THAILAND (2005)

or

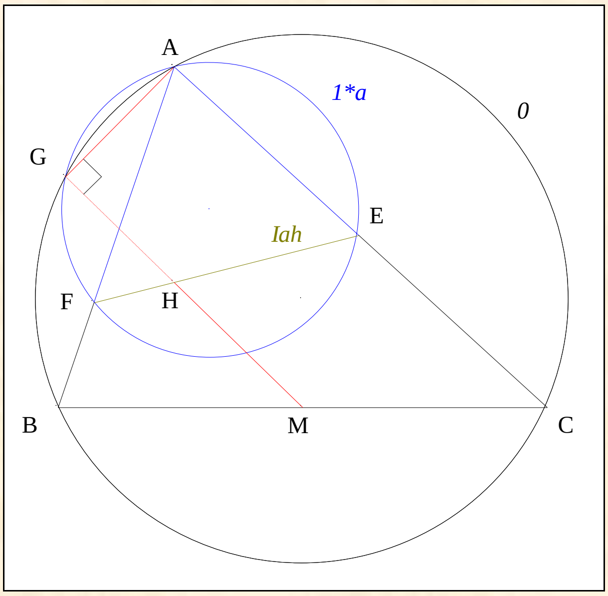
SWISS TEAM SELECTION TEST (2006)

ÉMERGENCE POTENTIELLE

†

La Géométrie intérieure,
une voie de réalisation intérieure.

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur dans cet article s'intéresse à la rechercher d'une date, à savoir celle qui pourrait correspondre à l'émergence potentielle du problème **3** du TST de Suisse proposé en 2006. Pour cela, tous les lemmes mis en œuvre dans la résolution sont référenciés et datés. En conclusion, ce problème aurait pu être posé dès 1822.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author in this article focuses on the search of a date, which could correspond to the potential emergence of the TST problem **3** of Switzerland proposed in 2006. To do this, all lemmas implemented in the resolution are referenced and dated. In conclusion, this problem could be proposed as early as 1822.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

---

[1] Saint-Denis, Île de La Réunion (Océan Indien, France), le 14/07/2014

Sommaire

POINT DE VUE

[2]

L'auteur a suivi du 27 mai2006 au 18 juin 2014, le fil du site *Art of Problem Solving* [3] concernant le problème **3** du TST de Suisse posé le troisième jour.
Ce problème sans référence à son auteur a attiré la curiosité de près de 1200 visiteurs dont 53 contributeurs ont présentés

des preuves par

* la géométrie classique (angle, rapports, trigonométrie, triangles égaux ou semblables, quaterne harmonique, puissance)
* l'application de l'algèbre à la géométrie (barycentre, matriciel)
* l'application de l'analyse à la géométrie (similitude, inversion)

des remarques

* why this problem is so attractive ?
* after all these proofs, which is the one who is the more simple ?
* It is natural to tackle this problem using results from then it will be clear where things come from, where them are going to and that knowledge will make it much easier to approach the problem, maybe even synthetically.

et des liens avec des problèmes similaires.

Face à une absence de référence du problème **3**, l'auteur a eu l'idée de rechercher la date possible de son émergence en fonction des outils nécessaire à la résolution.

---

[2] Blick auf das Schloss Montfort won Bodensee aus

[3] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/portal.php?ml=1

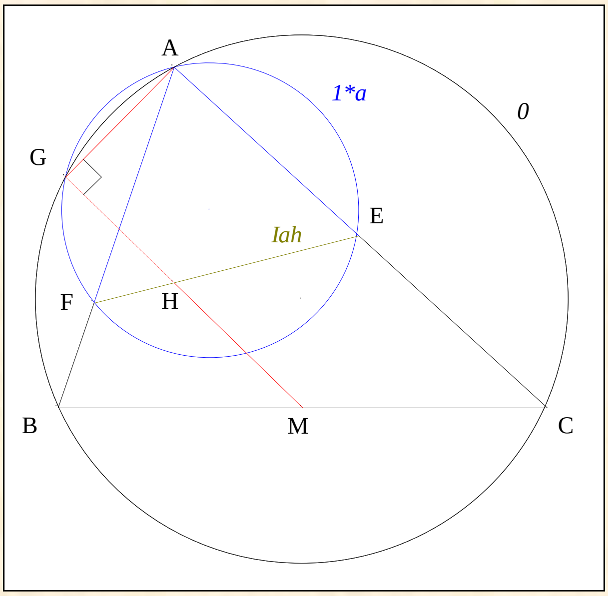
A. THAILAND (2005)

OR

SWITZERLAND TST DAY 3 PROBLEM 3 (2006)

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle acutangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	M	le milieu de [BC],
	H	l'orthocentre de ABC,
	Iah	la A-isocélienne [4] de ABC issue de H,
	E, F	les points d'intersection de *Iah* resp. avec [AC], [AB],
	*1*a*	le cercle circonscrit au triangle AEF,
et	G	le second point d'intersection de *1*a* et *0*.

Donné : (MH) est perpendiculaire à (AG) en G. [5]

Commentaire : l'auteur n'a pas pu préciser la référence de 2005 au sujet du problème de la Thaïlande.

Archive :

---

4 Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle

5 HM is perpendicular to a common chord, Thailand 2005, *Mathlinks* du 01/06/ 2011 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=409570
Switzerland, Team Selection Test Day **3** (2006) ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php?c=164&cid=227&year=2006
Hard to approach it !, AoPS du 25/05/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=89098
Geometry Problem, *Mathlinks* du 28/01/2011 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=388742

Switzerland
Team Selection Test
2006

Day 3

3 Let $\triangle ABC$ be an acute-angled triangle with $AB \neq AC$. Let H be the orthocenter of triangle ABC, and let M be the midpoint of the side BC. Let D be a point on the side AB and E a point on the side AC such that $AE = AD$ and the points D, H, E are on the same line. Prove that the line HM is perpendicular to the common chord of the circumscribed circles of triangle $\triangle ABC$ and triangle $\triangle ADE$.

[6]

Geometry Solved Problems

Page **1** of **38** [1481 topics]

Go to page 1, 2, 3, 4, 5 ... 38 Next

Topics	Author	Comments	Views	Last post
Topics				
Hard to approach it ! **Source:** Swiss Imo Selection 2006 [Go to page: 1, 2, 3]	BogG	53	11901	Jun 18, 2014, 9:17 am JuanOrtiz

BogG

Posts: 60
Location: Lausanne Suisse

Rate:

May 25, 2006, 1:45 pm • # 1

Let $\triangle ABC$ be an acute-angled triangle with $AB \neq AC$. Let H be the orthocenter of triangle ABC, and let M be the midpoint of the side BC. Let D be a point on the side AB and E a point on the side AC such that $AE = AD$ and the points D, H, E are on the same line. Prove that the line HM is perpendicular to the common chord of the circumscribed circles of triangle $\triangle ABC$ and triangle $\triangle ADE$.

Last edited by BogG on May 26, 2006, 6:18 am, edited 4 times in total.

[7]

---

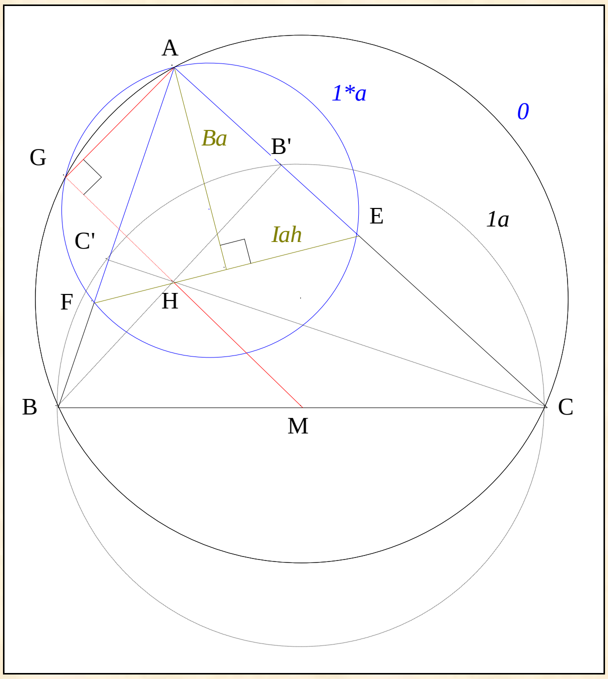
[6] Switzerland, Team Selection Test Day **3** (2006) ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/resources.php?c=164&cid=227&year=2006

[7] Hard to approach it !, AoPS du 25/05/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49&t=89098

B. LA FORMULATION DE L'AUTEUR

VISION

Figure :



Traits :

	ABC	un triangle acutangle,
	M	le milieu de [BC],
	1a	le cercle de centre M passant par B,
	B', C'	les points d'intersection de *1* resp. avec (AC), (AB),
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	H	le point d'intersection de (BB') et (CC'),
	Ba	la A-bissectrice intérieure de ABC,
	Iah	la perpendiculaire à *Ba* issue de H,
	E, F	les points d'intersection de *Iah* resp. avec [AC], [AB],
	N	le milieu de [EF],
	*1*a*	le cercle circonscrit au triangle AEF,
et	G	le second point d'intersection de *1*a* et *0*.

Donné : (MH) est perpendiculaire à (AG) en G.

C. HISTOIRE IMAGINÉE

PAR

L'AUTEUR

DE

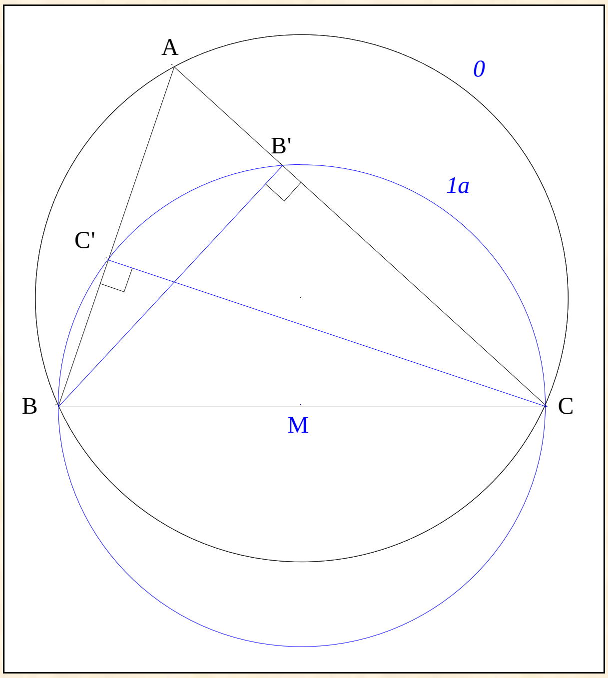
L'ÉMERGENCE DU PROBLÈME

Commentaire : les traits de la figure sont présentés dans l'ordre chronologique en citant leur auteur.

1. Thalès de Milet (624 av. J.-C. – 547 av. J.-C.)

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
M le milieu de [BC],
1a le cercle de diamètre [BC],
B', C' les points d'intersection de *1* resp. avec (AC), (AB),

Donné : les triangles B'BC, C'BC sont resp. B', C'-rectangles.

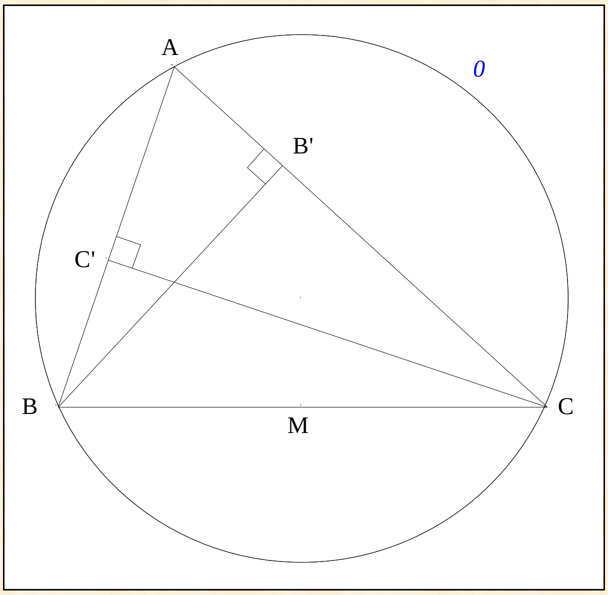
Scolie : M est le centre de *1a*.

Terminologie : *1a* est "le A-cercle de Thalès de ABC".

2. Euclide d'Alexandrie (vers 325 - vers 265 av J.-C.)

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
0 un cercle circonscrit à ABC.

Donné : *0* est unique. [8]

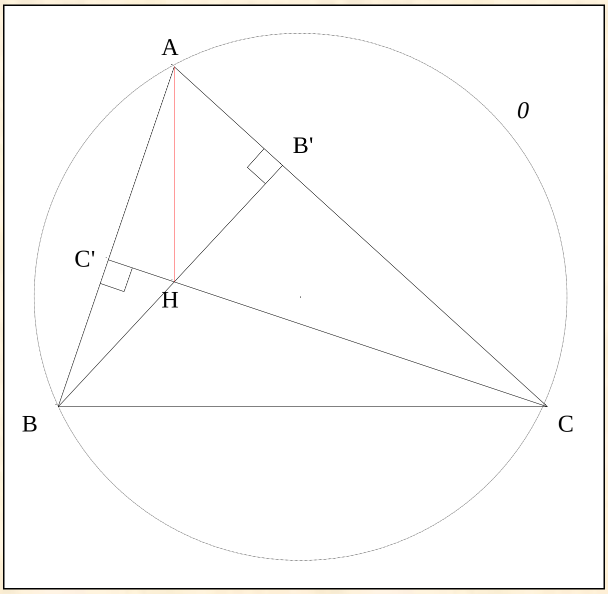
Terminologie : *0* est "le cercle circonscrit à ABC".

3. Archimède de Syracuse (vers 287 av. J.C.-212 av. J.C.)

VISION

Figure :

[8] Euclide, *Éléments* Livre **IV**, proposition **5**



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
H le point d'intersection de (BE) et (CF).

Donné : (AH) est perpendiculaire à (BC). [9]

Terminologie : H est "l'orthocentre de ABC".

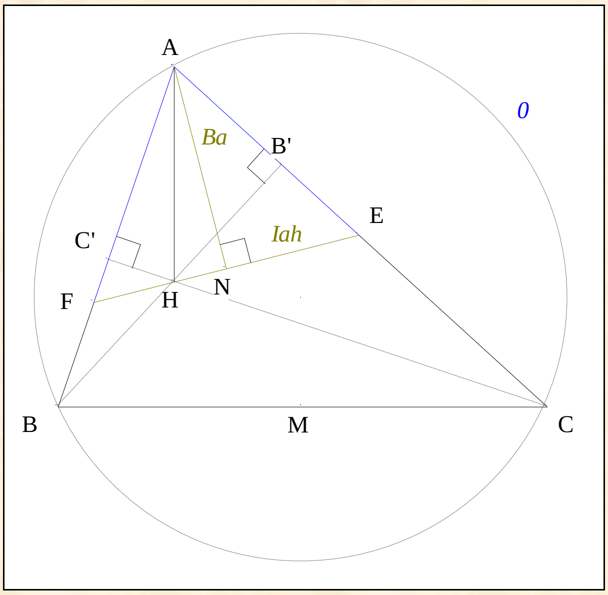
Note historique : Euclide ignore le concept d'orthocentre dans ses *Éléments*, alors qu'Archimède en parle sous un autre nom dans le lemme **5**.

4. École pythagoricienne (VIe av. J.-C. – 180 av. J.-C.)

VISION

Figure :

[9] Archimède de Syracuse, en grec ancien, Ἀρχιμήδης / *Arkhimêdês*), *Scolies*, lemme **5**
Heath T. L., *Works of Archimedes*, Cambridge (1897) Lemmas **5**



Traits : les hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons

	Ba	la droite issue de A et partageant l'angle <BAC en deux angles égaux,
	Iah	la perpendiculaire à *Ba* issue de H,
	E, F	les points d'intersection de *Pah* resp. avec [AC], [AB]
et	N	le point d'intersection de *Pah* et *Ba*.

Donné : N est le milieu de [EF].

Terminologies :

(1) *Ba* est "la A-bissectrice intérieure de ABC"
(2) *Iah* est "la A-isocélienne [10] de ABC issue de H".

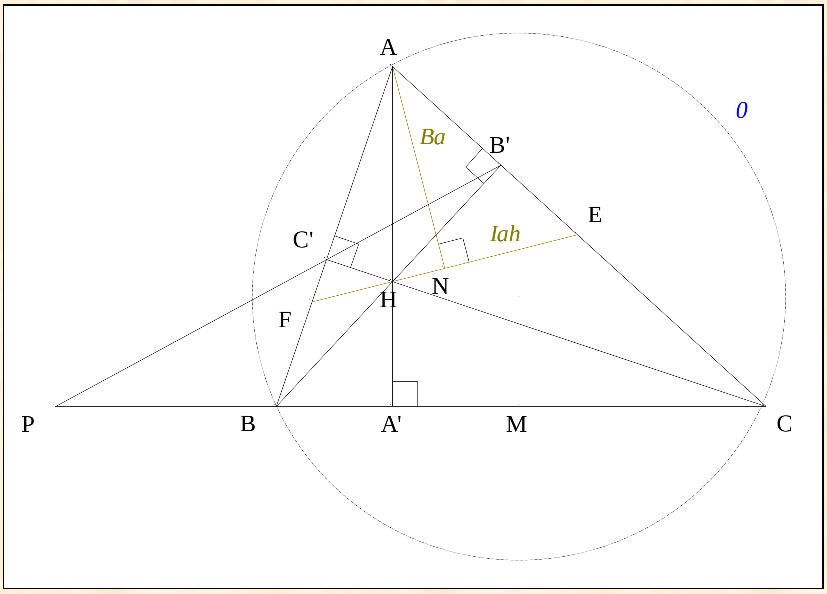
Note historique : selon le géomètre américain Nathan Altshiller-Court [11],
le centre d'un triangle défini comme point de concours de ses bissectrices intérieures[12],
était connu de l'École pythagoricienne.

5. Pappus d'Alexandrie (IVe siècle)

VISION

Figure :

[10] Une A-isocélienne est une ménélienne perpendiculaire à la A-bissectrice intérieure de ABC qui conduit à un triangle isocèle
[11] Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Richmond (1936)
[12] Euclide d'Alexandrie, *Éléments*, Livre **IV**, problème **4**, proposition **4**



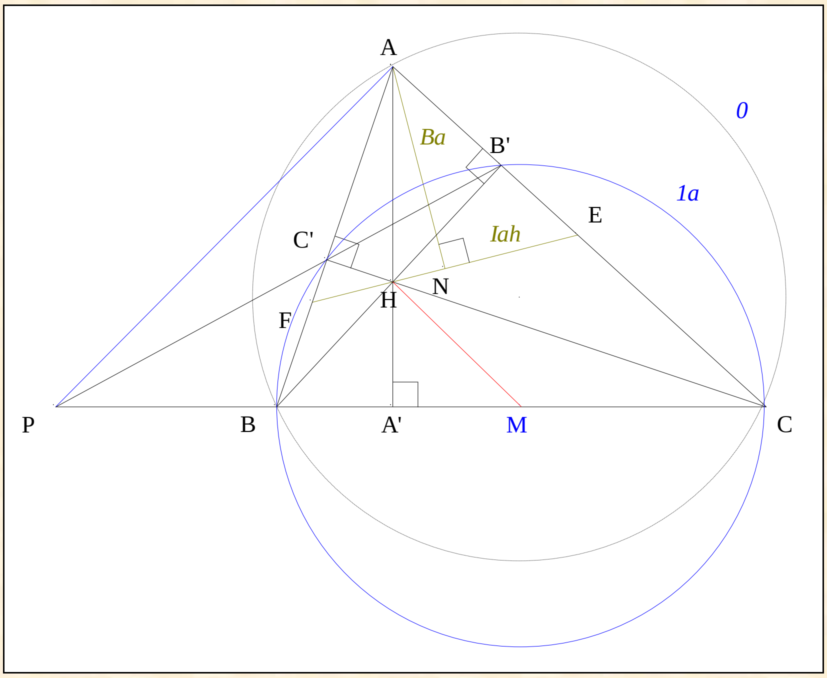
Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
A' le pied de la A-hauteurs de ABC
et P le point d'intersection de (B'C') et (BC).

Donné : le quaterne (B, C, A', P) est harmonique. [13]

6. Philippe de La Hire (18/03/1640 – 21/04/1718)

VISION

Figure :



[13] Pappus d'Alexandrie, nom latinisé de Pappos d'Alexandrie, en grec Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεύς, *Synagogè* (vers 340) livre **VII** proposition **131**

Traits : les hypothèses et notations précédentes sont les mêmes.

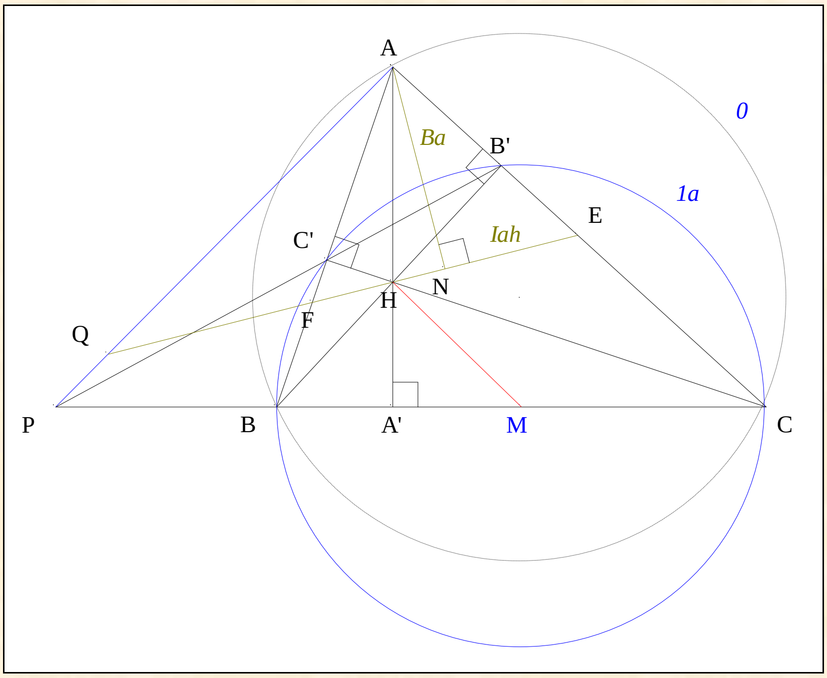
Donné : (MH) est perpendiculaire à (AP).[14]

Commentaire : cette situation a été traitée par Philippe de La Hire en 1685 dans le livre **I**, proposition **22** des *Sectiones conicæ in novem libros distributæ* [15].
L'auteur a rencontré cet exercice résolu sans référence dans le livre *Exercices de Géométrie Moderne* de Georges Papelier datant de 1927.

7. Colin MacLaurin (?/02/1698 -14/06/1746)

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
Q le point d'intersection de (AP) et (EF).

Donné : QE.QF = QH.QN. [16]

Commentaire : cette relation conséquence d'un quaterne harmonique est la moins connue.
Nous la trouvons dans *De Linearum Geometricarum Proprietatibus Generalibus Tractatus* dont le début de l'écriture a commencé en 1721 et qui réapparaît en annexe de façon posthume

---

[14] Papelier G. (02/08/1860 - 28/11/1943), *Exercices de Géométrie Moderne*, Pôles et polaires n° **34** (1927) 24, Eds J. Gabay (1996)
MH perpendicular at, *Mathlinks* du 26/01/2006 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=72094
Ayme J.-L., La réciprocité polaire de La Hire, G.G.G. vol. **13**, p. 24 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[15] http://en.wikisource.7val.com/wiki/Author:Philippe_de_la_Hire

[16] Relation de MacLaurin C., Wikipedia ; http://fr.wikipedia.org/wiki/Division_harmonique
Lebossé et Hémery, *Géométrie, Classe de Mathématiques*, Nathan (1961), p. 168

dans *Treatise of Algebra* en 1748.

VISUALISATION

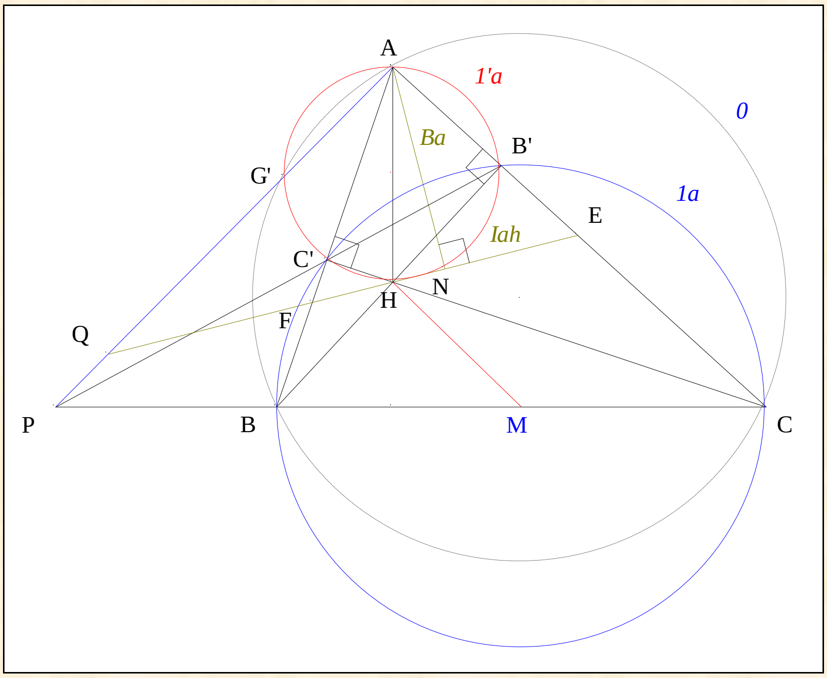
- D'après **C. 5.** Pappus, le pinceau (A ; B, C, A', P) étant harmonique, le quaterne (F, E, H, Q) est harmonique.

- **Conclusion :** N étant le milieu de [EF], QE.QF = QH.QN.

8. Gaspard Monge (09/05/1746 - 28/07/1818)

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
1'a le cercle de diamètre [AH]
et G' le second point d'intersection de *1'a* et *0*.

Donné : (AG') passe par P.

Commentaire : en 1822, Jean Victor Poncelet [17] attribue "le théorème des trois cordes" au comte de Péluse, Gaspard Monge.

[17] Poncelet J.V., *Traité des propriétés projective des figures* (02/06/1822) tome **1**, 40

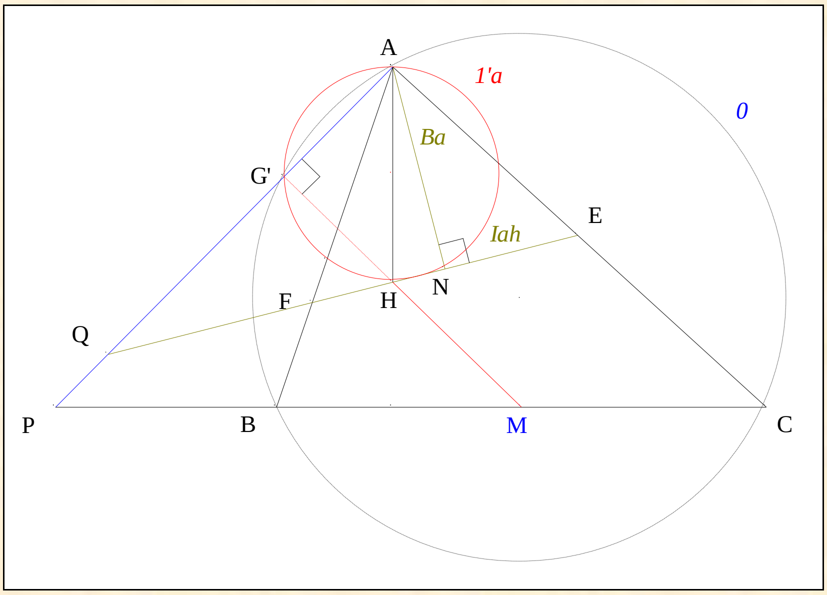
VISUALISATION

- D'après **C.1.** Thalès, *1'a* passe par B', C' et N
- **Scolie :** (AG') est la corde commune de *0* et *1'a*.
- **Conclusion :** d'après Monge "Le théorème des trois cordes" [18] appliqué à *0*, *1a* et *1'a*, (AG') passe par P.

9. L'alignement de 1822

VISION

Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : (MH) est perpendiculaire à (AG') en G'.

Commentaire : cette pause permet une première conclusion.

VISUALISATION

- D'après
  - * **C. 6.** de La Hire, (MH) ⊥ (AG')
  - * **C. 1.** Thalès d'Alexandrie, (AG') ⊥ (HG')

[18] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

* Euclide d'Alexandrie [19] (MH) // (HG')

* le postulat d'Euclide [20], (MH) = (HG')

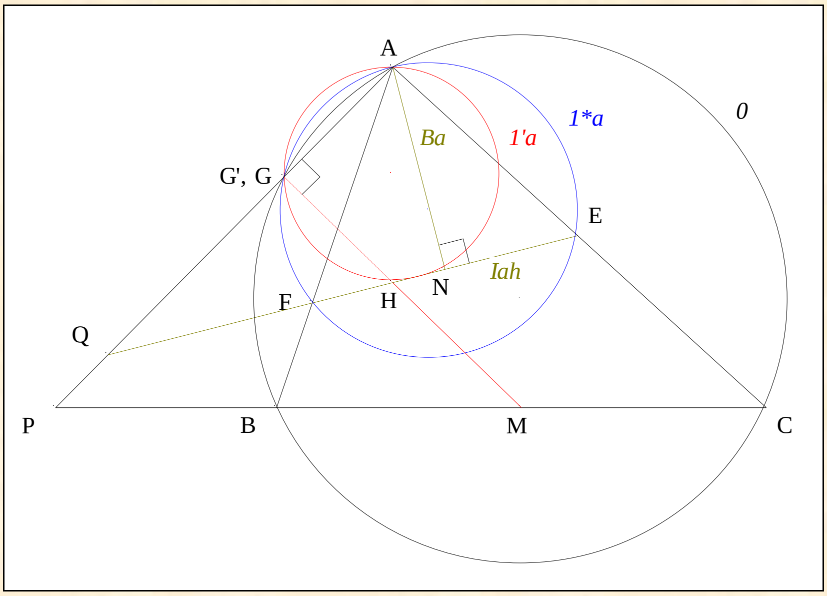
* en conséquence, M, H et G' sont alignés.

- **Conclusion :** (MH) est perpendiculaire à (AG') en G'.

10. Karl Wilhelm Feuerbach (30/05/1800 – 12/03/1834)

VISION

Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
*1*a* le cercle circonscrit au triangle AEF,
et G le second point d'intersection de *1*a* et *0*.

Donné : (MH) est perpendiculaire à (AG) en G.

Commentaire : enfin, nous arrivons à la date recherchée…

VISUALISATION

- D'après

  * **C. 7.** Colin MacLaurin, QE.QF = QH.QN.

  * Euclide [21], QH.QN = QG'.QA

---

[19] Euclide, *Éléments*, Livre **I**, proposition **27**
[20] Euclide, *Éléments*, Livre **I**, demande (axiome) **5**

* par transitivité de la relation =, QR.QS = QG'.QA.

* par la condition de cocyclité, parfois dite de Feuerbach [22], *1*a* passe par G'

* en conséquence, G et G' sont confondus.

- **Conclusion :** (MH) est perpendiculaire à (AG) en G.

C. CONCLUSION

Notre recherche se termine… l'année 1822 apparaît comme étant celle qui aurait pu voir l'émergence du problème **3** du TST de Suisse du troisième jour.

21 Euclide, *Éléments*, Livre **III**, proposition **36** ; http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookIII/propIII35.html

22 Feuerbach K., *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren*, Nürnberg (1822)