Chứng minh định lý Sondat dựa theo ý tưởng của Jean-Louis Ayme

Nguyễn Văn Linh

Năm 2015

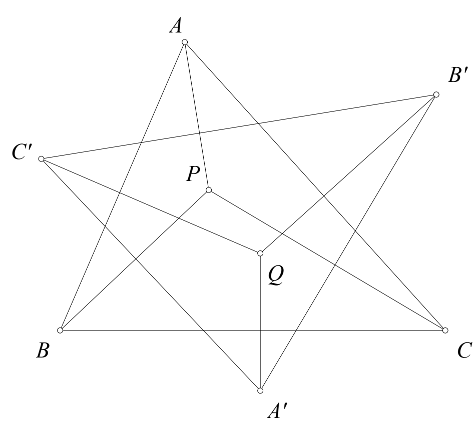
1 Giới thiệu

Tại [1], tác giả người Pháp *Jean-Louis Ayme* đưa ra một chứng minh sơ cấp khá thú vị cho định lý Sondat về hai tam giác trực giao có tâm thấu xạ. Hướng chứng minh của tác giả rất đặc sắc khi sử dụng phép vị tự để đưa về hai tam giác có chung tâm trực giao. Tuy nhiên phần sau của tác giả khá dài và có một đoạn lí luận chưa chặt chẽ. Trong bài viết này tôi xin chứng minh lại định lý Sondat dựa theo ý tưởng của tác giả cùng phần đã chỉnh sửa.

2 Chứng minh

Trước tiên xin giới thiệu tới bạn đọc khái niệm về hai tam giác trực giao.

Định lý 1. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Khi đó các đường vuông góc kẻ từ A, B, C tới $B'C', C'A', A'B'$ đồng quy tại P khi và chỉ khi các đường vuông góc kẻ từ A', B', C' tới BC, CA, AB đồng quy tại Q. Ta gọi ABC và $A'B'C'$ là hai tam giác trực giao, P là tâm trực giao của tam giác $A'B'C'$ ứng với bộ điểm A, B, C, Q là tâm trực giao của tam giác ABC ứng với bộ điểm A', B', C'.



Chứng minh. Áp dụng định lý Carnot, các đường vuông góc kẻ từ A, B, C tới $B'C', C'A', A'B'$ đồng quy khi và chỉ khi $(AB'^2 - AC'^2) + (BC'^2 - BA'^2) + (CA'^2 - CB'^2) = 0$.

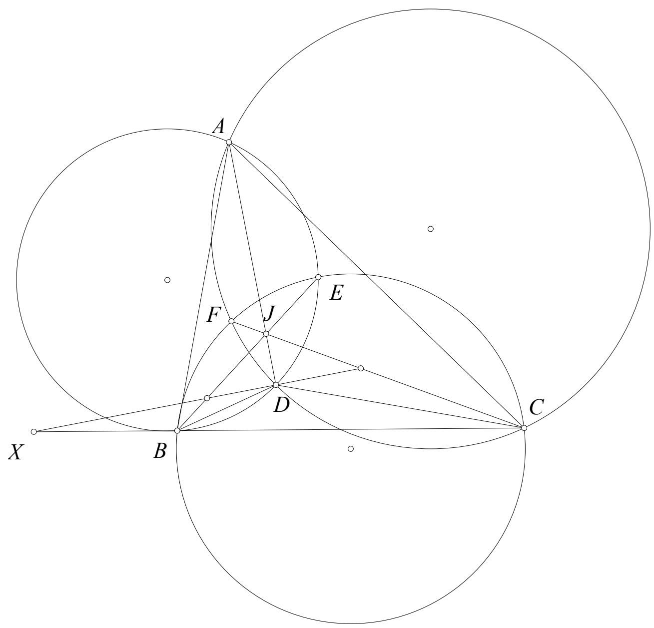
Hay $(B'A^2 - B'C^2) + (A'C^2 - A'B^2) + (C'B^2 - C'A^2) = 0$ tương đương các đường vuông góc kẻ từ A', B', C' tới BC, CA, AB đồng quy. Ta có đpcm. □

Định lý 2 (Pierre Sondat). Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ trực giao có tâm trực giao là P và Q. Giả sử hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ thấu xạ theo tâm O. Khi đó O, P, Q thẳng hàng.

Chứng minh. Trước tiên ta cần hai bổ đề sau.

Bổ đề 1. (Định lý Dergiades). Cho tam giác ABC. 3 đường tròn $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ lần lượt đi qua các cặp đỉnh B, C; C, A; A, B. Gọi D, E, F là giao điểm thứ hai của 3 đường tròn này. Đường thẳng Qua D vuông góc với AD cắt BC tại X. Tương tự xác định Y, Z. Khi đó X, Y, Z thẳng hàng.

Chứng minh.



Đặt $\angle BEC = \angle BFC = \alpha$, $\angle ADC = \angle AFC = \beta$, $\angle AEB = \angle ADB = \gamma$, bán kính của $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ lần lượt tại R_a, R_b, R_c.

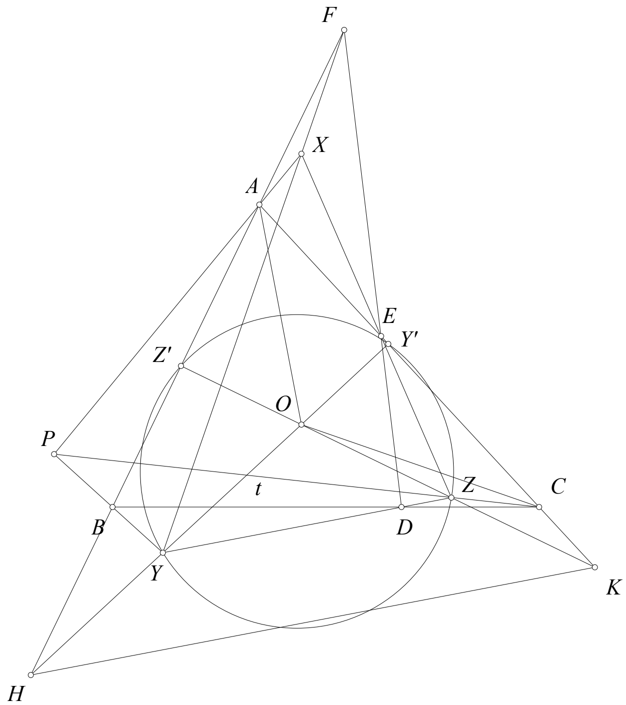
Ta có $\dfrac{XB}{XC} = \dfrac{BD \cdot \sin \angle XDB}{CD \cdot \sin \angle XDC} = \dfrac{BD \cdot (-\cos \angle ADB)}{CD \cdot (-\cos \angle ADC)} = \dfrac{BD \cdot \cos \gamma}{CD \cdot \cos \beta}$.

Chứng minh tương tự suy ra $\dfrac{XB}{XC} \cdot \dfrac{YC}{YA} \cdot \dfrac{ZA}{ZB} = \dfrac{BD}{CD} \cdot \dfrac{CE}{AE} \cdot \dfrac{AF}{BF}$.

Ta lại có $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{2R_c \sin \angle BAD}{2R_b \sin \angle CAD}$. Tương tự và áp dụng định lý Céva sin cho tam giác ABC với các đường AD, BE, CF đồng quy tại tâm đẳng phương của $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ ta thu được $\dfrac{BD}{CD} \cdot \dfrac{CE}{AE} \cdot \dfrac{AF}{BF} = 1$. Vậy X, Y, Z thẳng hàng.

Bổ đề 2. Cho hai tam giác ABC và XYZ thỏa mãn các đường vuông góc kẻ từ A, B, C tới YZ, ZX, XY và các đường vuông góc kẻ từ X, Y, Z tới BC, CA, AB cùng đồng quy tại O. Khi đó hai tam giác ABC và XYZ thấu xạ.

Chứng minh.

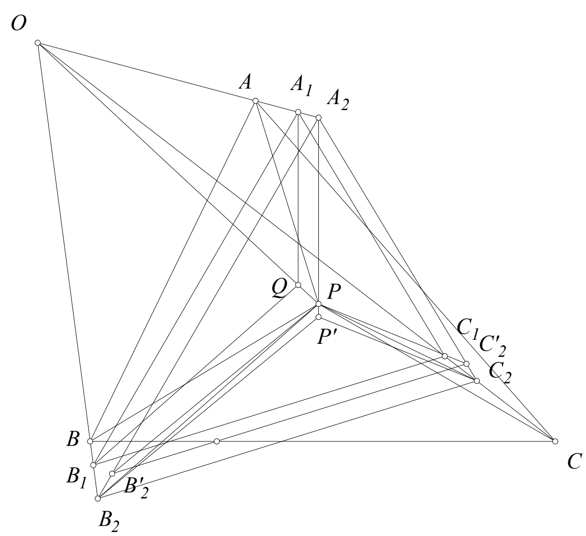


Gọi X', Y', Z' lần lượt là hình chiếu của X, Y, Z trên BC, CA, AB. D, E, F lần lượt là giao của BC và YZ, AC và XZ, AB và XY. Gọi H, K lần lượt là giao của AB và OY', AC và OZ'.

Do O là trực tâm của tam giác AHK nên $AO \perp HK$. Mà $AO \perp YZ$ nên $YZ \parallel HK$. Lại có $HZ'Y'K$ là tứ giác nội tiếp nên áp dụng định lý Reim suy ra Y, Z, Y', Z' cùng nằm trên đường tròn ω_x. Tương tự có ω_y, ω_z.

Áp dụng định lý Dergiades cho tam giác XYZ và 3 đường tròn $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ suy ra D, E, F thẳng hàng. Theo định lý Desargues ta có hai tam giác ABC và XYZ thấu xạ.

Trở lại định lý Sondat.



Gọi A_2 là điểm nằm trên AA_1 sao cho $PA_2 \perp BC$, B_2, C_2 là hai điểm trên BB_1, CC_1 sao cho $A_2B_2 \parallel A_1B_1, A_2C_2 \parallel A_1C_1$.

Do A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại O nên hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ vị tự theo tâm O. Suy ra $B_1C_1 \parallel B_2C_2$. P là tâm trực giao của tam giác $A_2B_2C_2$ ứng với tam giác ABC.

Gọi D, E, F là giao điểm của B_2C_2 với BC, A_2C_2 với AC, A_2B_2 với AB. Do hai tam giác $A_2B_2C_2$ và ABC thấu xạ nên theo định lý Desargues, D, E, F thẳng hàng.

Qua P kẻ đường thẳng vuông góc với AC, AB cắt A_2B_2, A_2C_2 lần lượt tại B_2', C_2'. Do các đường vuông góc kẻ từ B_2 tới AC, C_2 tới AB cắt nhau tại một điểm P' trên A_2P nên hai tam giác $PB_2'C_2'$ và $P'B_2C_2$ vị tự theo tâm A_2. Suy ra $B_2'C_2' \parallel B_2C_2$ và do đó P là tâm trực giao của hai tam giác $A_2B_2'C_2'$ và ABC. Theo bổ đề trên suy ra $A_2B_2'C_2'$ và ABC thấu xạ. Theo định lý Desargues, giao điểm D' của $B_2'C_2'$ với BC nằm trên EF. Mà D và D' cùng nằm trên BC nên $D \equiv D'$ hay hai tam giác ABC và $A_2B_2C_2$ có chung tâm trực giao P.

Ta có hai tam giác A_2PB_2 và A_1QB_1 có cạnh tương ứng song song nên vị tự theo tâm O. Suy ra O, P, Q thẳng hàng. $\square$

Nhận xét. Tại [1], kết luận $A_2B_2C_2$ và ABC có chung tâm trực giao được đưa ra sau khi chứng minh P là tâm trực giao của $A_2B_2C_2$ ứng với ABC. Điều này có vẻ không hiển nhiên khi tôi nhận thấy việc chứng minh nó khá khó khăn.

Tài liệu

[1] Jean-Louis Ayme, *Le théorème de Sondat une preuve simple et purement synthétique.* http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/vol1.html

[2] Sondat P., Question 38, *L'intermédiaire des mathématiciens* (1894) 10.

Email: ***Lovemathforever@gmail.com***