4 tâm nội tiếp đồng viên- Phép chứng minh của Jean-Louis Ayme

Nguyễn Văn Linh

Năm 2016

Tóm tắt nội dung

Trong bài viết này xin giới thiệu tới bạn đọc một bài toán của tác giả liên quan tới 4 tâm nội tiếp đồng viên và cách chứng minh thú vị của Jean-Louis Ayme với việc áp dụng liên tiếp định lý Reim. Bài toán được phát biểu như sau.

Bài toán. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại P. (APD) và (BPC) lần lượt giao CD tại E, F khác C, D. AE, BF lần lượt giao (O) tại L, K khác A, B. Gọi I_1, I_2, I_3, I_4 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ADE, BCF, DFK, CEL. Khi đó 4 điểm I_1, I_2, I_3, I_4 cùng thuộc một đường tròn.

1 Tiểu sử tác giả Jean-Louis Ayme

Bản tiếng Anh sau được trích từ lời giải gốc bằng tiếng Pháp của tác giả.

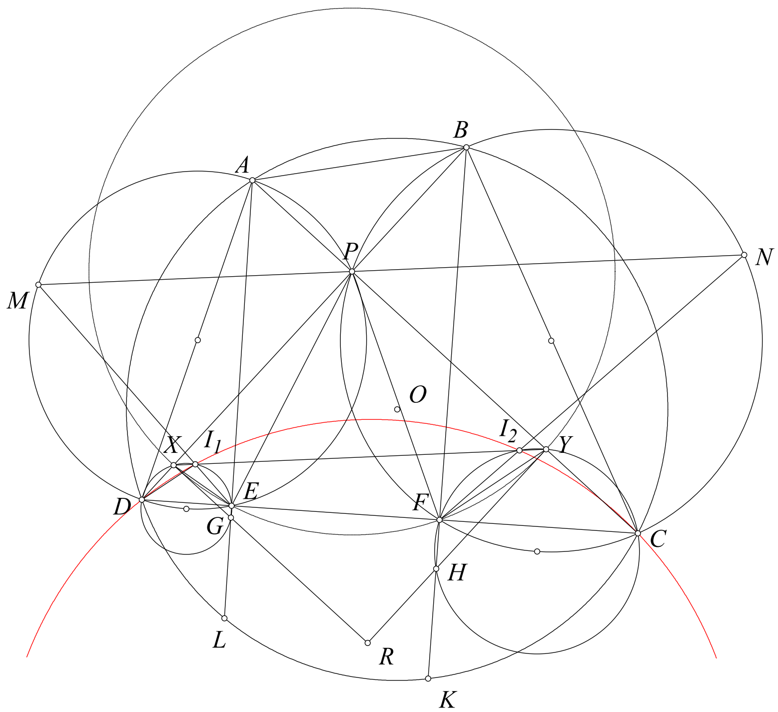
Une courte biographie de Jean-Louis Ayme

Jean-Louis Ayme, Doctor-Professor of Mathematics, has done all is scolarity in Germany and in France.
After being a student of the Prytanée militaire in La Flèche where René Descartes had spent some time, and later at the military officers Ecole de l'Air of Salon-de-Provence, he joined the University of Science in Marseille before becoming a Professor of mathematics.
After teaching in France for a few years, he continued all his carrier abroad in the following countries : Tunisia, Afghanistan, Marocco, South Africa, Canada, and, finally, on Reunion Island situated in the Indian ocean.

His passion for Geometry allowed him to publish a book entitled *Méthodes et Techniques en Géométrie* [1]
And to create and direct until today the Website *Geometry * Géométrie * Geometria* [2].

2 Phép chứng minh của Jean-Louis Ayme

Trước tiên ta sẽ chứng minh rằng C, D, I_1, I_2 đồng viên.



Ta có $\angle PEF = \angle DAP = \angle CBP = \angle PFE$. Do đó $PE = PF$.

Gọi X là giao điểm khác D của (DI_1E) với PD, Y là giao điểm khác C của (CI_2F) với PC.

Ta có $\angle DXE = \angle DI_1E = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle DAE = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle DPE$. Do đó $PX = PE$.

Chứng minh tương tự, $PY = PF$. Suy ra $PX = PE = PF = PY$ hay X, E, F, Y cùng nằm trên đường tròn tâm P.

Kéo dài EI_1, FI_2 cắt $(APD), (BPC)$ lần lượt tại M, N.

Dễ thấy MN là phân giác $\angle APD$ nên M, P, N thẳng hàng.

Ta có $DXI_1E, DMPE$ là các tứ giác nội tiếp nên áp dụng định lý Reim, $XI_1 \parallel PM$. Chứng minh tương tự, $YI_2 \parallel PN$.

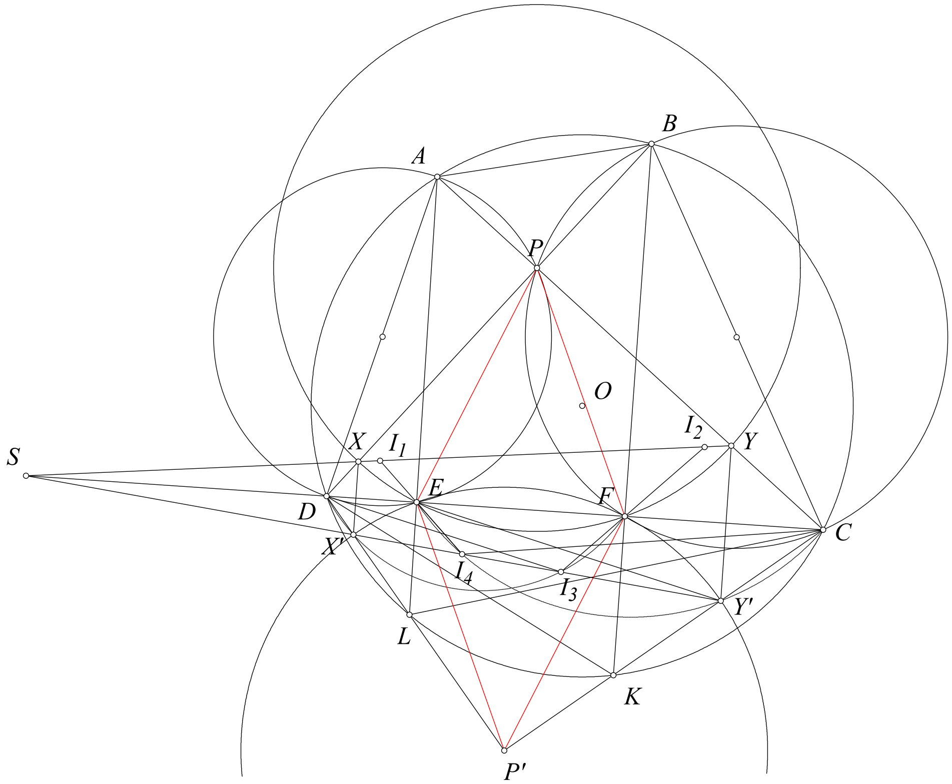
Gọi G, H lần lượt là giao điểm khác E, F của AE với (DI_1E), BF với (CI_2F). XG giao YH tại R.

Do hai tứ giác $APED$ và $DXEG$ nội tiếp nên áp dụng định lý Reim, $AP \parallel XG$. Tương tự $BP \parallel YH$. Lại có $PX = PY$ nên $PXRY$ là hình thoi.

Ta có PM là phân giác $\angle APD$, $XI_1 \parallel PM$ suy ra XI_1 là phân giác $\angle PXR$. Tương tự YI_2 là phân giác $\angle PYR$. Từ đó X, I_1, I_2, Y thẳng hàng.

Do hai tứ giác $XEFY$ và DXI_1E nội tiếp nên áp dụng định lý Reim, $DI_1 \parallel FY$. Mà tứ giác FI_2YC nội tiếp nên lại áp dụng định lý Reim, tứ giác DI_1I_2C nội tiếp.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh C, D, I_3, I_4 đồng viên.



Gọi P' là giao của DL và CK.

Ta có $\angle PCD = \angle PBF = \angle DCP'$, $\angle PDC = \angle PAE = \angle P'DC$. Suy ra P và P' đối xứng nhau qua DC.

Gọi X', Y' lần lượt là đối xứng của X, Y qua DC. Suy ra E, F, X', Y' cùng thuộc đường tròn (P') đối xứng với (P) qua DC.

Ta có $\angle EP'C = \angle EPC = \angle ADC = \angle ELC$.

Suy ra $\angle EI_4C = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ELC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle EP'C = \angle EY'C$. Suy ra E, I_4, Y', C đồng viên.

Chứng minh tương tự, D, X', I_3, F đồng viên.

Do đó $\angle I_3X'P' = \angle DFI_3 = \frac{1}{2}\angle BFC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DPC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DP'C = \angle Y'X'P'$. Suy ra $I_3 \in X'Y'$. Tương tự, $I_4 \in X'Y'$.

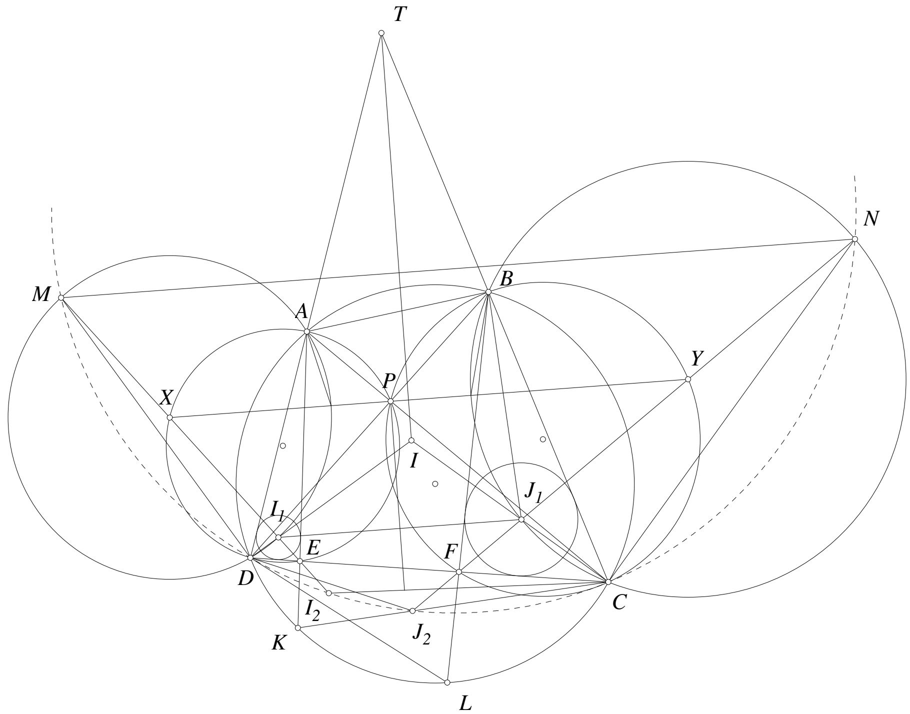
Áp dụng định lý Reim cho 2 tứ giác nội tiếp $EFY'X'$ và DFI_3X' ta có $DI_3 \parallel EY'$. Lại có tứ giác $EI_4Y'C$ nội tiếp nên lại áp dụng định lý Reim, DI_4I_3C nội tiếp.

Do phép đối xứng qua trục CD, $XY, X'Y', CD$ đồng quy tại S. Từ hai kết quả trên ta thu được $SI_3 \cdot SI_4 = SD \cdot SC = SI_1 \cdot SI_2$.

Vậy I_1, I_2, I_3, I_4 đồng viên.

3 Phép chứng minh của tác giả bài toán

Trước tiên xin được đổi lại kí hiệu các đường tròn I_1, I_2, I_3, I_4 thành I_1, J_1, I_2, J_2 như hình vẽ.



Gọi T là giao của AD và BC. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác TCD, (X) và (Y) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD và BPC. Ta có X và Y lần lượt là điểm chính giữa cung AD và BC của (APD) và (BPC) nên XY là phân giác $\angle APD$.

Dễ thấy TI song song với phân giác $\angle DPC$ nên $TI \perp XY$. Mà $TA \cdot TD = TB \cdot TC$ nên T nằm trên trục đẳng phương của (X) và (Y). Suy ra TI là trục đẳng phương của (X) và (Y).

Do đó $ID \cdot II_1 = IC \cdot IJ_1$ hay tứ giác DI_1J_1C nội tiếp.

Ta thu được $\angle EI_1J_1 = \angle DI_1J_1 - \angle DI_1E = 180^\circ - \dfrac{1}{2}\angle BCD - (90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle DAE) = \dfrac{1}{2}\angle DAB - \dfrac{1}{2}\angle DAE = \angle EAP = \angle EXP$. Do đó $I_1J_1 \parallel XY$.

Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng với I_1 qua X, J_1 qua Y suy ra $MN \parallel XY \parallel I_1J_1$.

Suy ra $\angle MNC = \angle MNJ_1 + \angle J_1NC = \angle I_1J_1F + \angle J_1BC = \angle I_1J_1F + \angle FJ_1C - 90^\circ = \angle I_1J_1C - 90^\circ = 270^\circ - \angle I_1DC = 180^\circ - (90^\circ + \angle I_1DC) = 180^\circ - \angle MDC$. Do đó tứ giác $MNCD$ nội tiếp.

Ta có $\angle MI_2C = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle EKC = 90^\circ + \dfrac{1}{2}\angle ADC = \angle MDC$ nên $I_2 \in (MNCD)$, tương tự với J_2.

Suy ra tứ giác MNJ_2I_2 nội tiếp. Mà $I_1J_1 \parallel MN$ nên theo định lý Reim, tứ giác $I_1J_1J_2I_2$ nội tiếp.

Tài liệu

[1] AoPS topic *4 incenters are concyclic.*
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1280308

[2] AoPS topic *Incircle problem.*
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1208052p5974754

Email: *Nguyenvanlinhkhtn@gmail.com*