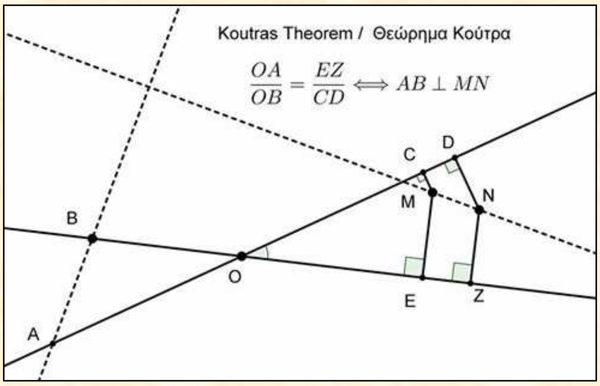
SIMPLEMENT BEAU

STEINER * AYME * KOUTRAS

Le lien vivifie,
le contact tue.

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente une filiation allant d'un théorème de Jabob Steiner datant de 1827 au théorème de Stathis Koutras découvert vers 1980 en passant par une fine observation de l'auteur.
Ce résultat mentionné par Takis Chronopoulos sur le site *Romantics of Geometry* est illustré par de nombreuses applications…

Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements. Ils s'adressent au professeur Ercole Suppa de Teramo qui a eu l'amabilité de me mettre en contact avec Stathis Koutras.

Abstract. The author presents a filiation from a theorem of Jacobs Steiner dating from 1827 to Stathis Koutras theorem discovered around 1980 through a fine observation of the author.
This result mentioned by Takis Chronopoulos on the *Romantics of Geometry* site is illustrated by many applications...

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 31/03/2019 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Aknowlegment. They go to the Professor Ercole Suppa of Teramo who was kind enough to put me in contact with Stathis Koutras.

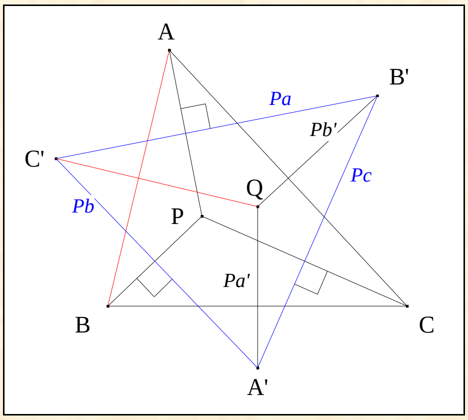
Sommaire

A. JAKOB STEINER (1827)

1. Situation historique

VISION

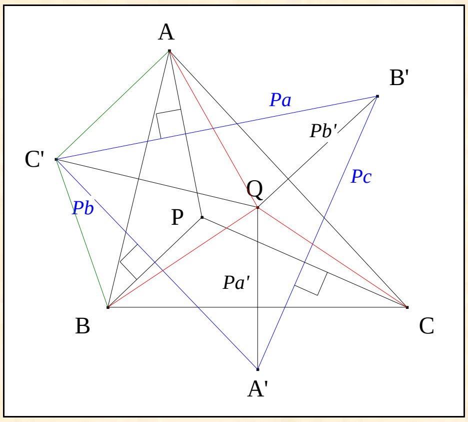
Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un point **intérieur** à ABC,
Pa, *Pb*, *Pc* les médiatrices resp. de [AP], [BP], [CP],
A', B', C' les points d'intersection resp. de *Pb* et *Pc*, *Pc* et *Pa*, *Pa* et *Pb*,
Pa', *Pb'* les perpendiculaires resp. à (BC) issue A', (CA) issue B'
et Q le point d'intersection de *Pa'* et *Pb'*.

Donné : (C'S') est perpendiculaire à (AB).

VISUALISATION



- D'après "Le théorème de la médiatrice"
  appliqué à **(1)** *Pa'*, QB = QC

  (2) *Pb'*, QC = QA ;

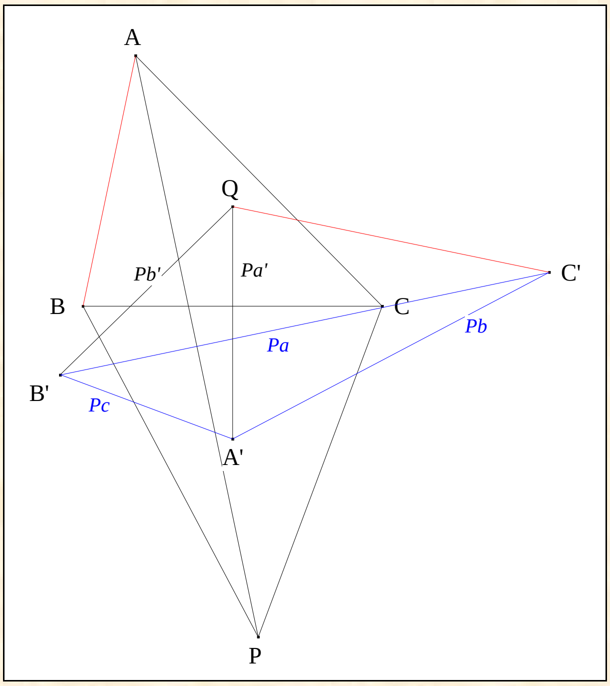
- Par transitivité de la relation =, QB = QA ;

d'après "Le théorème de la médiatrice" appliqué à *Db*, Q est sur la médiatrice de [AB].

- C' étant le point d'intersection de *Pa* et *Pb*, C'A = C'B ;
  d'après "Le théorème de la médiatrice", C' est sur la médiatrice de [AB] ;
  en conséquence, (C'S') est la médiatrice de [AB].

- **Conclusion :** (C'R) est perpendiculaire à (AB).

Scolie : P est extérieur à ABC



- Notons P le point d'intersection de *Pa'* et *Pb'*.

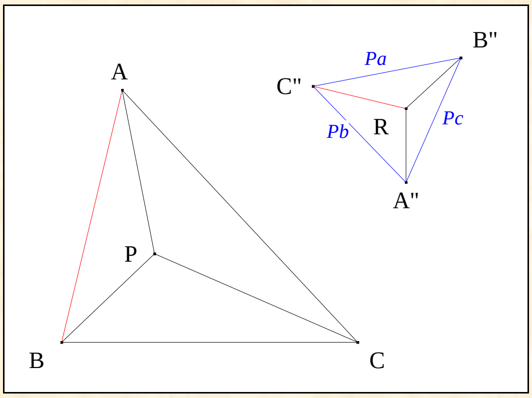
- **Conclusion :** (C'Q) est perpendiculaire à (AB). [2]

[2] la preuve se calque sur la précédente

2. Généralisation [3]

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point **intérieur** à ABC,
	Pa, *Pb*, *Pc*	trois perpendiculaires resp. à (AP), (BP), (CP),
	A", B", C"	les points d'intersection resp. de *Pb* et *Pc*, *Pc* et *Pa*, *Pa* et *Pb*,
	Pa", *Pb"*	les perpendiculaires resp. à (BC) issue de A", (CA) issue de B"
et	R	le point d'intersection de *Pa"* et *Pb"*.

Donné : (C"R) est perpendiculaire à (AB).

Commentaire : les médiatrices sont remplacées par des perpendiculaires.

VISUALISATION

- Une construction du triangle A"B"C"

  * d'abord, nous partons d'un triangle ABC et de trois céviennes P-concourantes (AP), (BP), (CP)

  * ensuite, nous construisons un triangle A'B'C'
  tel que ses côtés soient perpendiculaires aux trois céviennes.

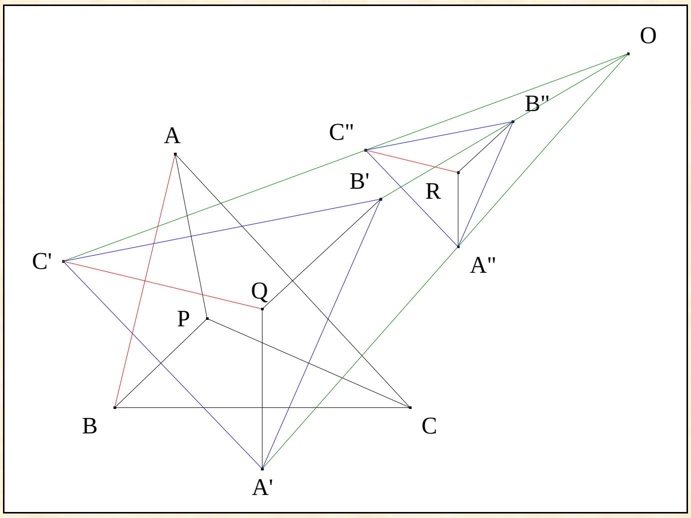
  Par exemple, A' est le point d'intersection des perpendiculaires aux céviennes issues des sommets autres que A.

  * enfin, nous considérons pour chaque sommet de A'B'C',
  une cévienne perpendiculaire au côté opposé du sommet correspondant de ABC.

  Par exemple, pour le sommet A', la cévienne (A'R) est perpendiculaire au côté opposé du sommet A de ABC.

[3] Steiner J., Problème **54**, *Journal* de Crelle (1827) vol. **2**, **3**

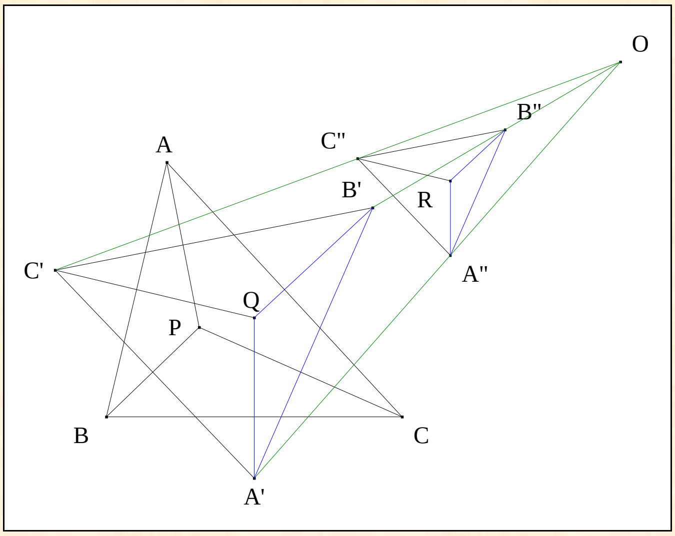
- Revenons à la situation historique avec les mêmes traits et donné.



- **Hypothèse :** le triangle A"B"C" n'est pas égal au triangle A'B'C'.

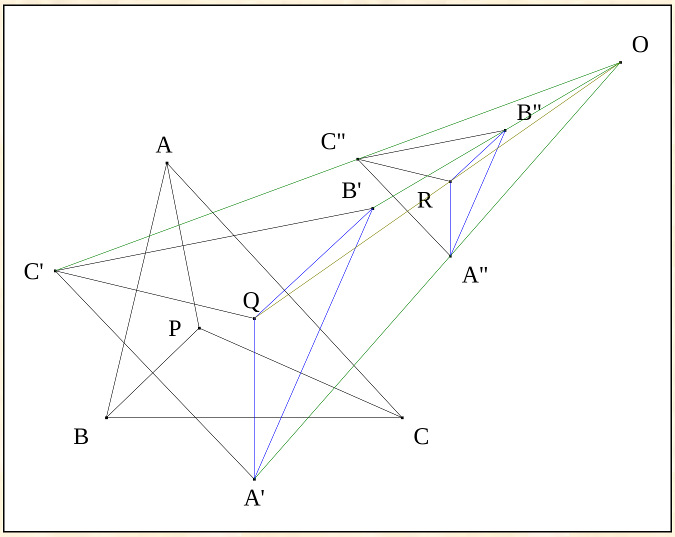
- D'après Thalès de Milet [4]
  appliqué aux triangles homothétiques A'B'C' et A"B"C", (A'A"), (B'B") et (C'C") sont concourantes.

- Notons O ce point de concours.



- D'après Thalès de Milet
  appliqué au triangles homothétiques QA'B' et RA"B", (QR), (A'A") et (B'B") sont concourantes en O.

[4] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 6-10 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- D'après Thalès de Milet
  appliqué au triangles RB"C" et QB'C' en perspective de centre O, (C"R) // (C'Q) ;
  d'après **le lemme**, (C'Q) ⊥ (AB) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (C"R) ⊥ (AB).

- **Conclusion :** (C"R) est perpendiculaire à (AB).

Commentaires : lorsque le triangle A"B"C" est égal au triangle A'B'C',
le point O est rejeté à l'infini et la preuve se calque sur la précédente.

Lorsque P est extérieur à ABC, la preuve se calque de même sur la précédente.

Note historique : ce résultat de Jacob Steiner [5] date de 1827. Une solution recourrant aux axes radicaux en a été donnée par Félix Eberty ; la tradition l'attribue en général à James Clerk Maxwell. Ce résultat a été réétudié par Émile Lemoine[6] en 1890 qui sera à l'origine du mot "orthologie"[7] dès 1889 et adopté immédiatement par Joseph Neuberg [8] qui pensera à remplacer l'orthogonalité par "le parallélisme" [9] la même année.
Ces deux approches seront par la suite généralisées en 1902 par Juan Duran-Loriga [10] sous un seul vocable à savoir "isogonologie".
Le résultat de Steiner réapparaît régulièrement sur le site *Mathlinks*. [11]

Énoncé traditionnel : *si,* deux triangles sont tels que trois céviennes concourantes du premier triangle sont resp. perpendiculaires aux côtés correspondants du second triangle

alors, les trois céviennes du second resp. perpendiculaires aux côtés correspondants du premier, sont concourantes.

---

5 Steiner J., Problème **54**, *Journal* de Crelle tome **II** cahier **3** (1827) 287 chez Reimer G., Berlin ;
Steiner J., Œuvres complètes, tome **I**, p.157
6 Lemoine E., *Association française pour l'avancement des sciences* (1890) 111-146
7 Lemoine E., *Journal de Mathématiques Spéciales* (1889) 63
8 Neuberg J., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1889) 71 ;
Sur les projections et contre-projections d'un triangle fixe, Mémoire de l'Académie royale des sciences de Belgique t. **XLIV**
9 Neuberg J., *Mathesis* (1882) 144, question**150** ; *Mathesis* (1883) 86
10 Duran-Loriga J., *Association française pour l'avancement des sciences*, Montauban (1902) 157-165.
11 Concur, *Mathlinks* du 29/07/2007 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=160533.

Archive :

3.

(Von Herrn *J. Steiner*.)

54. **Lehrsatz.** „Sind irgend zwei in einer Ebene liegende Dreiecke so beschaffen, dafs, wenn aus den Ecken des einen auf die Seiten des anderen, in irgend einer Ordnung genommen, Lothe gefället werden, dafs alsdann diese drei Lothe einander in irgend einem Puncte treffen, so treffen auch diejenigen drei Lothe, welche in entsprechender Ordnung, aus den Ecken des zweiten Dreiecks auf die Seiten des ersteren gefället werden, einander allemal in irgend einem Punct." Oder:

I) „Fället man aus einem willkürlichen Punct D (Fig. 3.) in der Ebene eines Dreiecks ABC auf die Seiten des letzteren Lothe Da, Db, Dc, nimmt in diesen Lothen drei beliebige Puncte a, b, c, als Ecken eines anderen Dreiecks abc an, und fället auf dessen Seiten aus den Ecken des gegebenen Dreiecks, in gehöriger Ordnung genommen, Lothe Ad, Bd, Cd, so treffen diese einander allemal in irgend einem Puncte d." Und ferner:

II) „Nimmt man ähnlicherweise ein drittes Dreieck $a_1b_1c_1$ an, dessen Ecken in den nemlichen drei ersteren Lothen liegen, so wird demselben auf gleiche Weise ein Punct d_1 entsprechen (I.), und alsdann liegen die drei Durchschnittspuncte der drei Paar entsprehender Seiten des zweiten und dritten Dreiecks, d. h., die Durchschnittspuncte α, β, γ der Seitenpaare bc und b_1c_1, ca und c_1a_1, ab und a_1b_1, allemal in irgend einer Geraden $\alpha\beta\gamma$; und

III) diese Gerade $\alpha\beta\gamma$ ist allemal zu derjenigen Geraden dd_1, welche durch die beiden genannten Puncte d, d_1 geht, senkrecht."

[12]

---

12 Steiner J., Problème **54**, Journal de Crelle de 1826 et 1827, p. 287 ; https://gdz.sub.unigoettingen.de/id/PPN243919689_0002?tify={%22pages%22:[301],%22panX%22:0.461,%22panY%22:0.734,%22view%22:%22toc%22,%22zoom%22:0.523}

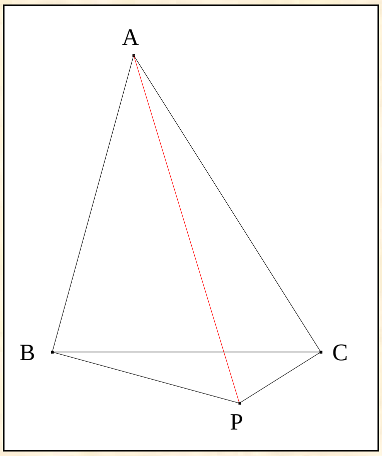
https://gdz.sub.unigoettingen.de/id/PPN243919689_0002?tify={%22pages%22:[301],%22panX%22:0.462,%22panY%22:0.75,%22view%22:%22toc%22,%22zoom%22:0.471}

B. LE LIEN ROMANTIQUE

DE

JEAN-LOUIS AYME

1. Un cerf-volant



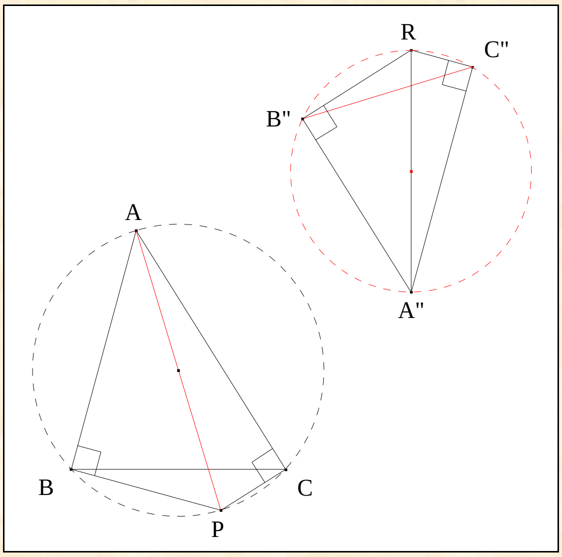
Finition : ABPC un quadrilatère convexe et ses deux diagonales.

Définition : ABPC est un cerf-volant.

2. Le lien

VISION

Figure :



Traits : ABPC un cerf-volant inscrit dans le cercle de diamètre [AP],
et A"B"RC" un cerf-volant * indirectement semblable

* négativement homothétique à ABPC.

Donnés : (A"R) ⊥ (BC) ↔ (AP) ⊥ (B"C") ↔ ABC est indirectement semblable à A"B"C".

VISUALISATION NÉCESSAIRE

- D'après Jakob Steiner, (A"R) ⊥ (BC) *si, et seulement si*, (AP) ⊥ (B"C").
- **Conclusion :** par une chasse angulaire, ABC est indirectement semblable à A"C"B".

VISUALISATION NÉCESSAIRE

- **Conclusion :** ABC étant indirectement semblable à A"C"B", par une chasse angulaire, (A"R) ⊥ (BC).

C. L'ÉQUIVALENCE

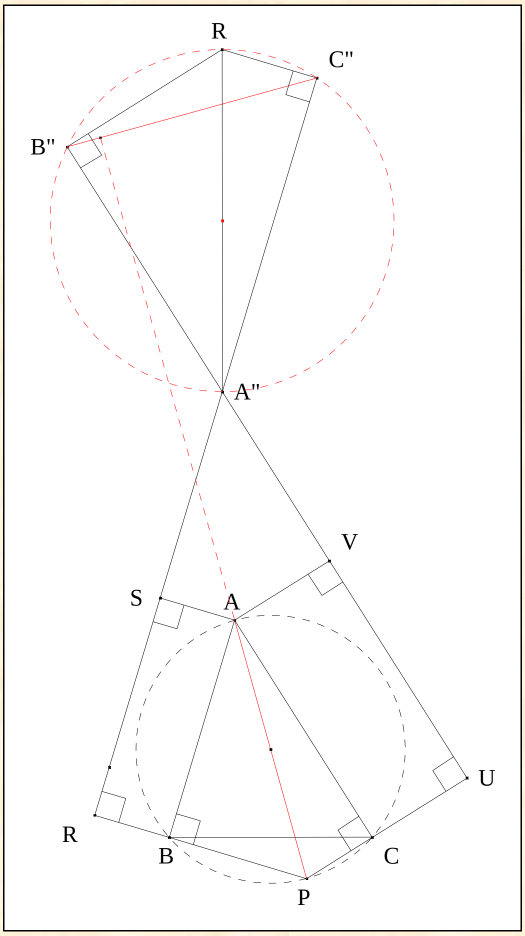
DE

STATHIS KOUTRAS

1. Dans l'ombre de Stathis Koutras

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
S, V les pieds des perpendiculaires à (A"C"), (A"B") issues de A
et R, U les pieds des perpendiculaires à (A"C"), (A"B") issues de P.

Donnés : (AP) ⊥ (B"C") ↔ A"B"/A"C" = RS/UV.

VISUALISATION DOUBLE

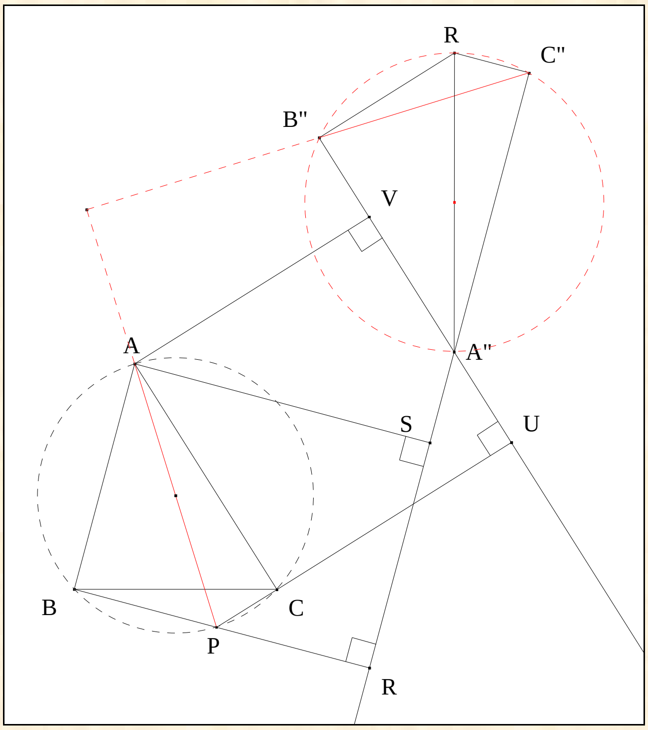
- D'après **B. 2**, (AP) ⊥ (B"C") ↔ ABC est indirectement semblable à A"B"C" ↔ A"B"/A"C" = RS/UV.

- **Conclusion :** (AP) ⊥ (B"C") ↔ A"B"/A"C" = RS/UV.

Note historique : Takis Chronopoulos [13] wrote :

This is the famous Koutras Theorem, named after Stathis Koutras (Στάθης Κούτρας), the one who discovered it and used it as an perpendicularity criterion,
The Theorem known as Stathis' Koutras theorem, was recently found as a solved problem in Giorgos Tsintsifas' Geometry (Planimetry), written before 1980. The last 6 years, as it was used to solve many geometry problems (more than 200), a perpendicularity criterion (a few of them are collected within the group), noone had noticed this fact. Giorgos Tsintsifas had not used it, in other solved problems as a perpendicularity criterion, and until now it was not seen in other greek geometry books. Stathis Koutras always had a suspicion that because of it's simplicity, it could be found somewhere else sometime, and is glad that it was found in one of his teacher's books (when he was in high school, Tsintsifas was one of his teachers).
As a recognition, because he was the one that made this perpendicularity criterion widely known and used so many times, I think that it should remain known as Koutras' Theorem.

2. Dans la lumière de Jakob Steiner



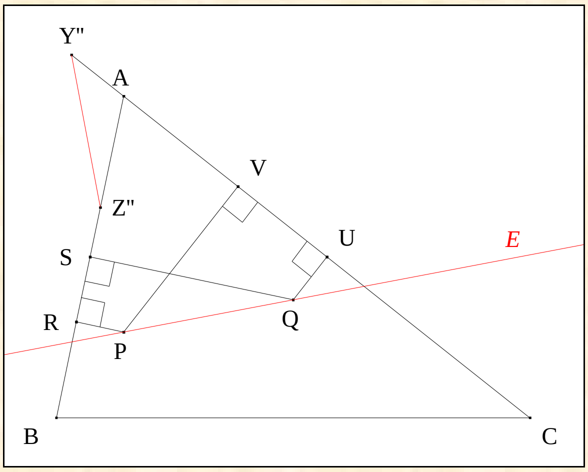
[13] https://www.facebook.com/groups/parmenides52/permalink/1174537489326622/

D. UNE APPLICATION [14]

Perpendiculaires à la droite d'Euler

VISION

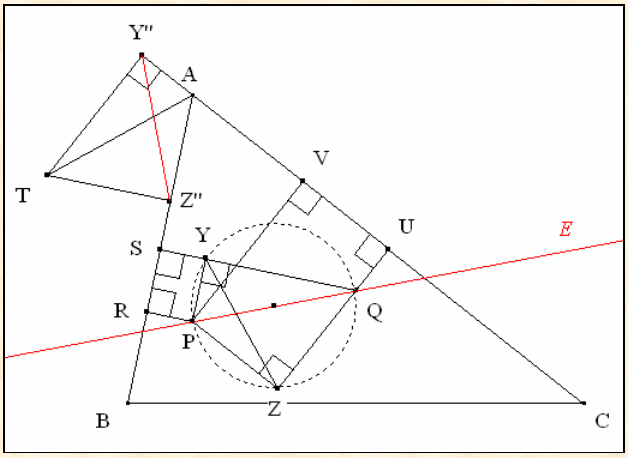
Figure :



Traits : ABC un triangle,
E la droite d'Euler de ABC,
P, Q deux points de *E*,
U, V les pieds des perpendiculaires à (AC) issues resp. de P, Q,
R, S les pieds des perpendiculaires à (AB) issues resp. de P, Q
et Y", Z" deux points resp. de (AB), (AC)
tels que la parallèle à *E* issue de A soit intérieur au triangle AYZ.

Donné : AY"/AZ" = RS/UV ↔ (Y"Z") est perpendiculaire à *E*.

VISUALISATION WITHOUT WORDS



[14] Ayme J.-L., Perpendiculars to the Euler's line, AoPS du 27/03/2019 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1810825_perpendiculars_to_the_eulers_line

E. LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A	
aligné	collinear
annexe	annex
axiome	axiom
appendice	appendix
adjoint	associate
a propos	by the way btw
acutangle	acute angle
axiome	axiom
B	
bissectrice	bisector
bande	strip
C	
centre	incenter
centre du cercle circonscrit	circumcenter
cercle circonscrit	circumcircle
cévienne	cevian
colinéaire	collinear
concourance	concurrence
coincide	coincide
confondu	coincident
côté	side
par conséquence	consequently
commentaire	comment
D	
d'après	according to
donc	therefore
droite	line
d'où	hence
distinct de	different from
E	
extérieur	external
F	
figure	figure
H	
hauteur	altitude
hypothèse	hypothesis
I	
intérieur	internal
identique	identical
i.e.	namely
incidence	incidence
L	
lemme	lemma
lisibilité	legibility
M	
mediane	median
médiatrice	perpendicular bissector
milieu	midpoint

N	
Notons	name
nécessaire	necessary
note historique	historic note
O	
orthocentre	orthocenter
ou encore	otherwise
P	
parallèle	parallel
parallèles entre elles	parallel to each other
parallélogramme	parallelogram
pédal	pedal
perpendiculaire	perpendicular
pied	foot
point de vue	point of view
postulat	postulate
point	point
pour tout	for any
Q	
quadrilatère	quadrilateral
R	
remerciements	thanks
reconnaissance	acknowledgement
respectivement	respectively
rapport	ratio
répertorier	to index
S	
semblable	similar
sens	clockwise in this
order	
segment	segment
Sommaire	summary
symédiane	symmedian
suffisante	sufficient
sommet (s)	vertex (vertice)
T	
trapèze	trapezium
tel que	such as
théorème	theorem
triangle	triangle
triangle de contact	contact triangle
triangle rectangle	right-angle triangle