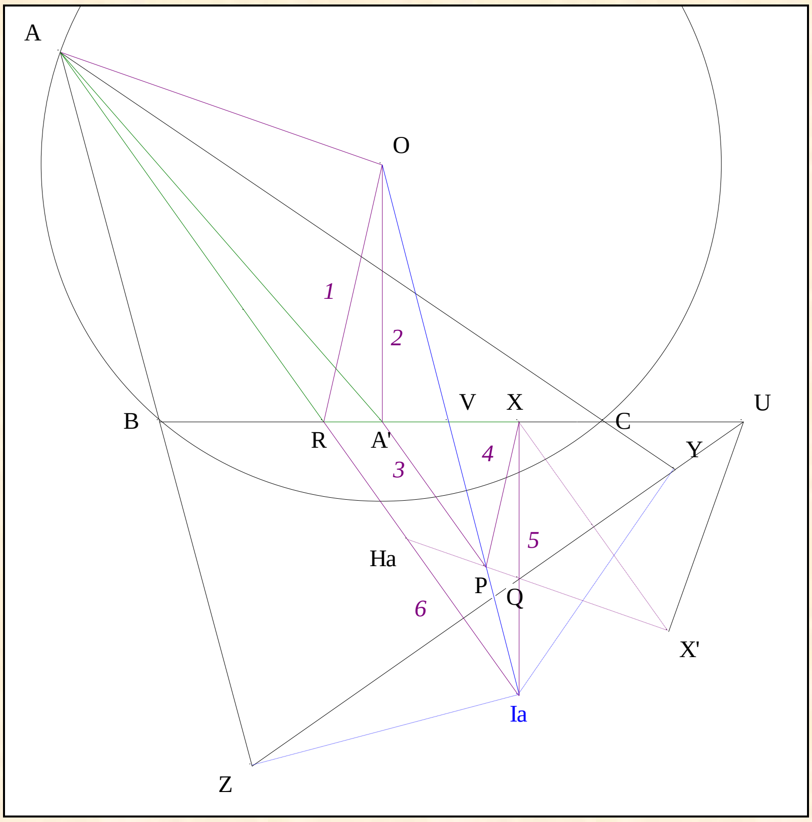
- Par symétrie par rapport à (YZ), (PQX') ⊥ (UX') ;
  d'après **B. 1.** Deux perpendiculaires, (UX') ⊥ (AO) ;
  d'après l'axiome IVa des perpendiculaires, (PQ) // (AO).

- Considérons le triangle AA'R et ses trois céviennes (AO), (A'O), (RO) concourantes en O.

- **Scolies :** **(1)** d'après **B. 2.** Deux hauteurs égales, (AA') // (QA')
  (2) par hypothèse, (A'R) // (XA')
  (3) rappelons que (AR) // (PA').

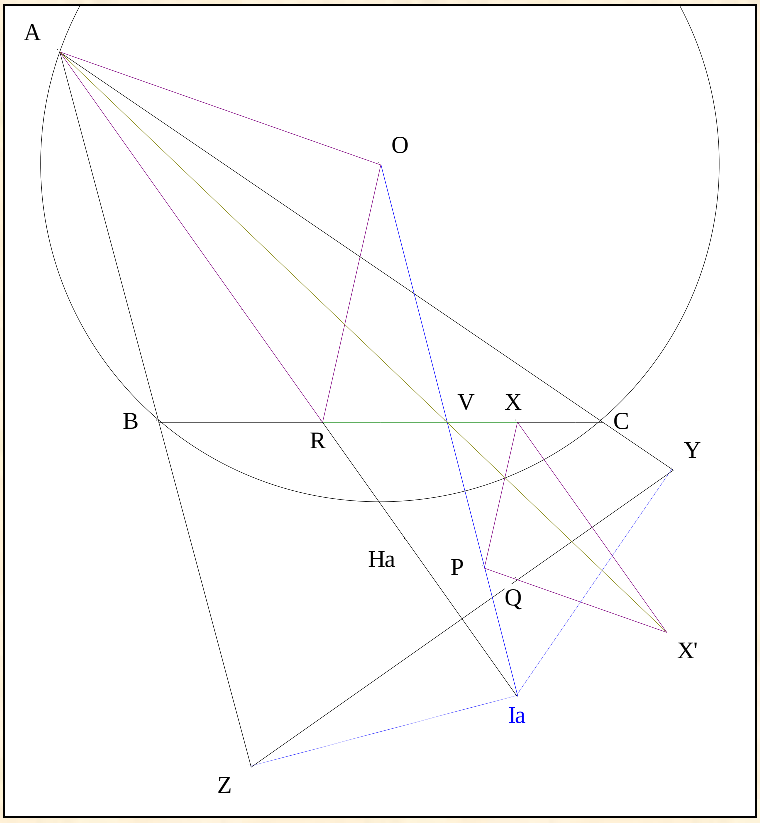
  De plus, **(1)** (AO) // (PQX')
  (2) (A'O) // (QX).

- **Conclusion partielle :** d'après Neuberg "Deux triangles parallélogiques" (Cf. **D.** Annexe **3**)
  appliqué à * PQX et ses trois céviennes (PA'), (QA'), (XA')
  * AA'R et ses trois céviennes (AO), (A'O), (RO),
  (RO) // (PX)



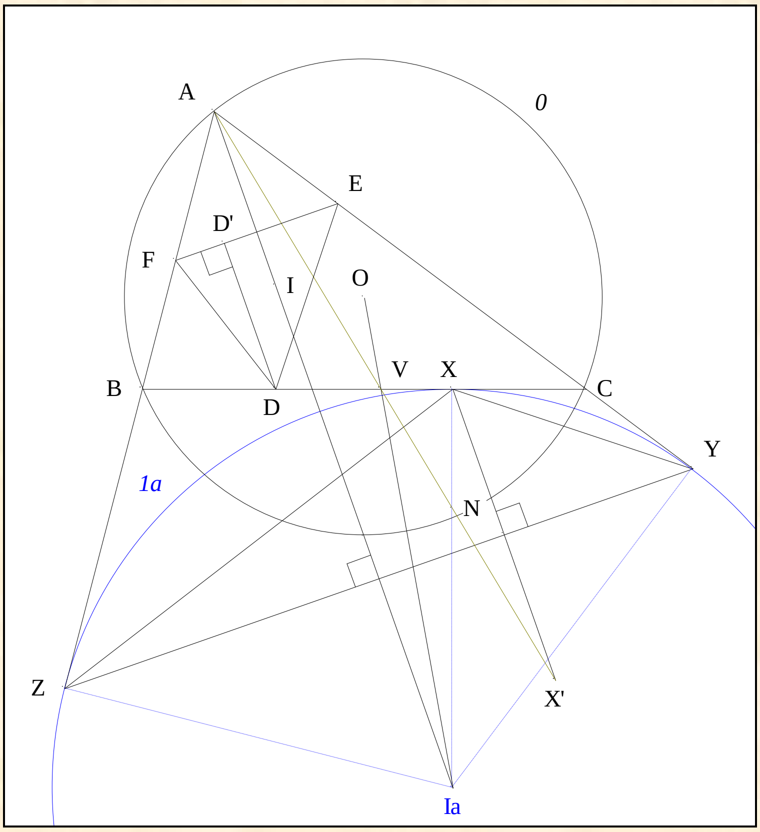
- D'après Pappus "Le petit théorème" (Cf. Annexe **4**), O, P et Ia sont alignés.

- **Conclusion partielle :** O, V, P et Ia sont alignés



- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème faible" (Cf. Annexe **5**) appliqué aux triangles homothétiques AOR et X'PX, A, V et X' sont alignés.

Scolie : le second point d'appui

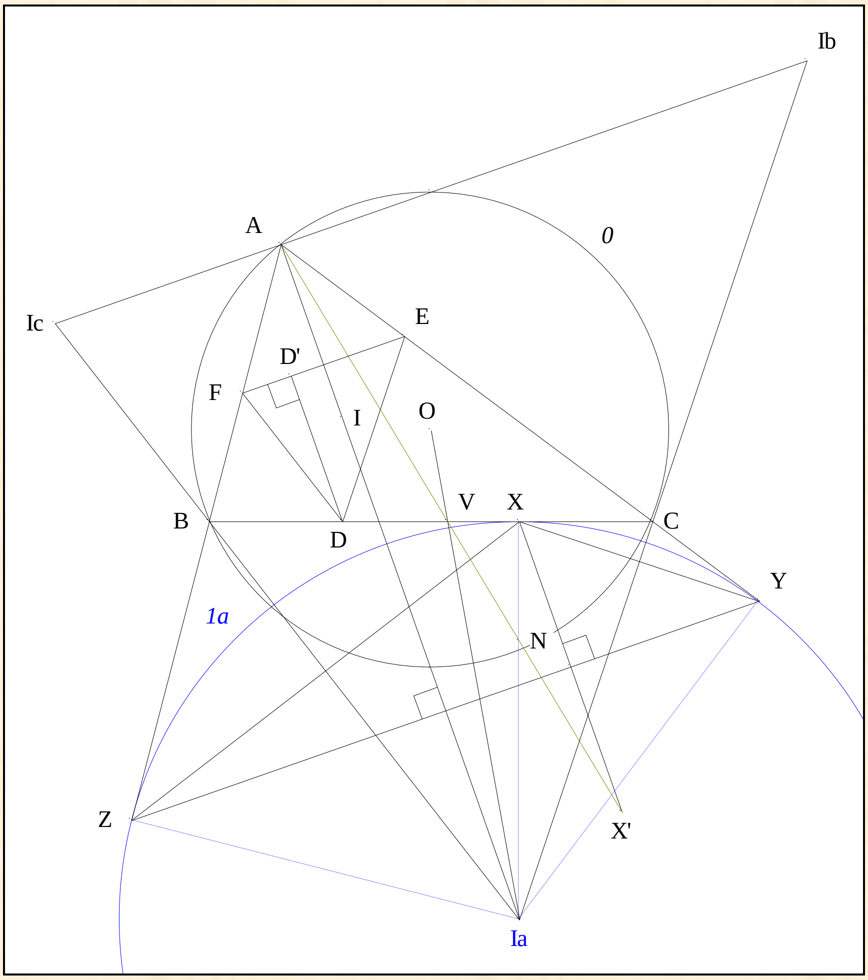


- Notons I le centre de ABC,
  DEF le triangle de contact de ABC
  et D' le pied de la D-hauteur de DEF.

- Nous avons : $\dfrac{NX}{NIa} = \dfrac{XX'}{AIa}$.

- D'après **B. 2.** Deux hauteurs égales, XX' = 2.DD' ;
  en conséquence,

$$\frac{NX}{NIa} = \frac{2.DD'}{AIa} .$$



- Notons IaIbIc le triangle excentral de ABC,
  1' le cercle circonscrit à IaIbIc
  et R' le rayon de *1'*.

- *1* étant le cercle d'Euler de IaIbIc, R' = 2.R.

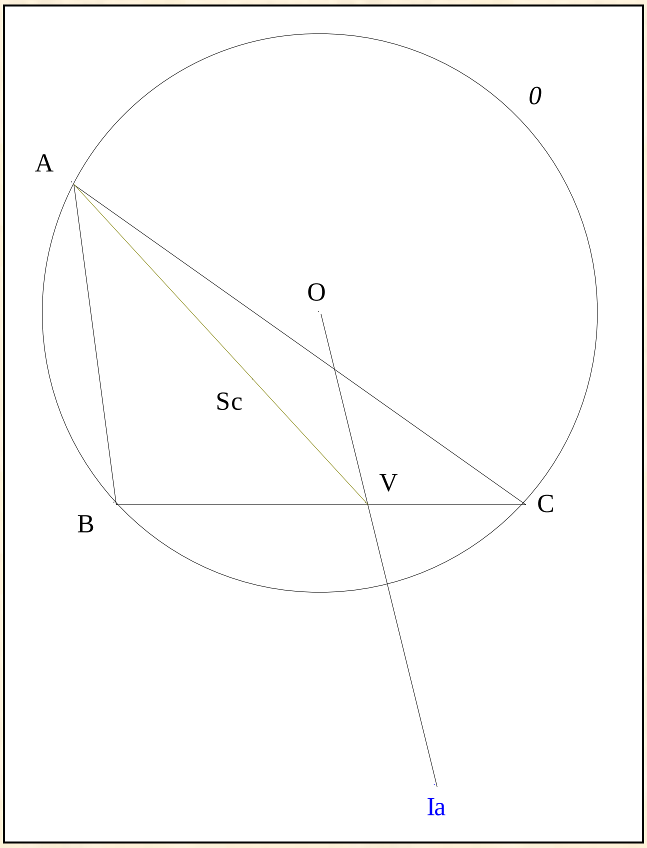
- Les triangles DEF et IaIbIc étant homothétiques, $\frac{2.DD'}{AIa} = \frac{r}{R}$.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation =, $\frac{NX}{NIa} = \frac{r}{R}$.

4. Les théorèmes 1 et 2 de Lev et Tatiana Emelyanov

VISION

Figure :

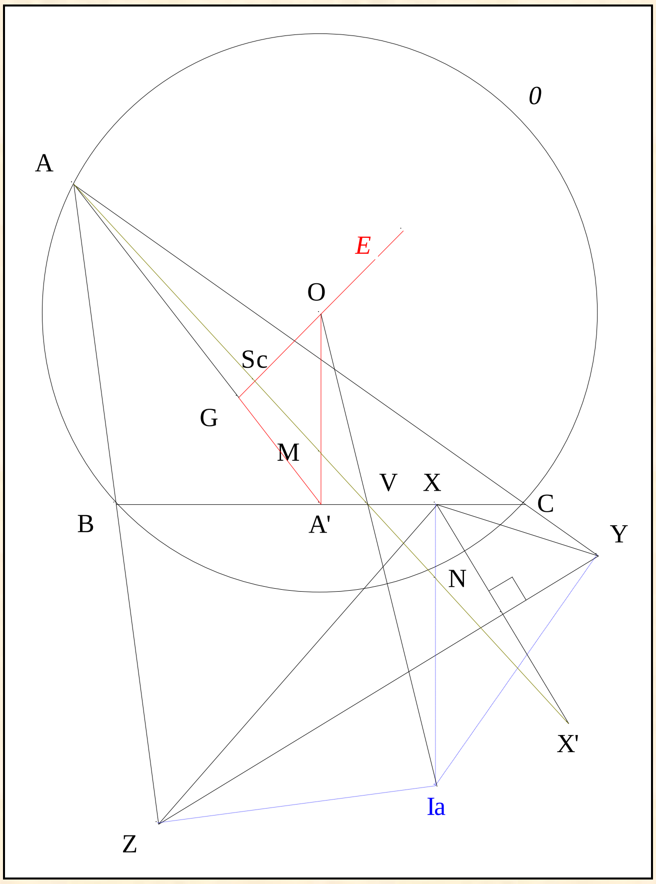


Traits :	ABC	un triangle,
	Sc	le point de Schiffler de ABC,
	O	le centre du cercle circonscrit à ABC,
	Ia	le centre du A-excercle de ABC
et	V	le point d'intersection de (OIa) et (BC).

Donné : A, Sc et V sont alignés. [18]

VISUALISATION

[18] Emelyanov L. and T., A note on the Schiffler point, *Forum Geometricorum* **3** (2003) 113-116 ; http://forumgeom.fau.edu/
Does anybody know the following properties of the Schiffler point?, message *Hyacinthos* # **6694** du 12/03/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/



- Notons ABC un triangle,
  G le point médian de ABC,
  A' le milieu du côté [BC],
  M le premier point d'appui, (Cf. **A. 1.** scolie **2**)
  XYZ le triangle A-excontact de ABC,
  X' le symétrique de X par rapport à (YZ),
  N le second point d'appui (Cf. **B. 3.** scolie)
  et r, R les rayons des cercles resp. incrit, circonscrit à ABC.

- D'après **A. 1.** scolie **2**, $\frac{MA'}{MO} = \frac{r}{R}$.

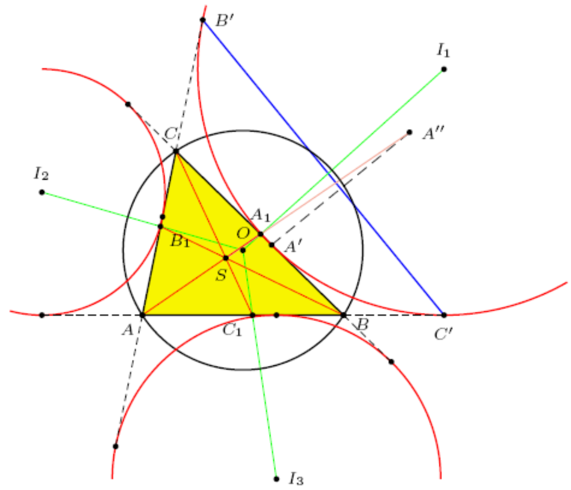
- D'après **B. 3.** scolie, $\frac{NX}{NIa} = \frac{r}{R}$.

- D'après Thalès "Rapports", M, V et N sont alignés.

- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, A, M, V et N sont alignés.

Note historique : rappelons les deux résultats des époux Emelyanov

Theorem 1. *Let A and I_1 be the circumcenter and A-excenter of triangle ABC, and A_1 the intersection of OI_1 and BC. Similarly define B_1 and C_1. The lines AA_1, BB_1 and CC_1 concur at the Schiffler point S.*



Theorem 2. *Let A', B', C' be the touch points of the A-excircle and BC, CA, AB respectively, and A'' the reflection of A' in $B'C'$. Similarly define B'' and C''. The lines AA'', BB'' and CC'' concur at the Schiffler point S.*

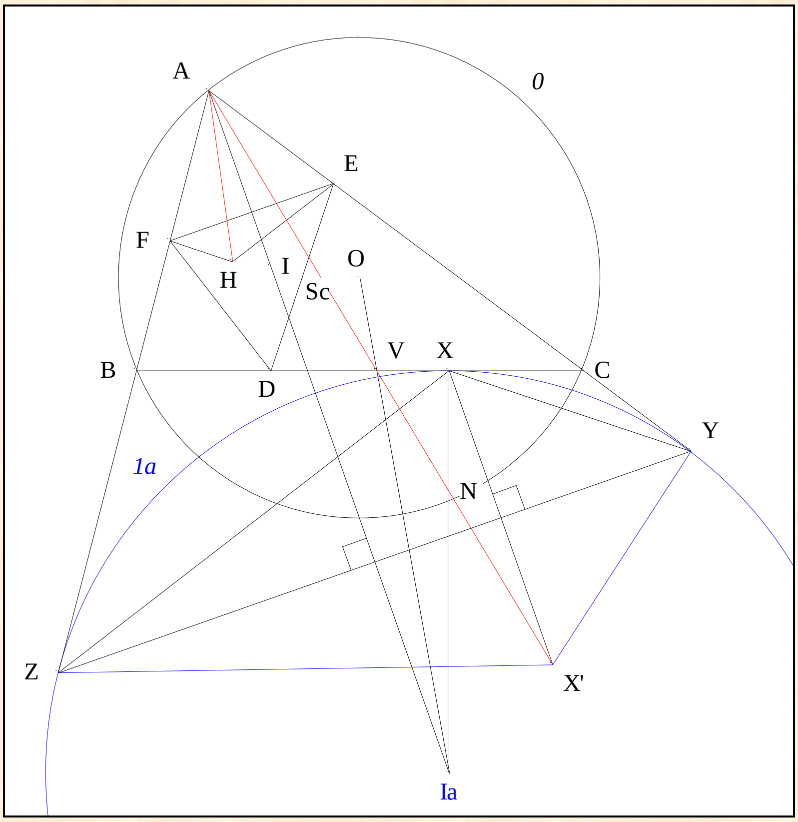
Ce difficile problème est réapparu sur le site *Mathlinks*[19] en 2006 et 2007.

5. L'orthocentre du triangle de contact et le point de Kosnitza

VISION

Figure :

19 Concurrence of 4 Euler lines [Schiffler point], *Mathlinks* du 28/08/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=108577
Schiffler point, *Mathlinks* du 17/09/2007 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=167076



Traits : aux hypothèses et notations précédente, nous ajoutons
H l'orthocentre du triangle DEF.

Donné : Sc est l'isogonal de H relativement à ABC. [20]

VISUALISATION

- Les quadrilatères AEHF et AZX'Y étant semblables et (EF) // (ZY),

  (AH) et (AScX') sont deux A-isogonales de ABC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que **(1)** (BH) et (BSc) sont deux A-isogonales de ABC

  (2) (CH) et (CSc) sont deux A-isogonales de ABC.

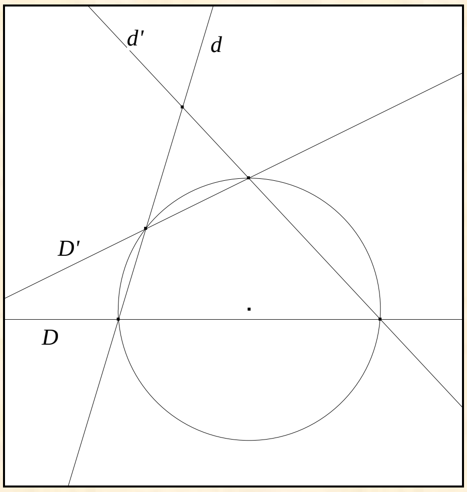
- **Conclusion :** Sc est l'isogonal de H relativement à ABC.

---

20 Concurrence of **4** Euler lines [Schiffler point], AoPS du 29/08/2006
http://artofproblemsolving.com/community/c6h108577

C. APPENDICE

1. Droites antiparallèles



Deux sécantes *D* et *D'* sont antiparallèles aux **sécantes** *d* et *d'*,
si, les bissectrices de *D* et *D'* sont parallèles aux bissectrices de *d* et *d'*.

2. La relation "est antiparallèle à"

la relation "est antiparalléle à", notée \\,
est d'équivalence sur l'ensemble des paires de droites **sécantes** du plan.

3. Conséquences

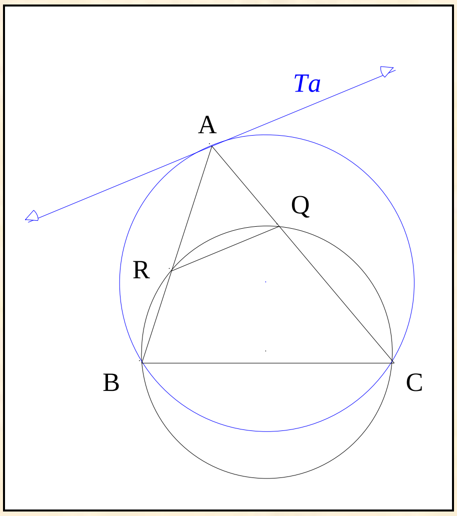
(1) nous pouvons remplacer dans la définition, une droite par une autre qui lui est parallèle.

(2) Les diagonales d'un quadrilatère inscriptible sont antiparallèles par rapport à ses côtés opposés et réciproquement.

(3) Si, deux droites sécantes *D* et *D*' sont antiparallèles aux droites sécantes *d* et *d*'
alors, les angles de droites (*D*, *d*) et (*D*', *d*') sont alors égaux ;
et le quadrilatère obtenus par intersection est inscriptible.

(4) Tout cercle sécant à deux droites sécantes détermine des droites antiparallèles aux deux premières.

(5) Un cas particulier



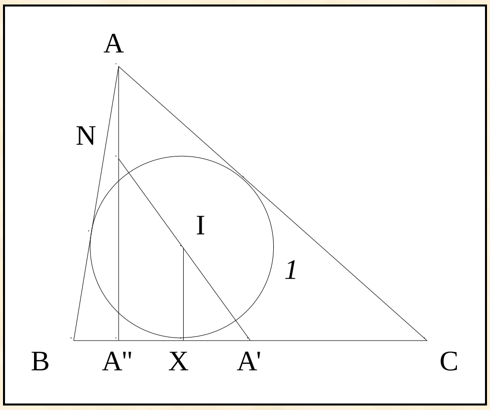
- Notons ABC un triangle,
  0 le cercle circonscrit à ABC,
  Ta la tangente à *0* en A.
  1 un cercle passant par B et C,
  et Q, R les seconds points d'intersection de (BC), (CA) avec *1*.

- Les cercles *0* et *1*, les points de base B et C, les moniennes (ABR) et (ACQ), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que *Ta* // (QR).

- **Conclusion :** *Ta* et (BC) sont antiparallèles à (AB) et (AC).

D. ANNEXE

1. Rayon du cercle inscrit



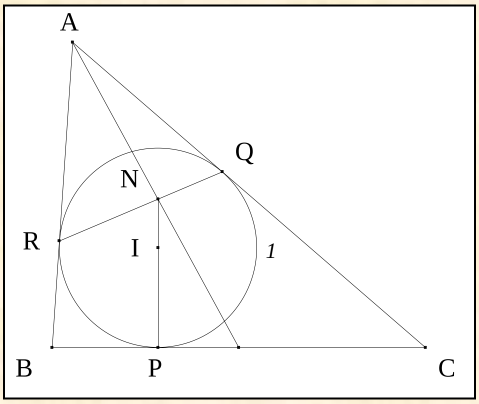
Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
I le centre de *1*,
X le point de contact de *1* avec (BC),
A' le milieu de [BC],
A" le pied de la A-hauteur de ABC
et N le point d'intersection de (A'I) avec (AA").

Donné : AN = IX.

2. Une médiane [21]

VISION

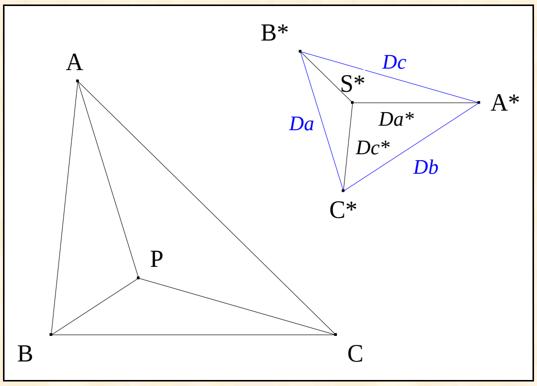
Figure :



Traits : ABC un triangle,
1 le cercle inscrit dans ABC,
I le centre de *1*,
P, Q, R les points de contact de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB)
et N le point d'intersection de (QR) et (PI)

Donné : (AN) est la A-médiane de ABC.

3. Deux triangles parallélogiques [22]



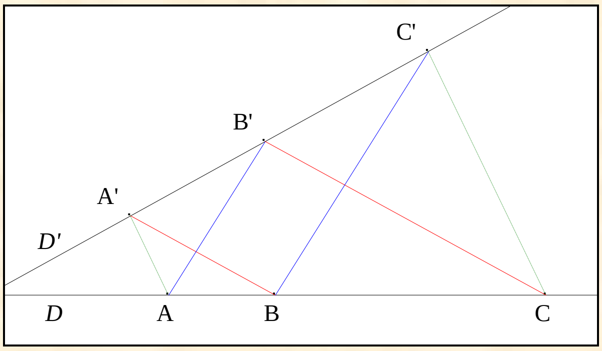
Traits : ABC un triangle,
P un point,
*D*c une parallèle à (PC),
*D*a une parallèle à (PA),
*D*b une parallèle à (PB),
C*, A*, B* les points d'intersection de *D*a et *D*b, de *D*b et *D*c, de *D*c et *D*a,
*D*c* la parallèle à (AB) passant par C*,
*D*a* la parallèle à (BC) passant par A*
et S* le point d'intersection de *D*c* et *D*a*.

---

21 Papelier G., Pôles et Polaires dans le cercle, *Exercices de Géométrie Moderne*, Paris (1927), Gabay Reprint (1996), n° **39**, p. 26.
22 Neuberg J., *Mathesis* (1882) 144, question **150** ; *Mathesis* (1883) 86.

Donné : (B*S*) et (AC) sont parallèles.

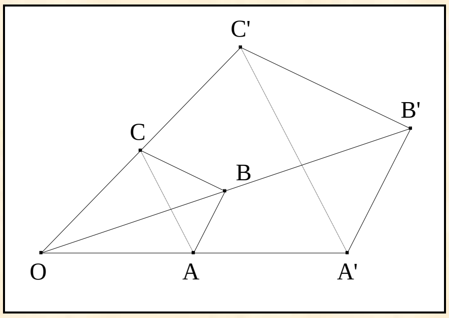
4. Le petit théorème de Pappus [23]



Traits : *D*, *D'* deux droites,
A, B, C trois points pris dans cet ordre sur *D*,
B' un point
et A', C' deux points de *D'* tels que (AB') // (BC') et (A'B) // (B'C).

Donné : B' est sur *D'* *si, et seulement si,* (AA') et (CC') sont parallèles.

5. Le théorème faible de Desargues



Traits : ABC un triangle,
et A'B'C' un triangle tel que **(1)** (AA') et (BB') soient concourantes en O
(2) (AB) soit parallèle à (A'B')
(3) (BC) soit parallèle à (B'C')

Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à (A'C').

[23] Pappus, *Collections* Livre **VII**.

E. ARCHIVE

1. Le problème de Kurt Schiffler

CRUX MATHEMATICORUM

Vol. 11, No. 2

February 1985 ISSN 0705 - 0348

1018. *Proposed by Kurt Schiffler, Schorndorf, Federal Republic of Germany.*

Let ABC be a triangle with incentre I. Prove that the Euler lines of triangles IBC, ICA, IAB, and ABC are all concurrent.

2. La solution de G. R. Veldkamp et de W. A. van der Spek

CRUX MATHEMATICORUM

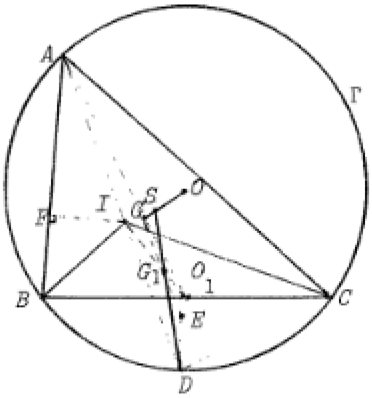
Vol. 12, No. 6
June 1986

1018. [1985: 51] *Proposed by Kurt Schiffler, Schorndorf, Federal Republic of Germany.*

Let ABC be a triangle with incentre I. Prove that the Euler lines of triangles IBC, ICA, IAB, and ABC are all concurrent.

Solution by G.R. Veldkamp, de Bilt, The Netherlands, and W.A. van der Spek, Leeuwarden, The Netherlands.

Let Γ be the circumcircle of ΔABC, with center O and radius R, and let r be the radius of the incircle of ΔABC. Let G be the median point, so that GO is the Euler line of ΔABC. Let D be the intersection of AI with Γ, that is, the midpoint of arc BC. Then it is well-known (e.g. Theorem 292, page 185 of R.A. Johnson's *Advanced Euclidean Geometry*) that D is the center of a circle passing through B, I, and C. This means that D is the circumcenter of



ΔBIC, so that

$$CD = ID. \tag{1}$$

Let G_1 be the median point of ΔBIC, so that DG_1 is the Euler line of this triangle.

Let O_1 be the midpoint of BC. Then since G and G_1 are median points,

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GO_1}} = \frac{\overline{IG_1}}{\overline{G_1O_1}} = 2.$$

Thus $GG_1 \parallel AID$, and hence, letting E be the intersection of GG_1 and OD,

$$\frac{\overline{GG_1}}{\overline{G_1E}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{ID}} \tag{2}$$

and

$$\overline{DE} = \frac{2}{3}\,\overline{DO_1}\ . \tag{3}$$

It also follows that the Euler line DG_1 of ΔBIC will intersect the Euler line GO of ΔABC between G and O. We let S be the point of intersection.

Let F be the foot of the perpendicular from I to AB. Since $\angle BAD = \angle BCD$, $\Delta AFI \sim \Delta CO_1D$, and hence

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{FI}}{\overline{O_1D}} = \frac{r}{\overline{O_1D}}\ . \tag{4}$$

Applying the theorem of Menelaus to the triangle GOE with the transversal SG_1D, we have

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\overline{GS}}{\overline{OS}}\cdot\frac{\overline{OD}}{\overline{ED}}\cdot\frac{\overline{EG_1}}{\overline{GG_1}} \\
&= \frac{\overline{GS}}{\overline{OS}}\cdot\frac{\overline{OD}}{\overline{ED}}\cdot\frac{\overline{ID}}{\overline{AI}} && \text{by (2)} \\
&= \frac{\overline{GS}}{\overline{OS}}\cdot\frac{\overline{OD}}{\overline{ED}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{AI}} && \text{by (1)} \\
&= \frac{\overline{GS}}{\overline{OS}}\cdot\frac{R}{\frac{2}{3}\cdot\overline{DO_1}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{AI}} && \text{by (3)} \\
&= \frac{\overline{GS}}{\overline{OS}}\cdot\frac{3R}{2\overline{DO_1}}\cdot\frac{\overline{DO_1}}{r} && \text{by (4)} \\
&= \frac{\overline{GS}}{\overline{OS}}\cdot\frac{3R}{2r}\ ,
\end{aligned}$$

that is,

$$\frac{\overline{GS}}{\overline{OS}} = \frac{2r}{3R}\ .$$

Now if we consider the Euler lines of ΔAIB or ΔCIA rather than ΔBIC, we will arrive at the same ratio; thus the Euler lines of ΔAIB, ΔCIA, and ΔBIC all intersect the Euler line of ΔABC in the same point S (we call this point the *Schiffler point* of ΔABC).

Also solved by D.J. SMEENK, Zaltbommel, The Netherlands.

* * *