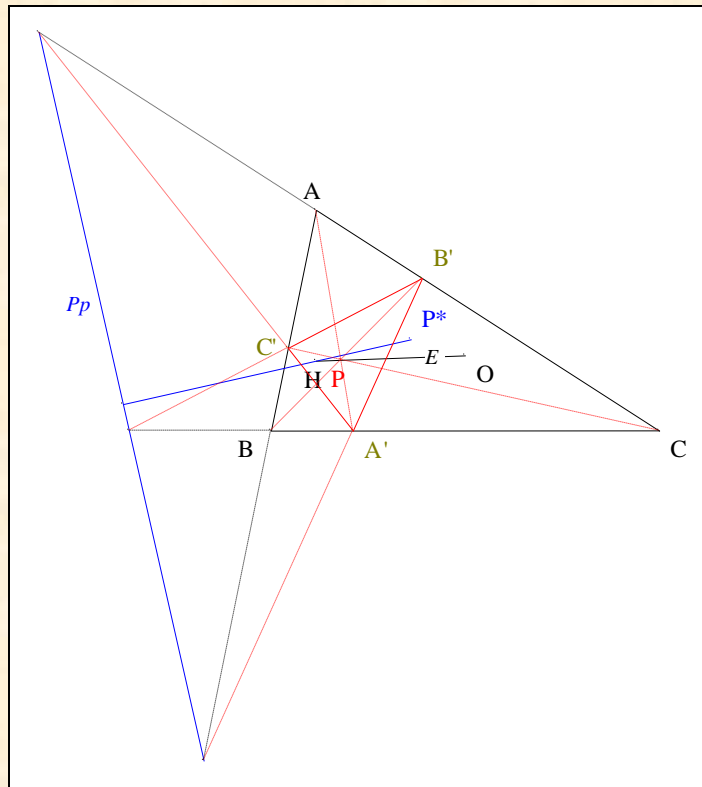


L'ÉTONNANT RÉSULTAT
DE
JOHN ALEXANDER THIRD

†

Jean-Louis AYME ¹



Résumé.

L'auteur présente un étonnant résultat de John Alexander Third, en donne la première preuve synthétique, propose un problème personnel traité selon un point de vue personnel et termine par divers exercices.
Une note historique et une archive accompagnent l'article.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements.

Je tiens à remercier D. G. Rogers pour des informations complémentaires ainsi que John Sharp et Luis Gonzales.

Abstract.

The author presents an amazing result of John Alexander Third, gives the first synthetic proof, offers a personal problem treated depending on a personal standpoint and ends with various exercises.
Historical notes and archives come with the article.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown

¹ Saint-Denis, île de la Réunion (Océan Indien, France), le 31/07/2013 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

synthetically.

Acknowledgment. I would like to thank D. G. Rogers for more information, John Sharp and Luis Gonzales.

Sommaire	
A. L'étonnant résultat de John Alexander Third	3
1. Présentation	
2. Archive	
3. Une courte biographie de John Alexander Third	
B. La preuve de l'auteur	8
1. Une parallèle à l'axe de perspective	
2. Un alignement	
3. Deux pinceaux anharmoniques	
4. Deux pinceaux anharmoniques	
5. La perpendicularité recherchée	
6. Conclusion	
C. Le problème de l'auteur	15
1. Présentation	
2. Visualisation	
L'Esprit du problème	
L'Âme du problème	
Balancement	
Séparation	
Resbis	
D. Appendice	21
1. Isogonale et perpendiculaire	
2. Une perpendiculaire à la droite (PP*)	
3. Une perpendiculaire à la droite d'Euler	
E. Exercices périphériques	25
1. Une équivalence	
2. Intersection sur la droite d'Euler	
3. Un point sur la droite (AA*)	
4. Un alignement	
5. Deux parallèles	
6. Encore un alignement	
7. Encore un alignement	
8. Encore un alignement	
F. Autres exercices de l'auteur	37

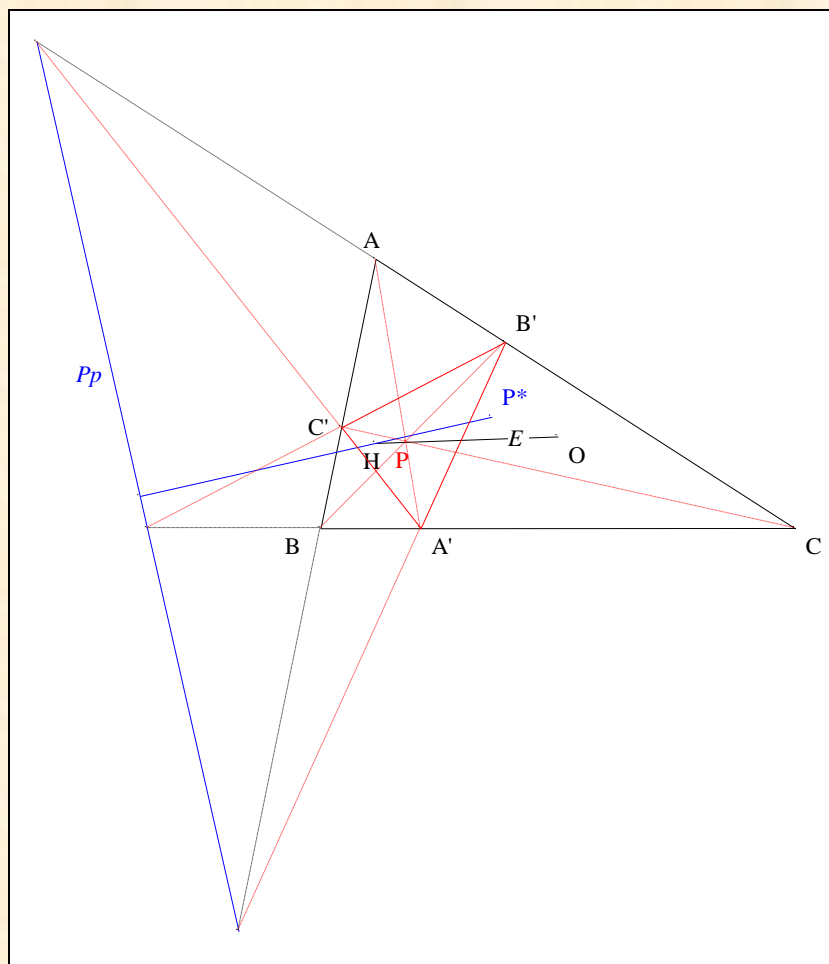
A. L'ÉTONNANT RÉSULTAT
DE
JOHN ALEXANDER THIRD

*La silencieuse évidence
est l'avant
de l'étrange qui étonne*

1. Présentation

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	E	la droite d'Euler de ABC,
	P	un point de E,
	A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
	Pp	l'arguésienne de A'B'C' et ABC,
et	P*	l'isogonal de P relativement à ABC.

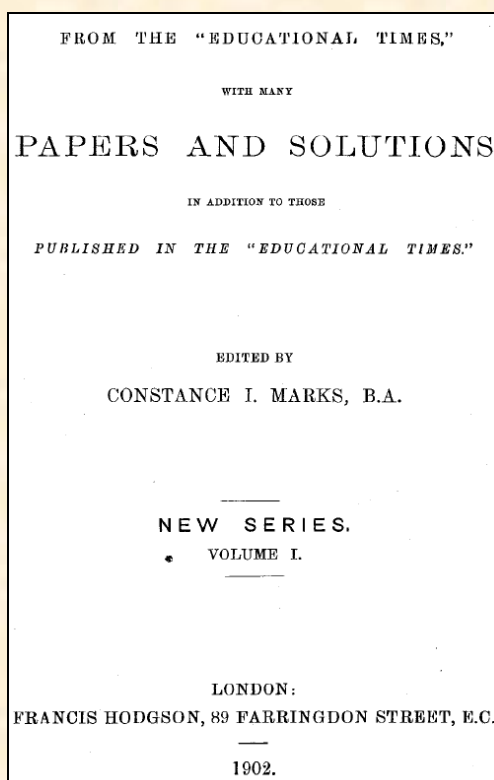
Donné : (HP^*) est perpendiculaire à Pp .²

Énoncé traditionnel :

*La perpendiculaire
issue
du conjugué isogonal de n'importe quel point de la droite d'Euler d'un triangle
à
la polaire trilinéaire de ce point
passe
par l'orthocentre du triangle.*

*The perpendicular
from
the isogonal conjugate of any point on the Euler line of a triangle
to
the trilinear polar of the point
passes
through the orthocentre.*

2. Archive



²

Third J. A., # 14794, Mathematical Questions and Solutions from the *Educational Times* 1 (1902) 89
Grinberg D., A theorem of J. A. Third on the Euler line, *Math Forum* du 10/04/2003 ;
<http://mathforum.org/kb/thread.jspa?forumID=125&threadID=349707&messageID=1071855>
Euler line and perpendiculars, Message *Hyacinthos* # 1445 du 19/08/2000 ;
<http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/>

14794. (J. A. THIRD, M.A., D.Sc.)—The perpendicular from the isogonal conjugate of any point on the EULER line of a triangle to the trilinear polar of the point passes through the orthocentre.

Solutions (I.) by R. F. DAVIS, M.A. ; (II.) by Professor SANJANA, M.A.

(I.) The condition that the point P ($\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$) should lie on the EULER line is

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ \operatorname{cosec} A & \operatorname{cosec} B & \operatorname{cosec} C \end{vmatrix} = 0.$$

The above determinant is obviously equivalent to

$$\begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ \sin 2A/\alpha_1 & \sin 2B/\beta_1 & \sin 2C/\gamma_1 \\ 1/\alpha_1 & 1/\beta_1 & 1/\gamma_1 \end{vmatrix} = 0,$$

and the polar of the isogonal conjugate Q ($1/\alpha_1, 1/\beta_1, 1/\gamma_1$) with respect to the polar circle of the triangle ($\Sigma a^2 \sin 2A = 0$) is parallel to the trilinear polar of P ($\Sigma a/\alpha_1 = 0$).

(II.) Let (p, q, r) be a point; then ($1/p, 1/q, 1/r$) is its conjugate, and

$$a/p + \beta/q + \gamma/r = 0 \dots \dots \dots (1)$$

is its trilinear polar. The line joining the conjugate to the orthocentre ($\sec A, \sec B, \sec C$) is

$$a (\sec C/q - \sec B/r) + \beta (\sec A/r - \sec C/p) + \gamma (\sec B/p - \sec A/q) = 0 \dots (2).$$

Hence, for (1) and (2) to be perpendicular, we have

$$\begin{aligned} (1/p)(\sec C/q - \sec B/r) + (1/q)(\sec A/r - \sec C/p) + (1/r)(\sec B/p - \sec A/q) \\ - \cos A (\sec B/pq - \sec A/q^2 + \sec A/r^2 - \sec C/rp) \\ - \cos B (\sec C/qr - \sec B/r^2 + \sec B/p^2 - \sec A/pq) \\ - \cos C (\sec A/rp - \sec C/p^2 + \sec C/q^2 - \sec B/qr) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{this gives } (1/pq)(\cos B/\cos A - \cos A/\cos B) + (1/qr)(\cos C/\cos B - \cos B/\cos C) \\ + (1/rp)(\cos A/\cos C - \cos C/\cos A) = 0, \end{aligned}$$

that is, $r \sin(A-B) \sin 2C + p \sin(B-C) \sin 2A + q \sin(C-A) \sin 2B = 0$, which shows that (p, q, r) is on the EULER line of the triangle.

3. Une courte biographie de J. A. Third ³

John Alexander Third est né le 6 mai 1865 à Aberdeen (Écosse, Grande-Bretagne).

Fils aîné du tailleur de pierre John D. Third et d'Ann Sinclair, John est élève du Collège Robert Gordon d'Aberdeen, puis étudiant en mathématiques à l'Université de cette même ville en 1885.

A sa sortie, il en devient un assistant, puis plus tard est nommé professeur à l'école de formation toujours dans cette même ville. Après des études à Iéna (Allemagne), il revient pour soutenir Aberdeen pour soutenir sa thèse en 1889.

³ O'Connor J. J. and E F Robertson E. F., The MacTutor History of Mathematics archive ; <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BiogIndex.html>



The grammar school buildings are the closest buildings on the left of the photo,

L'année suivante, il accède au poste de recteur du Grammar School de Campbeltown (Argyllshire, Écosse, Royaume-Uni) fondée en 1686.



Roger Griffith, Spier's School en 1900

De 1895 à 1919, il rejoint comme headmaster la Spier's School à Beith (Ayrshire, Écosse) fondée en 1888 et fermée en 1972.

En janvier 1897, John A. Third devient membre de l'*Edinburgh Mathematical Society*. Membre enthousiaste, il publie des articles et est élu président durant la période 1902-1903.

Le 9 mai 1901, John A. Third devient membre à vie de la *London Mathematical Society*.

Il épouse le 23 décembre 1890 Elizabeth Ramage et de cette union naissent un fils John et une fille Édith (18/06/1893).

En 1927, il prend sa retraite et s'installe à Édimbourg où il décède le 11 août 1948.

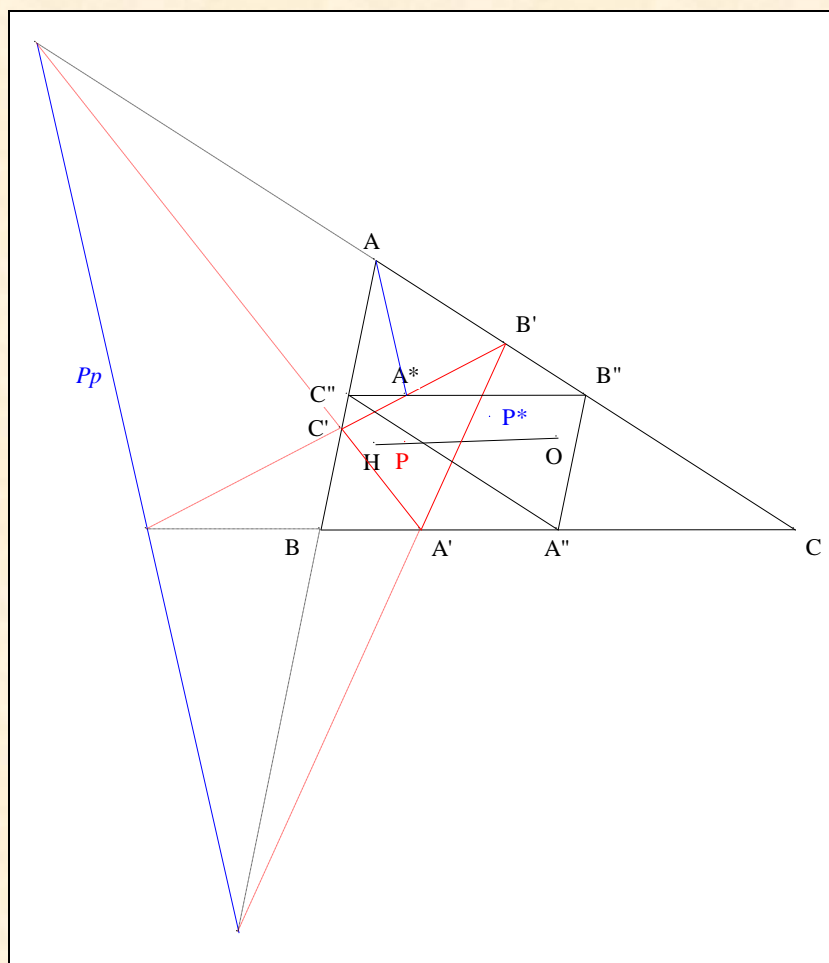
Après sa mort, l'Université d'Aberdeen instaure le prix du Dr. J. A. Third qui sera décerné chaque année au meilleur étudiant en mathématiques.

B. LA PREUVE DE L'AUTEUR

1. Une parallèle à l'axe de perspective

VISION

Figure :

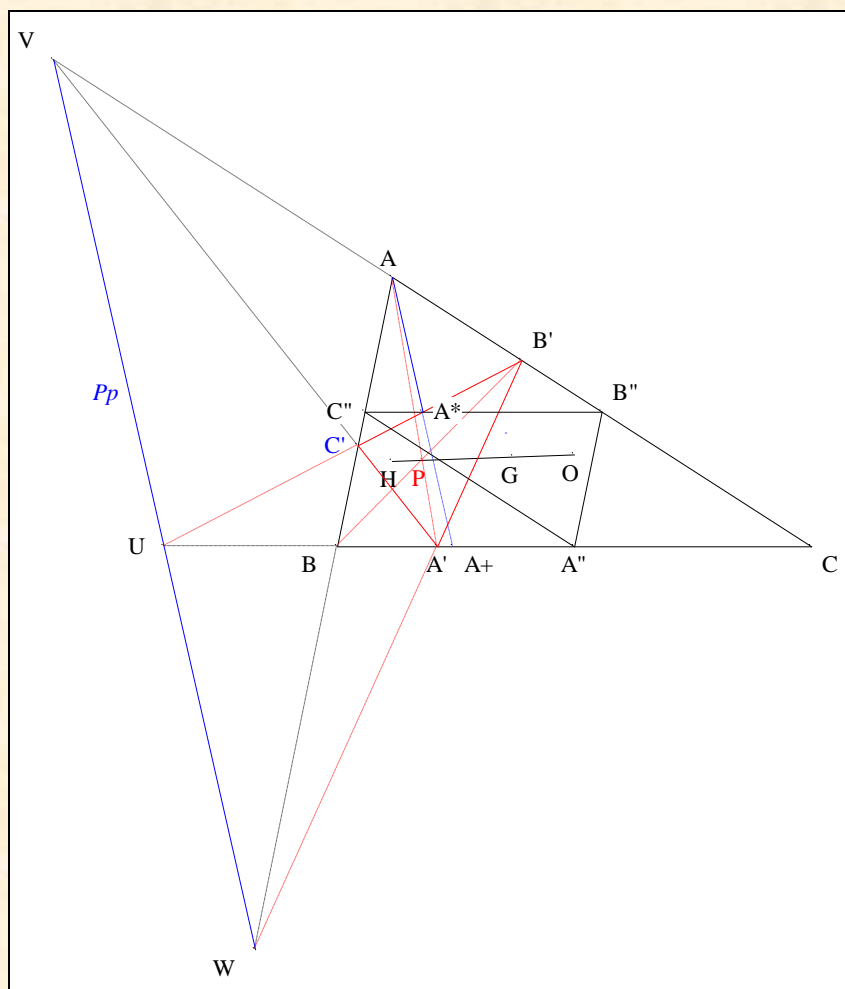


Traits : $A''B''C''$ aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
 et A^* le triangle médian de ABC
 le point d'intersection de $(B'C)$ et $(B''C'')$.

Donné : (AA^*) est parallèle à Pp .⁴

VISUALISATION

⁴ Ayme J.-L., Prove or disprove, AoPS du 06/06/2013 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=537483>



- Notons U, V, W les points d'intersection resp. de $(B'C')$ et (BC) , $(C'A')$ et (CA) , $(A'B')$ et (AB)
et A^+ le point d'intersection de (AA^*) et (BC) .
- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère complet"⁵
appliqué au quadrilatère $CA'PB'$, le quaterne (A, B, C', W) est harmonique ;
en conséquence, le pinceau $(U ; A, B, C', W)$ est harmonique.
- **Conclusion** : A^* étant le milieu de $[AA^+]$,
d'après Pappus d'Alexandrie⁶, (AA^*) est parallèle à Pp .

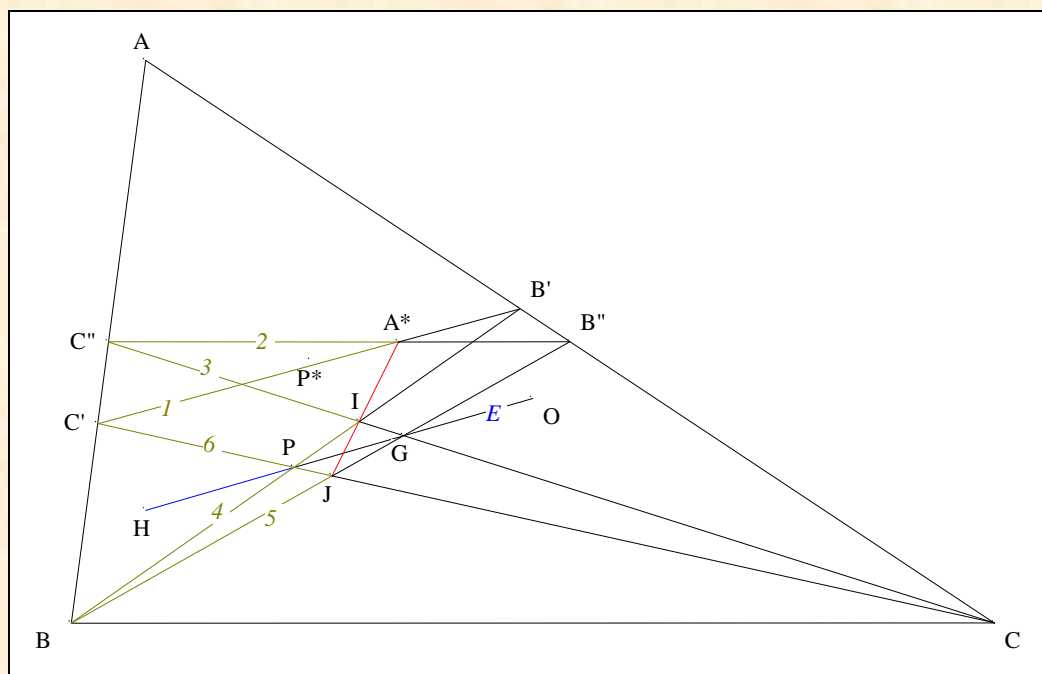
⁵ Pappus, *Collections συναγωγῆ*, Livre VII, proposition 131

⁶ Pappus, *Collections συναγωγῆ*, Livre VII, proposition 137

2. Un alignement

VISION

Figure :



Traits : I, J aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons les points d'intersection resp. de (BB') et (CC'') , (C') et (BB'') .

Donné : I, J et A^* sont alignés.

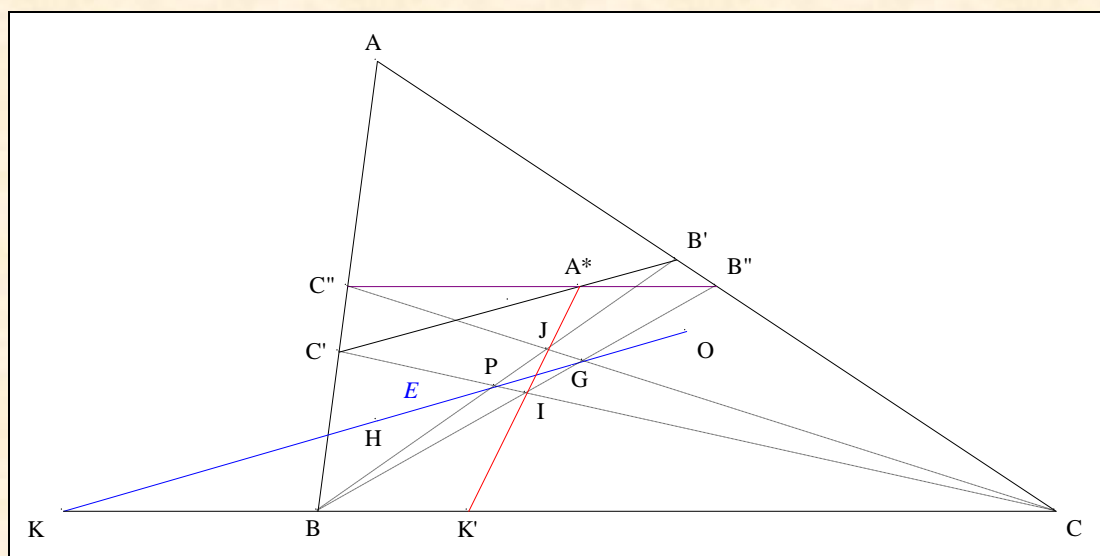
VISUALISATION

- **Conclusion :** d'après Pappus "La proposition 139"⁷ $(B'B''C)$ étant la pappusienne de l'hexagone $C'A^*C''IBJC'$, I, J et A^* sont alignés.

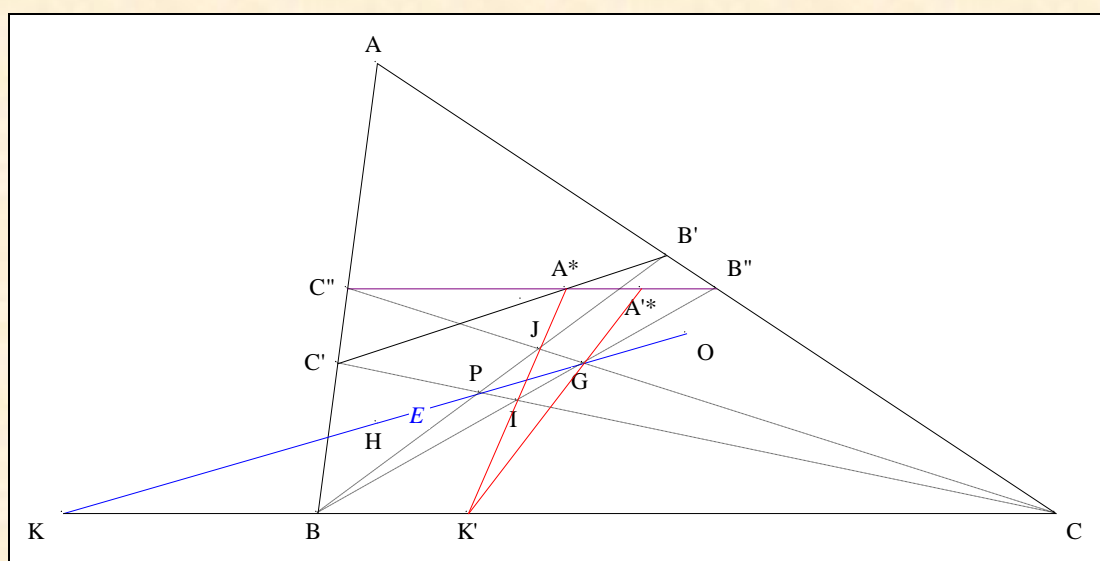
7

Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. 6, p. 9-16 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

Solie : (A^*I) passe par un point fixe



- Notons K le point d'intersection de E et (BC) ,
et K' le point d'intersection de (A^*I) et (BC) .
- D'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère complet"⁸
appliqué au quadrilatère $JPIG$, le quaterne (B, C, K', K) est harmonique.
- **Conclusion :** K' est un point fixe.

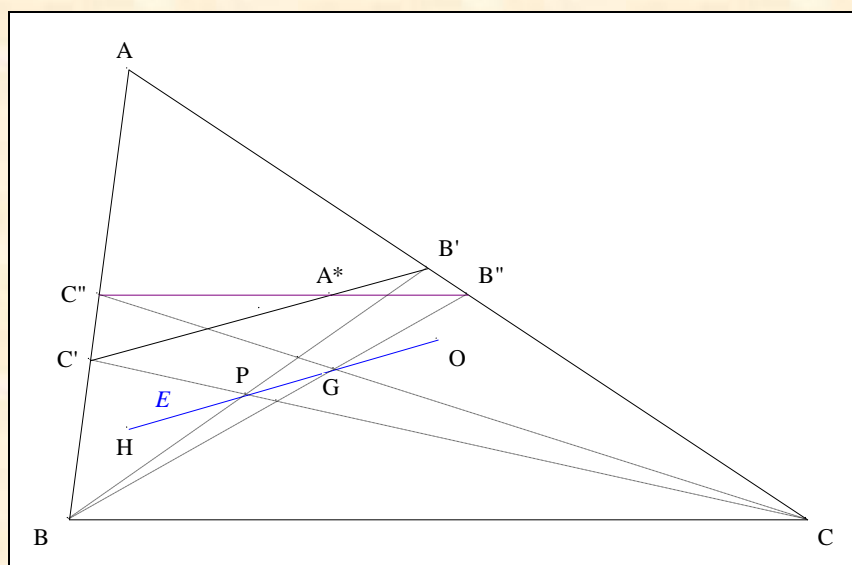


- Notons A'^* le point d'intersection de $(K'G)$ et $(B''C'')$.

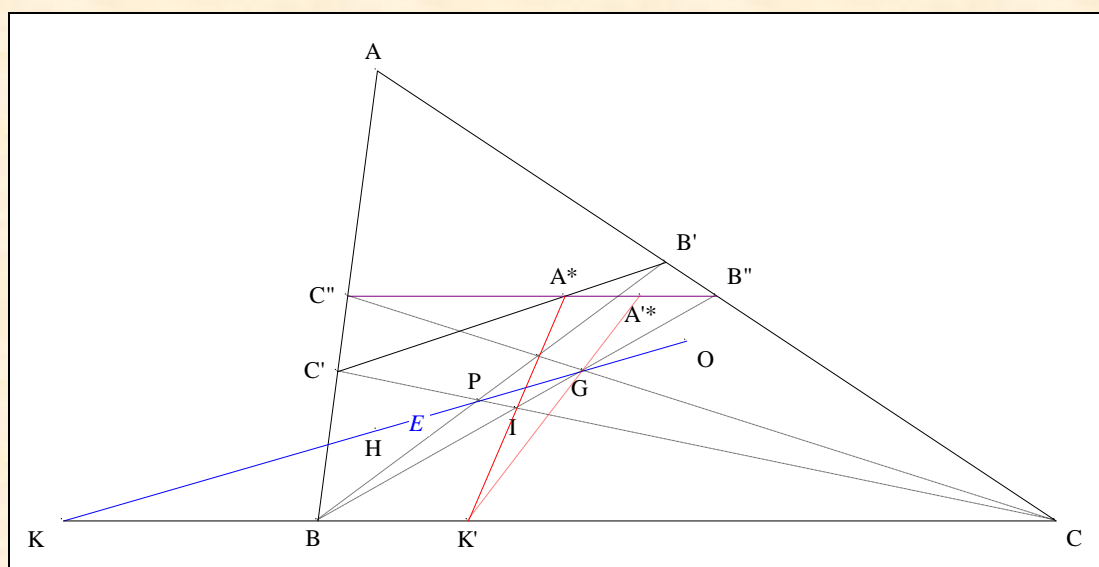
⁸ Pappus, *Collections* $\nu\nu\alpha\gamma\omega\gamma'\eta$, Livre VII, proposition 131

3. Deux pinceaux anharmoniques

Considérons les droites E et $(B''C'')$



- * À tout point P (distinct de G) de E correspond un seul point A^* de $(B''C'')$ déterminé par l'intersection de $(B'C')$ et $(B''C'')$

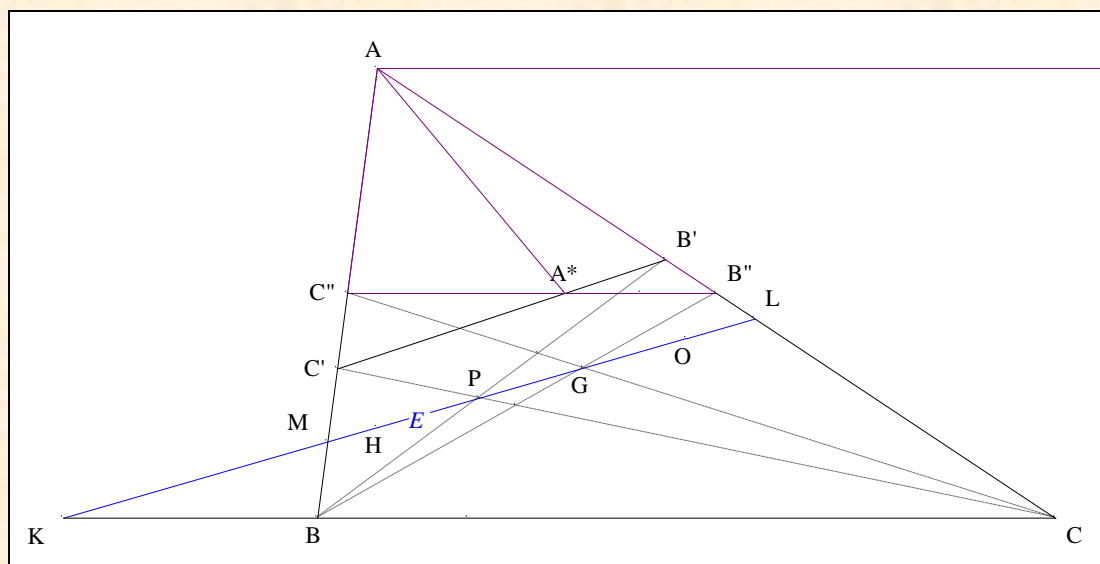


- * À tout point A^* (distinct de A'^*) de $(B''C'')$ correspond un seul point P de E déterminé par intersection de droites de la façon suivante

1. J le point d'intersection de (A^*M) et (BGB'')
2. P le point d'intersection de (CJ) et E .

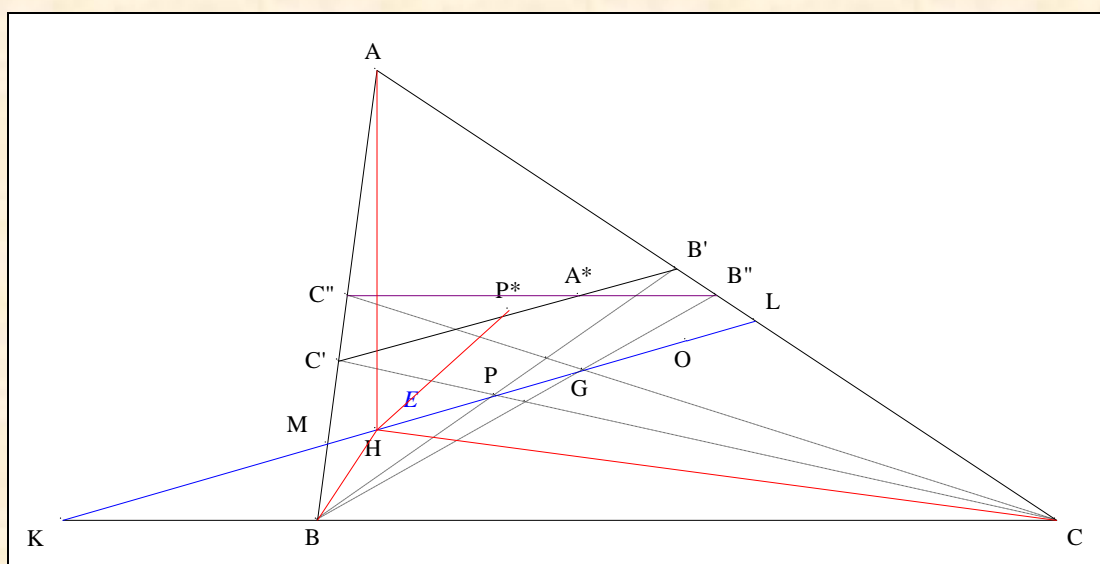
- * Comme, étant donné le point P , le point A^* est défini par l'intersection de droites, les abscisses de P et A^* resp. sur E et $(B''C'')$ sont liés algébriquement. Nous en concluons que P et A^* tracent resp. sur E et $(B''C'')$ des divisions homographiques.

- * Précisons cette homographie en se donnant trois couples de points homologues



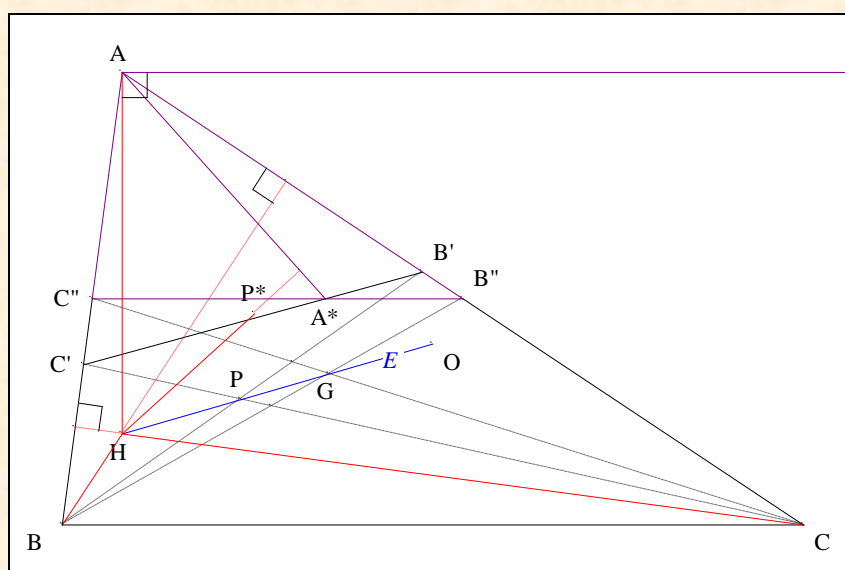
- Notons L, M les points d'intersection de E resp. avec $(AC), (AB)$.
- L'homologue de K est le point ∞ i.e. à l'infini de (BC) et $(B''C'')$
 L est le point B''
 M est le point C'' ;
- **Conclusion :** les rapports anharmoniques de (K, L, M, P) et (∞, B'', C'', A^*) étant égaux,
 $(A ; \infty, B'', C'', A^*) = (H ; K, L, M, P)$.

4. Deux autres pincesaux anharmoniques



- * par passage d'un point à son isogonal et par une procédure analogue, nous montrerions que les rapports anharmoniques de $(H ; K, L, M, P)$ et $(H ; A, B, C, P^*)$ sont égaux.
- * Deux pincesaux anharmoniques d'un même troisième étant anharmoniques entre eux,
 $(A ; \infty, B'', C'', A^*) = (H ; A, B, C, P^*)$.

5. La perpendicularité recherchée



- * Les rayons homologues des trois couples définissant les deux pinceaux anharmoniques étant perpendiculaires, nous en concluons que (HP^*) est perpendiculaire à (AA^*) .⁹

6. Conclusion :

- * d'après **B. 1**, (AA^*) est parallèle à Pp
- * en conséquence, (HP^*) est perpendiculaire à Pp .

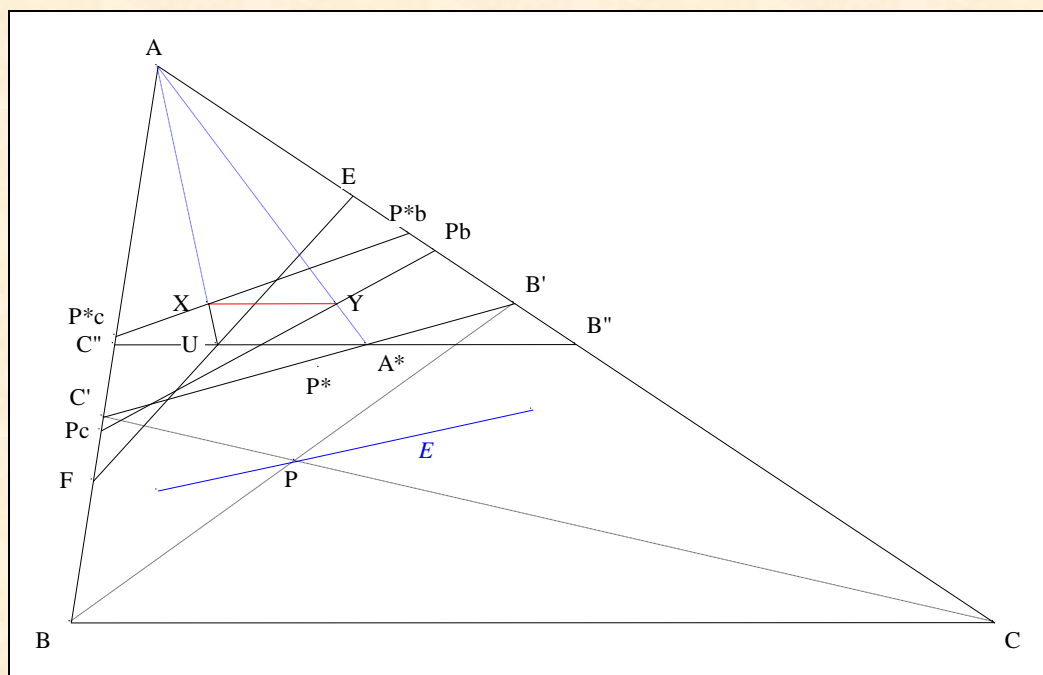
⁹ Two surprising perpendiculars, AoPS du 13/06/2013 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=538561>

C. LE PROBLÈME DE L'AUTEUR

1. Présentation

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	DEF	le triangle orthique de ABC,
	E	la droite d'Euler de ABC,
	P	un point de E ,
	$A'B'C'$	le triangle P-cévien de ABC,
	$A''B''C''$	le triangle médian de ABC,
	A^*, U	les points d'intersection resp. de $(B'C')$ et $(B''C'')$, (EF) et $(B''C'')$,
	$PaPbPc$	le triangle P-pédal de ABC,
	P^*	l'isogonal de P relativement à ABC,
	$P^*aP^*bP^*c$	le triangle P^* -pédal de ABC,
et	X, Y	les points d'intersection resp. de (P^*bP^*c) et (AU) , $(PbPc)$ et (AA^*) .

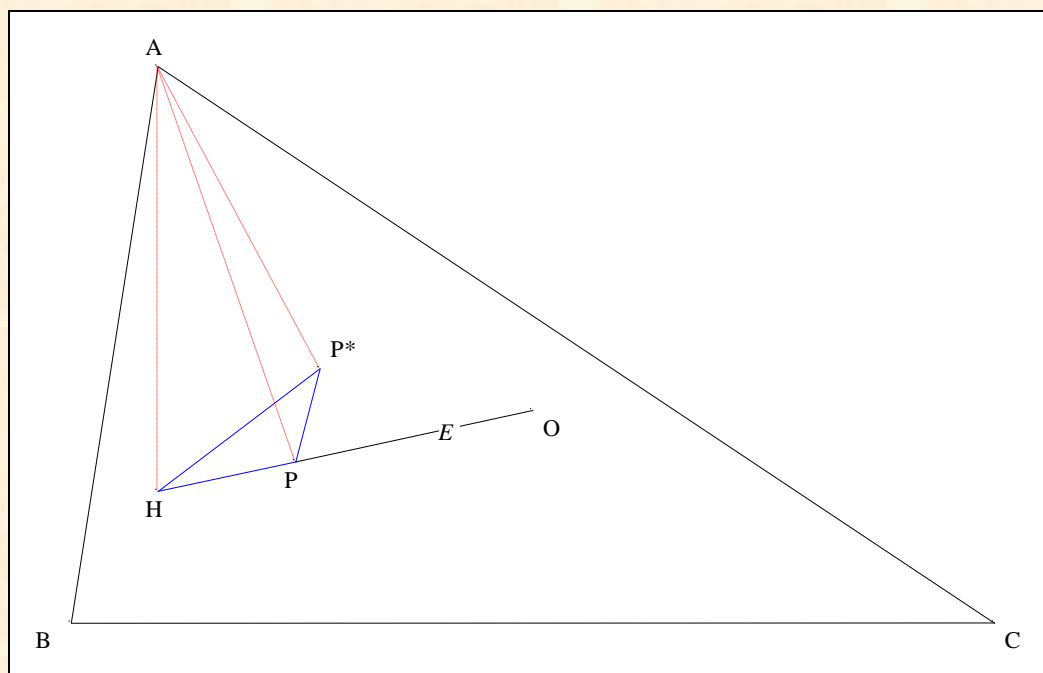
Donné : (XY) est parallèle à (BC) .¹⁰

¹⁰

Ayme J.-L., 20/12/2014 ; <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1034101>

2. Visualisation

L'ESPRIT DU PROBLÈME

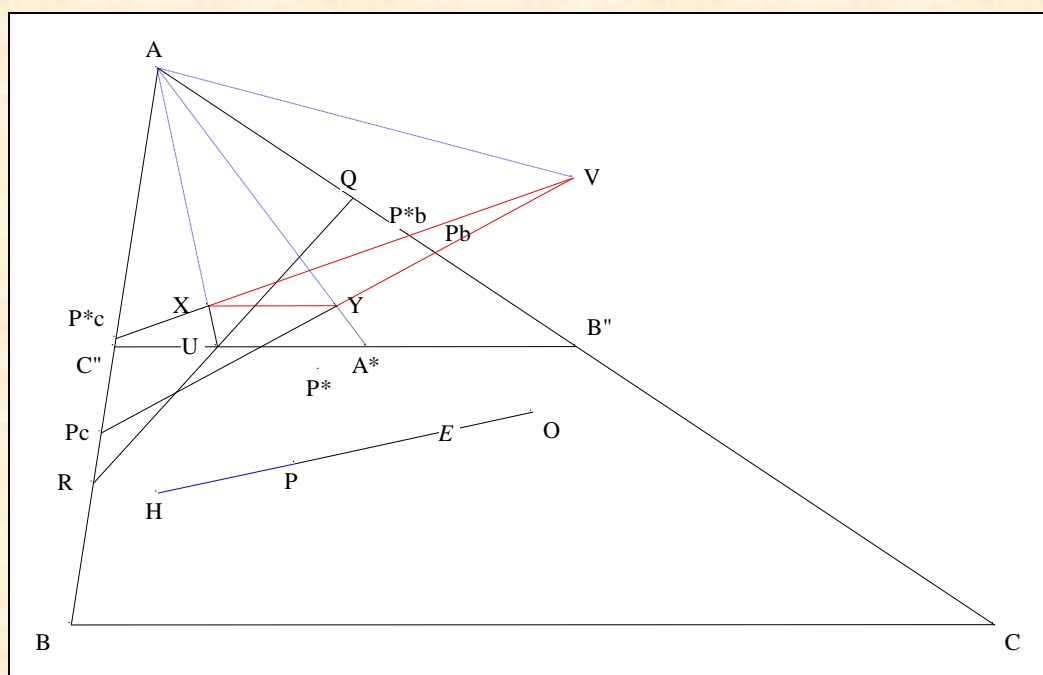


- Notons H l'orthocentre de ABC
et O le centre du cercle circonscrit à ABC .

- **Scolie :** H et O sont sur E .

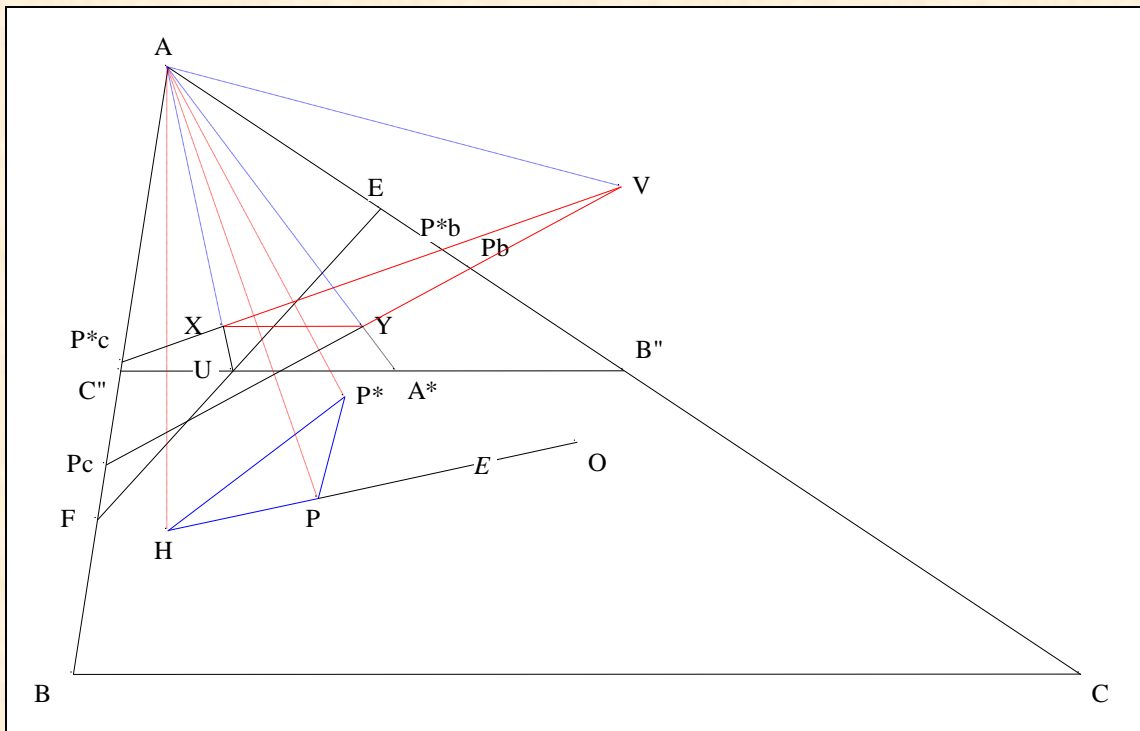
Commentaire : l'Esprit du problème réside dans le A-triangle HPP^*
i.e.
dans la figure déterminé par le triangle HPP^* et ses trois céviennes (AH) , (AP) et (AP^*)

L'ÂME DU PROBLÈME



- Notons V le point d'intersection de $(PbPc)$ et $(P*bP*c)$.

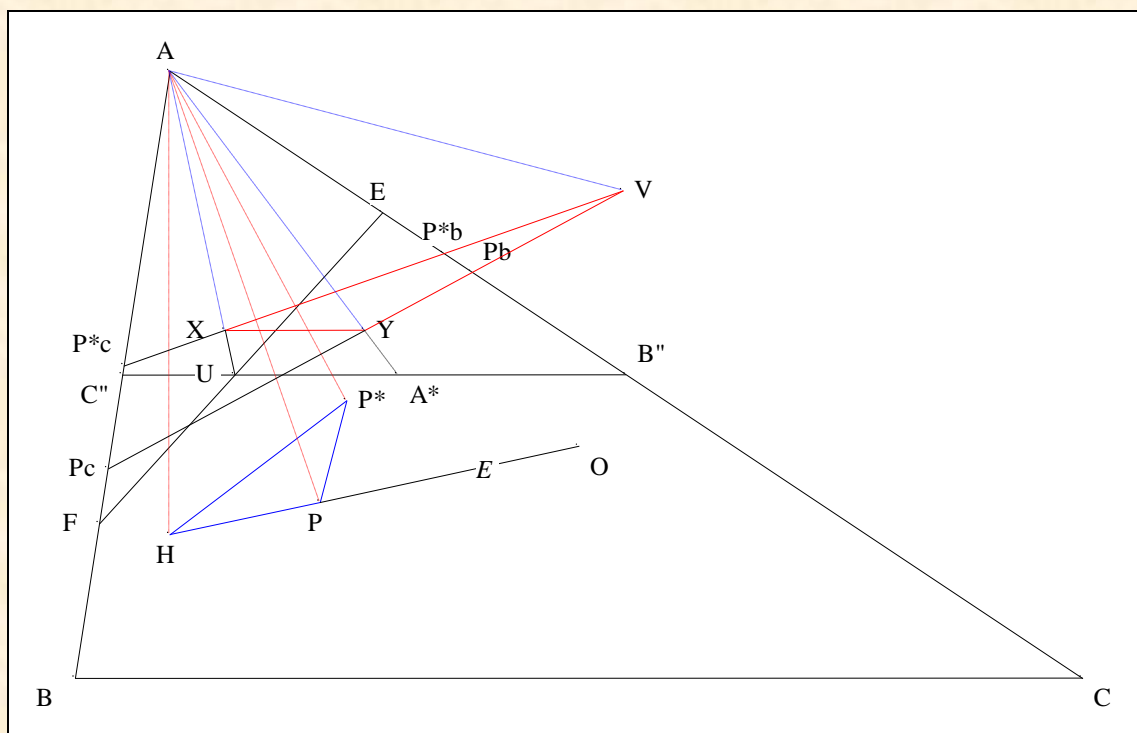
Commentaire : l'Âme du problème réside dans le A-triangle VYX
 i.e.
 dans la figure déterminé par le triangle VYX et ses trois céviennes (AV) , (AY) et (AX)

BALANCEMENT ¹¹

Commentaire : le balancement réside dans la considération des A-triangles HPP* et VYX.

¹¹ au sens biologique de dépendance organique

SÉPARATION

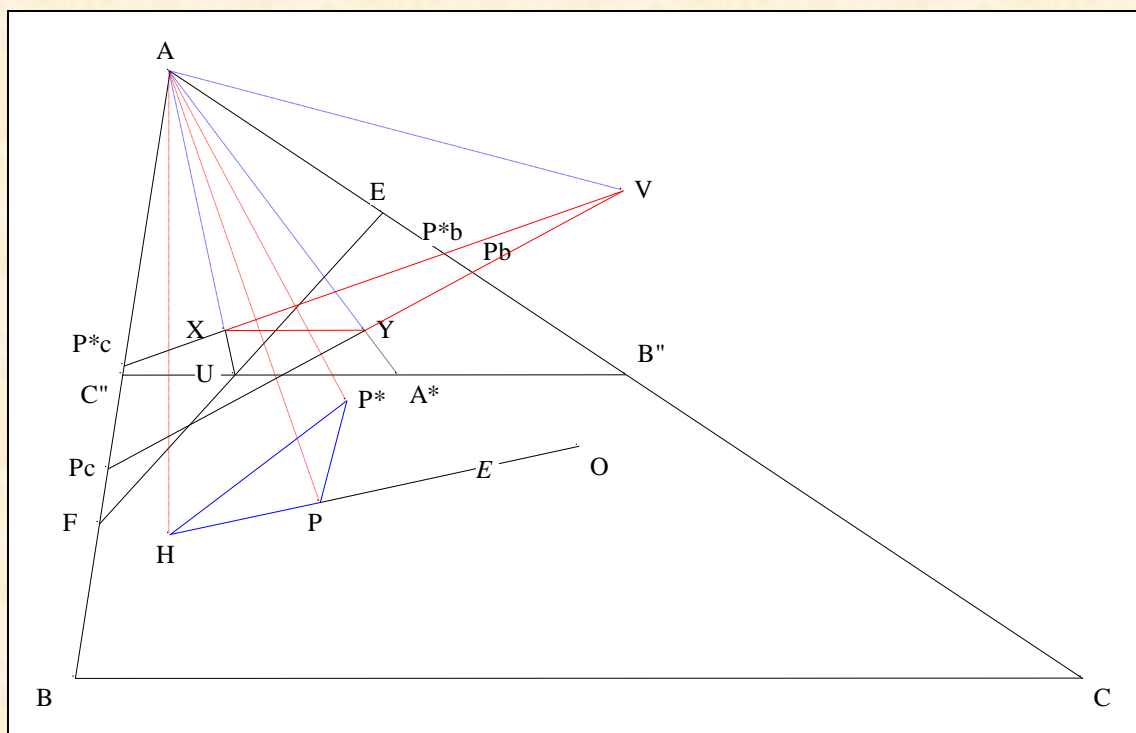


- Considérons le A-triangle VYX

- * d'après **D. Appendice 2**, $(AV) \perp (PP^*)$
- * d'après **B. 5.**, $(AY) \perp (P^*H)$
- * d'après **D. Appendice 3**, $(AX) \perp (HP)$
- * en conséquence, VYX est A-orthologique à HPP*.

- La relation "est orthologique à" étant symétrique, HPP* est orthologique à VYX.

RESBIS



- Considérons le A-triangle HPP*

*	d'après D. Appendice 1 ,	(AP*) \perp (VY)
		(AP) \perp (VX)
*	d'après Maxwell	(AH) \perp (YX) ou encore (XY) \perp (AH)
*	par définition,	(AH) \perp (BC)
*	d'après l'axiome IVa des perpendiculaires,	(XY) \parallel (BC).

- **Conclusion :** (XY) est parallèle à (BC).

Commentaire : HPP* et VXY étant bilogiques sont perspectifs. ¹²

Note historique : les triangles orthologiques ont été introduits par Jakob Steiner ¹³ en 1827.
La première solution de ce résultat est attribuée à Clerk Maxwell.

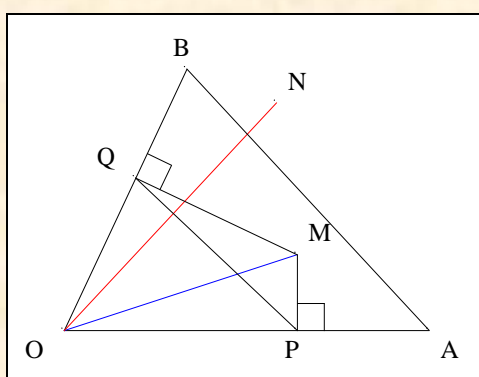
¹² Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, G.G.G. vol. 1, p. 1 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
¹³ Steiner J., Problème 54, *Journal de Crelle* vol. 2, p. 287 ;
http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no_cache/dms/load/toc/?IDDOC=238618

D. APPENDICE

1. Isogonale et perpendiculaire ¹⁴

VISION

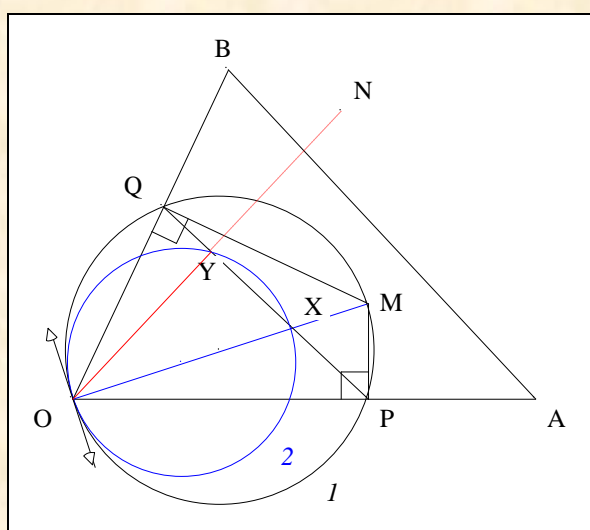
Figure :



Traits : OAB un triangle,
M un point,
P, Q les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur (OA), (OB)
et N un point.

Donné : (ON) est la O-isogonale de (OM) relativement à OAB
si, et seulement si,
(OA) est perpendiculaire à (PQ).

VISUALISATION NÉCESSAIRE

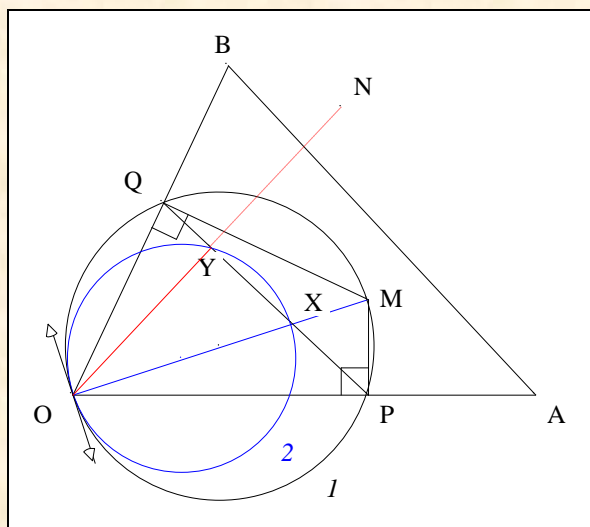


- Notons I le cercle de diamètre $[OM]$; il passe par P et Q ;
- X le point d'intersection de (PQ) et (OM) ,
- 2 le cercle de diamètre $[OX]$
- et Y le second point d'intersection de (PQ) avec 2 .

¹⁴ Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-

- Les centres de I et 2 étant alignés avec O , I et 2 sont tangents en O .
- D'après **D. Appendice 2**, (OY) est la O -isogonale de (OXM) relativement à OAB ; en conséquence, (OY) et (ON) sont confondues.
- D'après Thalès "Triangle inscritible dans un demi cercle", le triangle OXY est Y -rectangle.
- **Conclusion** : (ON) est perpendiculaire à (PQ) .

VISUALISATION SUFFISANTE



- Notons I le cercle de diamètre $[OM]$; il passe par P et Q ;
 X le point d'intersection de (PQ) et (OM) ,
 2 le cercle de diamètre $[OX]$; il passe par Y ;
 et Y le second point d'intersection de (PQ) et (ON) .
- Les centres de I et 2 étant alignés avec O , I et 2 sont tangents en O .
- **Conclusion** : d'après **D. Appendice 2**, (ON) est la O -isogonale de (OM) relativement à OAB .

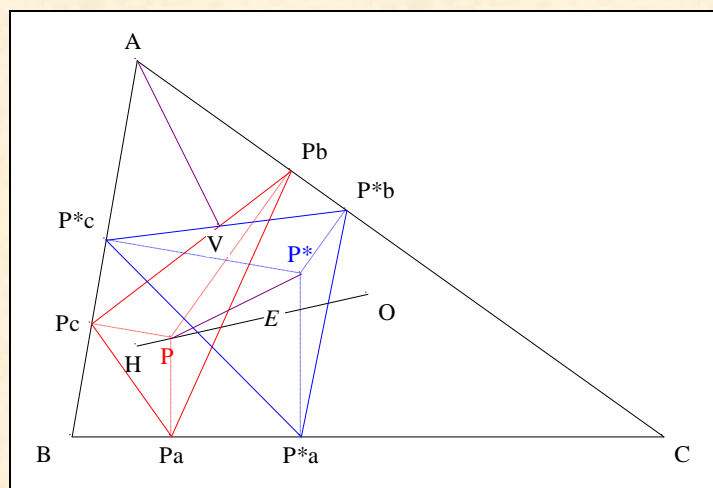
Note historique : ce résultat est attribué à l'historiographe Émile Vigarié par Nathan Altshiller-Court ¹⁵.

2. Une perpendiculaire à la droite (PP^*)

VISION

Figure :

¹⁵ Altshiller-Court N., *College Geometry*, Barnes & Noble, Richmond (1936) n° 625, p.305



Traits :	ABC	un triangle,
	H	l'orthocentre de ABC,
	E	la droite d'Euler de ABC,
	P	un point de E,
	PaPbPc	le triangle P-pédal de ABC,
	P*	l'isogonal de P relativement à ABC.
	P*aP*bP*c	le triangle P*-pédal de ABC,
et	V	le point d'intersection de (PbPc) et (P*bP*c).

Donné : (AV) est perpendiculaire à (PP*).

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur ¹⁶.

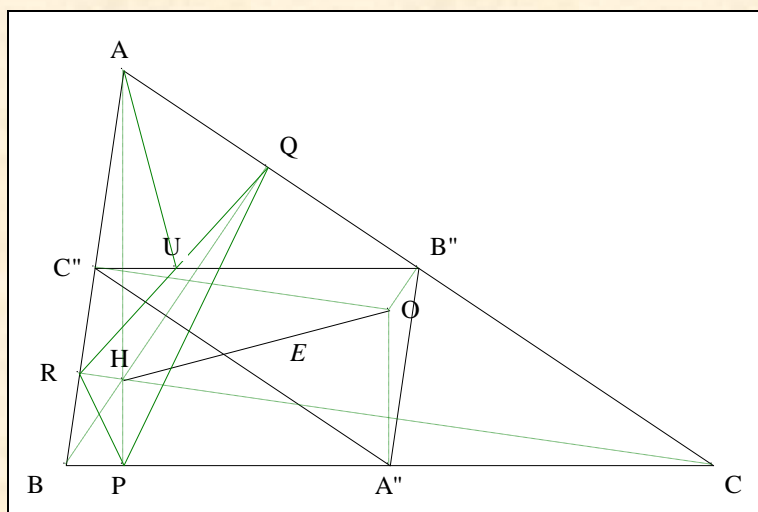
Note historique : c'est la généralisation du deuxième résultat de Heinrich Eduard Schroeter ¹⁷ datant de 1864.

3. Une perpendiculaire à la droite d'Euler

VISION

Figure :

¹⁶ Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. 2, p. 4-6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
¹⁷ Schroeter H. E., Question 710, *Nouvelles Annales de Mathématiques* 2e série 3 (1864) 442-443 ;
<http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0>



Traits : ABC un triangle,
 H l'orthocentre de ABC ,
 PQR le triangle orthique de ABC ,
 E la droite d'Euler de ABC ,
 $A''B''C''$ le triangle médian de ABC
 et U le point d'intersection de (QR) et $(B''C'')$.

Donné : (AU) est perpendiculaire à E .

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur ¹⁸.

Note historique : c'est le deuxième résultat de Heinrich Eduard Schroeter ¹⁹ datant de 1864.

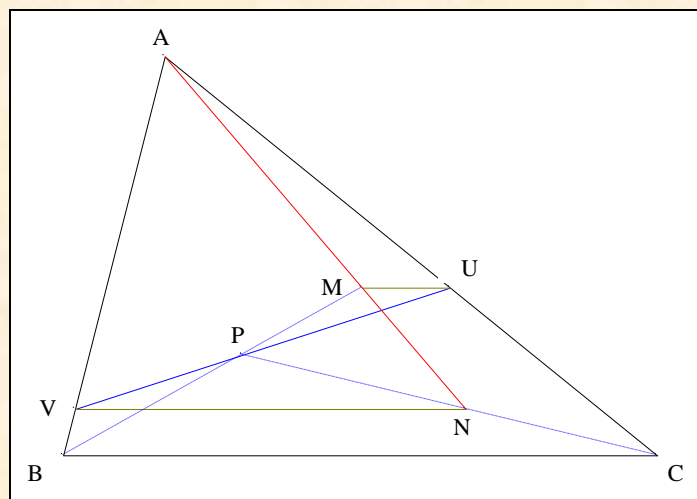
¹⁸ Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. 2, p. 4-6 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
¹⁹ Schroeter H. E., Question 710, *Nouvelles Annales de Mathématiques* 2e série 3 (1864) 442-443 ;
<http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0>

E. EXERCICES PÉRIPHÉRIQUES

1. Une équivalence ²⁰

VISION

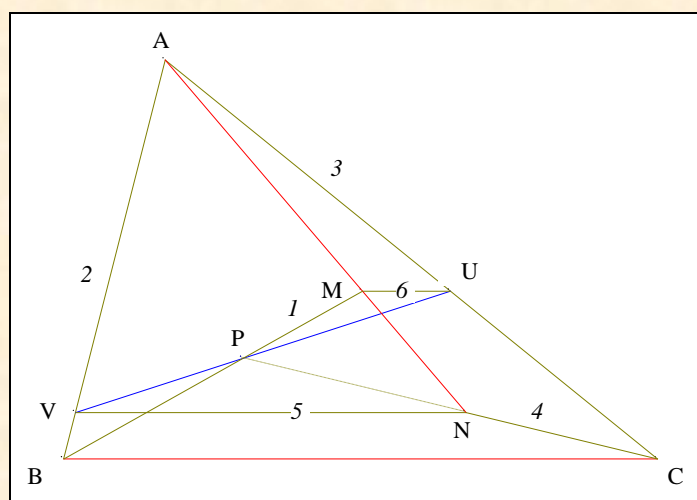
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 P un point,
 U, V deux points resp. de (AC), (AB),
 M le point d'intersection de la parallèle à (BC) issues de U avec (BP)
 et N le point d'intersection de la parallèle à (BC) issues de V avec (CP).

Donné : U, V et P sont alignés *si, et seulement si,* M, N et A sont alignés.

VISUALISATION NÉCESSAIRE

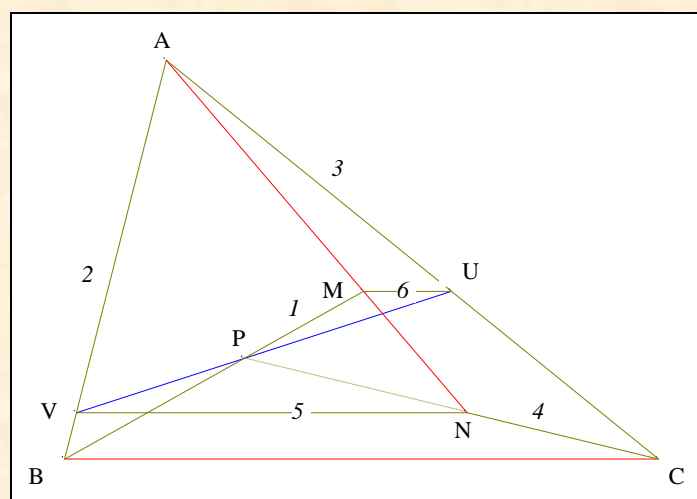


- U, V et P sont alignés.

²⁰ Ayme J.-L., Collinear with A, AoPS du 05/11/2013 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=561258>

- **Conclusion** : d'après Pappus "Un sommet est à l'infini"²¹
(PUV) étant la pappusienne de l'hexagone dégénéré MBACNVM dont une frontière est (BC),
M, N et A sont alignés.

VISUALISATION SUFFISANTE



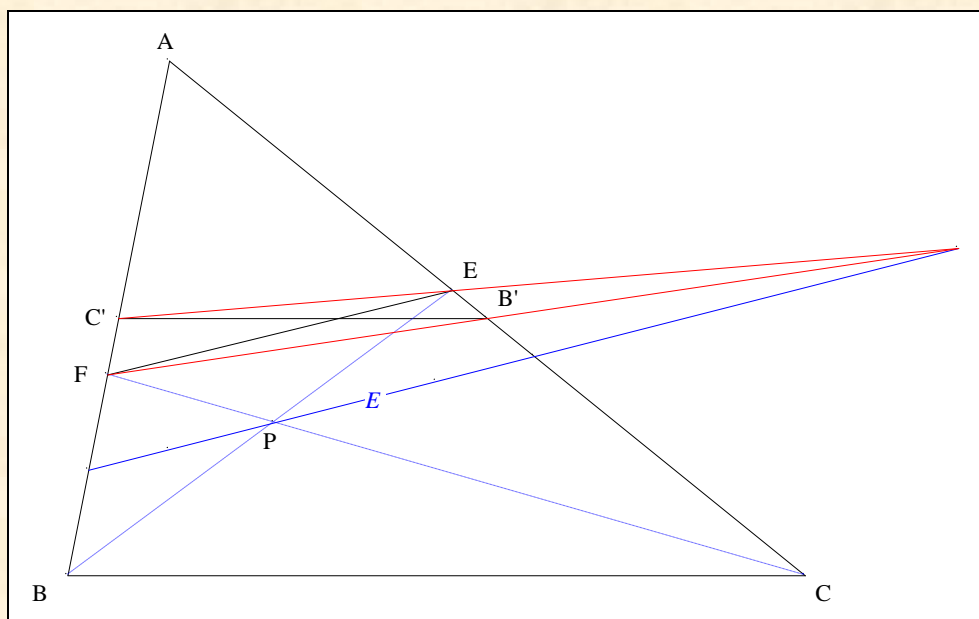
- M, N et A sont alignés.
- D'après Pappus "Un sommet est à l'infini"²²
(PVU) est la pappusienne de l'hexagone dégénéré MBACNVM de frontières (BC) et (MN).
- **Conclusion** : U, V et P sont alignés.

2. Intersection sur la droite d'Euler²³

VISION

Figure :

²¹ Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6, p. 17-19 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
²² Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6, p. 17-19 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
²³ Schroeter H. E., Question 710, *Nouvelles Annales de Mathématiques* 2-ème série 3 (1864) 442-443 ; <http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0>



Traits : ABC un triangle,
 E la droite d'Euler de ABC,
 P un point de E ,
 DEF le triangle P-cévien de ABC
 et $A'B'C'$ le triangle médian de ABC.

Donné : $(B'F)$, $(C'E)$ et E sont concourantes.

VISUALISATION

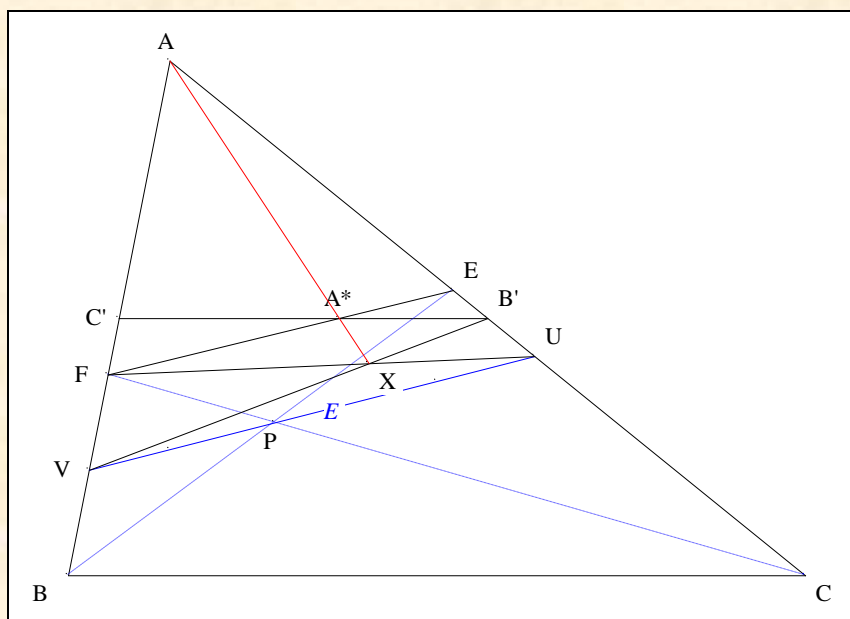
- **Conclusion :** d'après "Le premier résultat de Schroeter"²⁴, $(B'F)$, $(C'E)$ et E sont concourantes.

3. Un point sur la droite (AA^*) ²⁵

VISION

Figure :

²⁴ Ayme J.-L., Les deux points de Schroeter, G.G.G. vol. 2, p. 2-4 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>
²⁵

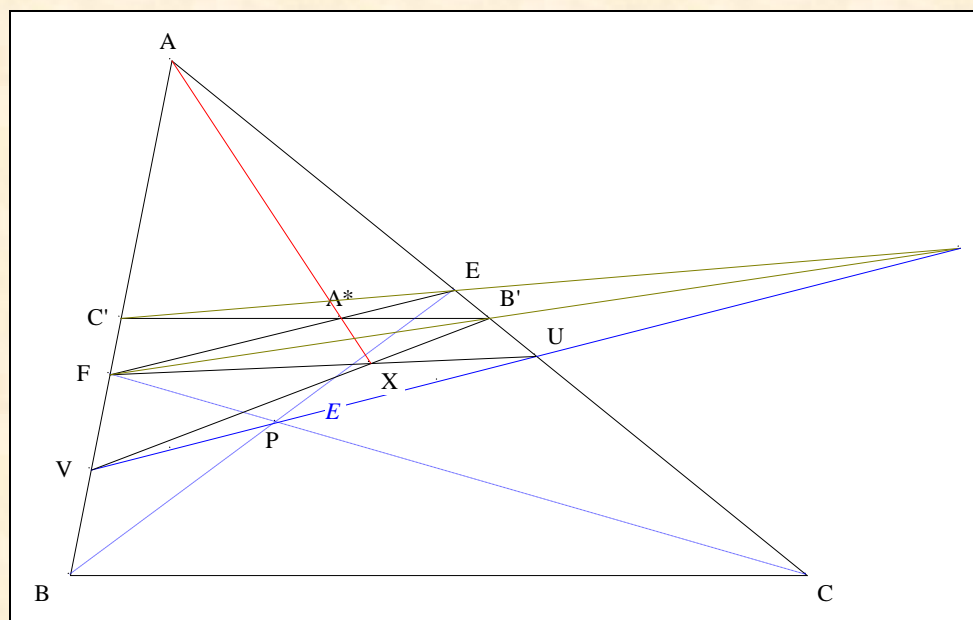


Traits :

ABC	un triangle,
E	la droite d'Euler de ABC,
U, V	les points d'intersection de E resp. avec (AC), (AB),
P	un point de E ,
DEF	le triangle P-cévien de ABC,
$A'B'C'$	le triangle médian de ABC
et A^*, X	les points d'intersection resp. de $(B'C')$ et (EF) , $(B'V)$ et (FU) .

Donné : A, A^* et X sont alignés.

VISUALISATION



- D'après E. 2., $(B'F)$, $(C'E)$ et E sont concourantes.
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" ²⁶

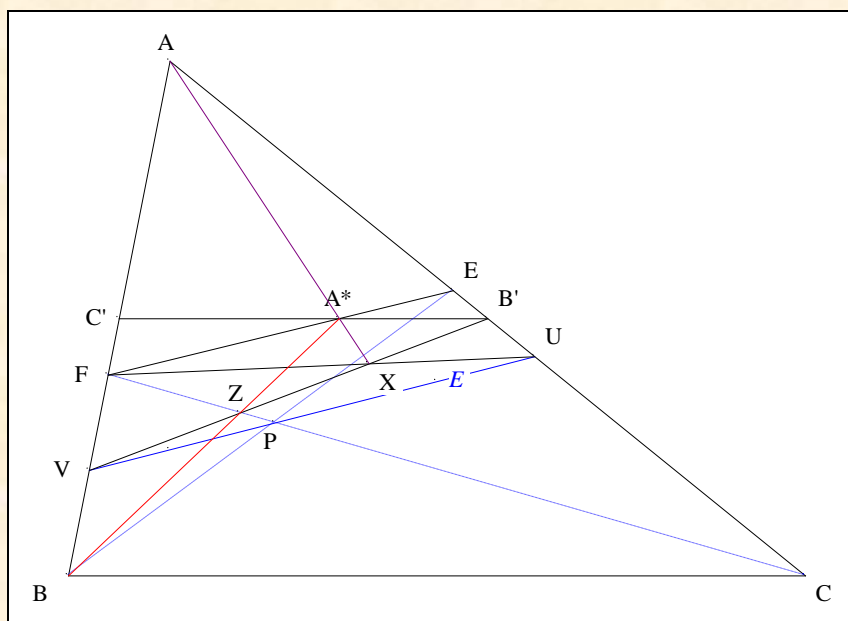
²⁶ Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6, p. 39-43 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

appliqué aux triangles perspectifs $B'C'V$ et FEU , A, A^* et X sont alignés.

4. Un alignement

VISION

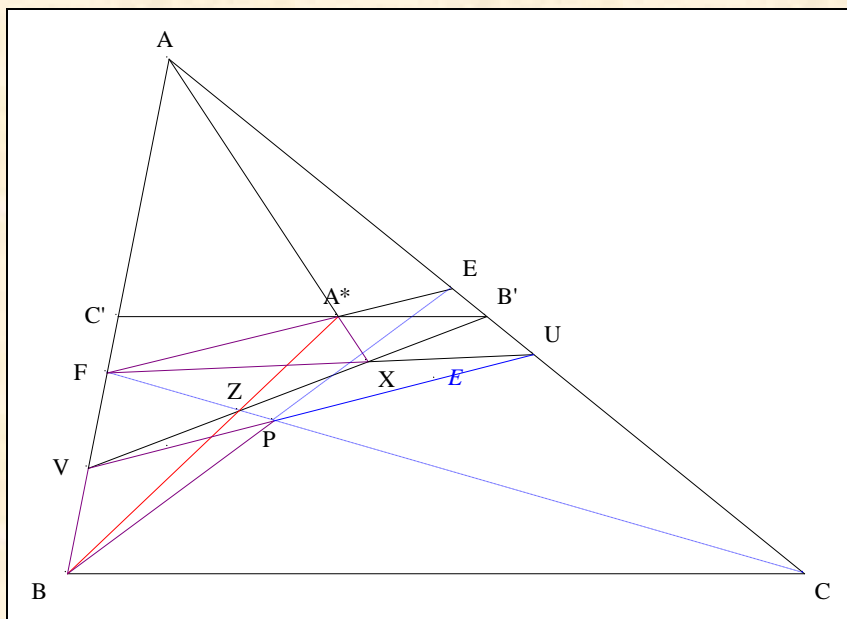
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 E la droite d'Euler de ABC ,
 U, V les points d'intersection de E resp. avec $(AC), (AB)$,
 P un point de E ,
 DEF le triangle P-cévien de ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle médian de ABC ,
 et A^*, X, Z les points d'intersection resp. de $(B'C')$ et (EF) , $(B'V)$ et (FU) , (CP) et $(B'V)$.

Donné : A^*, B et Z sont alignés.

VISUALISATION

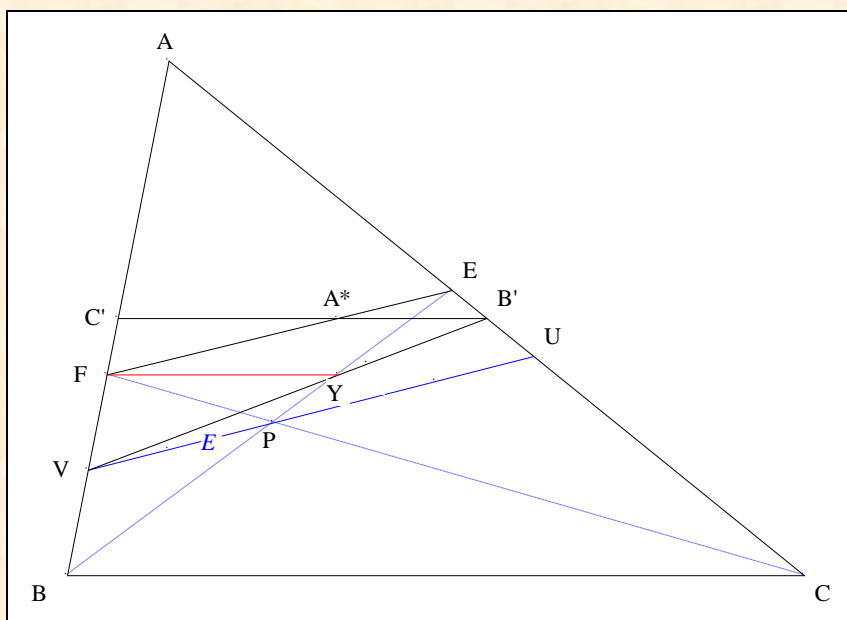


- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles"²⁷ appliqué aux triangles A^*FX et BPV d'axe (EAU) , A^*, B et Z sont alignés.

5. Deux parallèles²⁸

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 E la droite d'Euler de ABC ,

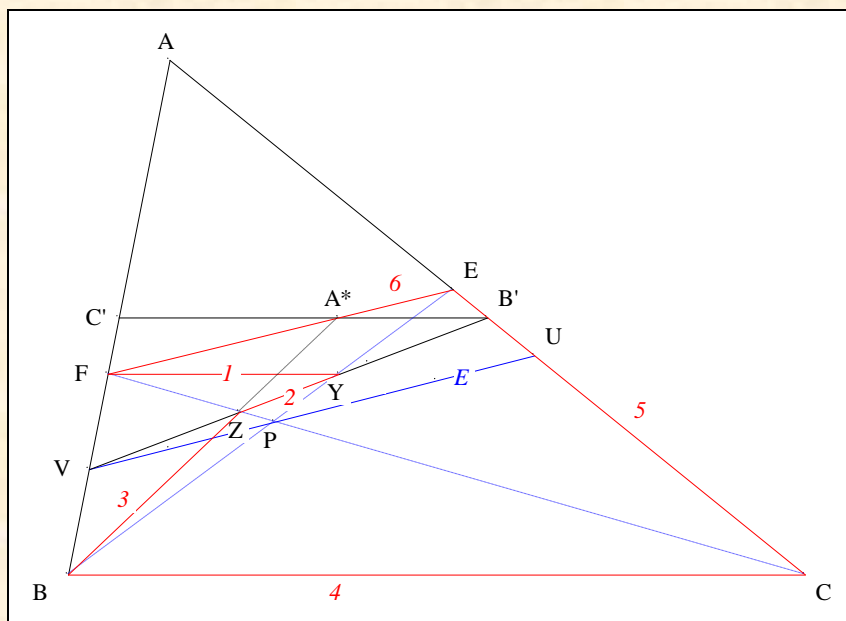
²⁷ Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6, p. 39-43 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

²⁸ Ayme J.-L., Two parallels, AoPS du 23/11/2013 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=563926>

U, V les points d'intersection de E resp. avec $(AC), (AB)$,
 P un point de E ,
 DEF le triangle P-cévien de ABC ,
 $A'B'C'$ le triangle médian de ABC
 et Y le point d'intersection resp. de (BP) et $(B'V)$.

Donné : (FY) est parallèle à (BC) .

VISUALISATION



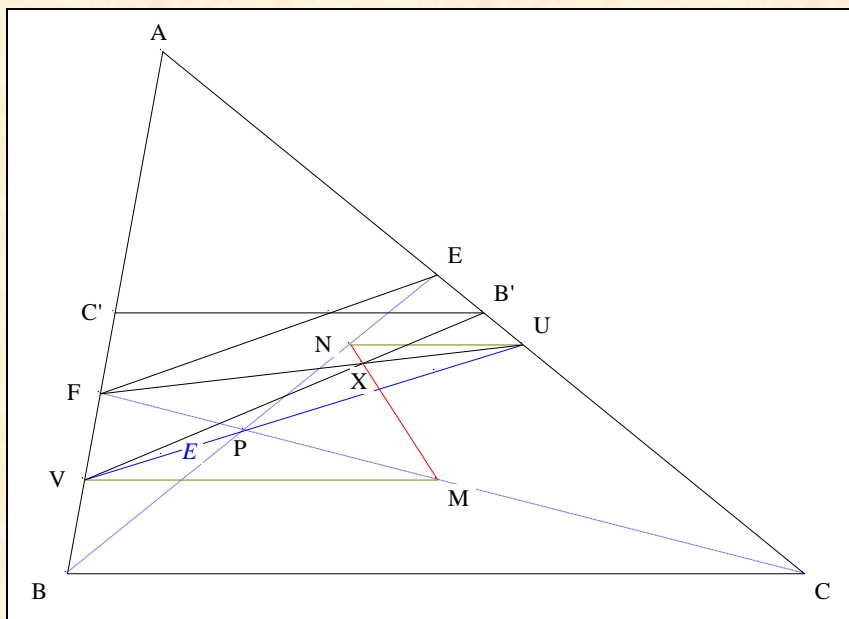
- Notons A^*, Z les points d'intersection resp. de $(B'C')$ et (EF) , (CP) et $(B'V)$.
- D'après **E. 8**, A^*, B et Z sont alignés.
- D'après Pappus "La proposition **139**"²⁹ appliqué à l'hexagone sectoriel $FYZBXEF$ de frontières (BP) et (CP) ,
 - (1) $(B'A^*)$ est la pascale
 - (2) $(B'A^*) \parallel (BC)$.
- **Conclusion :** (FY) est parallèle à (BC) .

6. Encore un alignement

VISION

Figure :

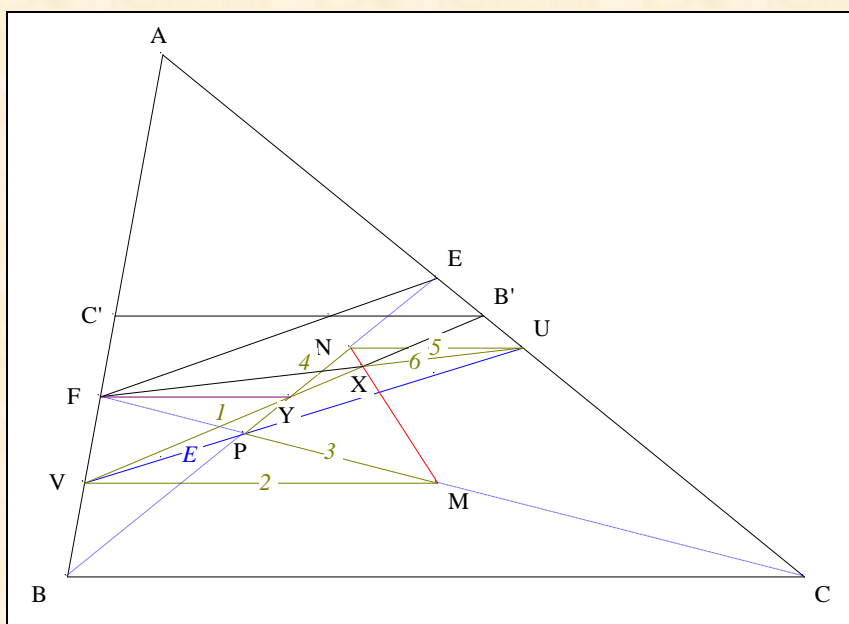
²⁹ Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6, p. 9-15 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>



- Traits :**
- | | |
|--------|---|
| ABC | un triangle, |
| E | la droite d'Euler de ABC, |
| U, V | les points d'intersection de E resp. avec (AC), (AB), |
| P | un point de E , |
| DEF | le triangle P-cévien de ABC, |
| A'B'C' | le triangle médian de ABC, |
| X | le point d'intersection de (B'V), (FU), |
| M | le point d'intersection de la parallèle à (BC) issues de U avec (BP) |
| et N | le point d'intersection de la parallèle à (BC) issues de V avec (CP). |

Donné : M, N et X sont alignés.

VISUALISATION



- D'après Pappus "La proposition 139"³⁰

³⁰

Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6, p. 9-15 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

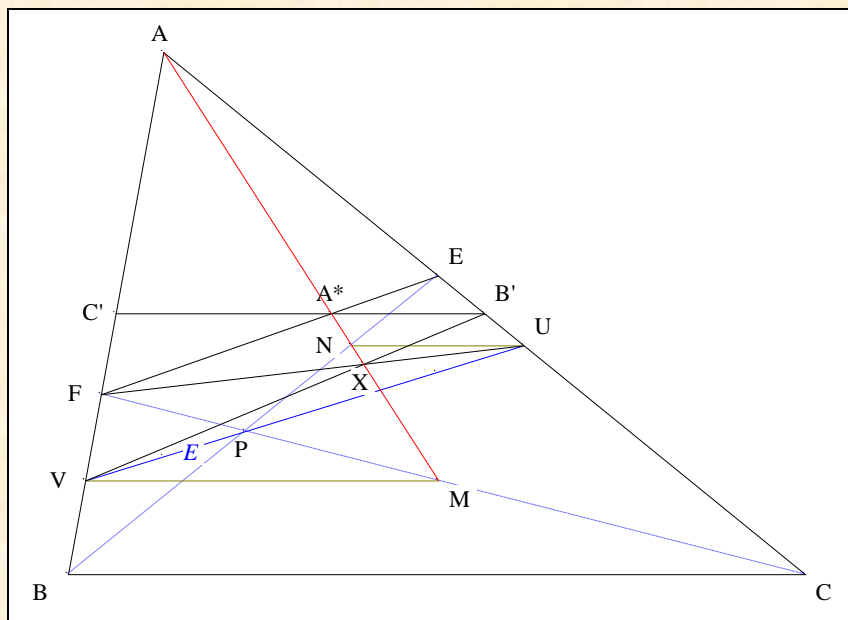
appliqué à l'hexagone sectoriel XVMPNUX
de frontières (UV) avec

(1) (FY) est la pascale

(2) (FY) // (BC).

- **Conclusion :** M, N et X sont alignés.

Scolie :



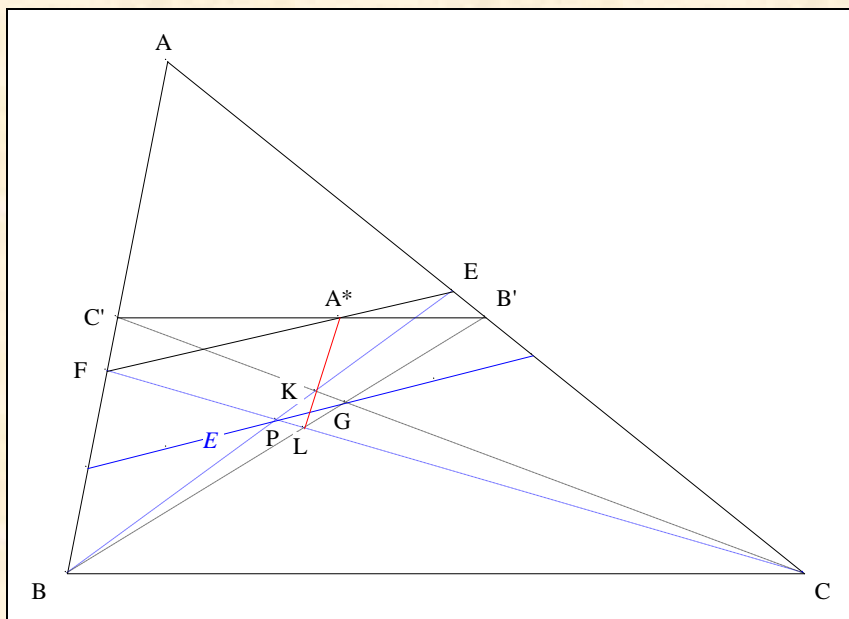
- Notons A^*
- D'après E. 3., A, A^* et X alignés.
- D'après E. 1., A, M et N alignés.
- D'après E. 6., M, N et X alignés.
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, A, A^*, M, N et X sont alignés.

7. Encore un alignement ³¹

VISION

Figure :

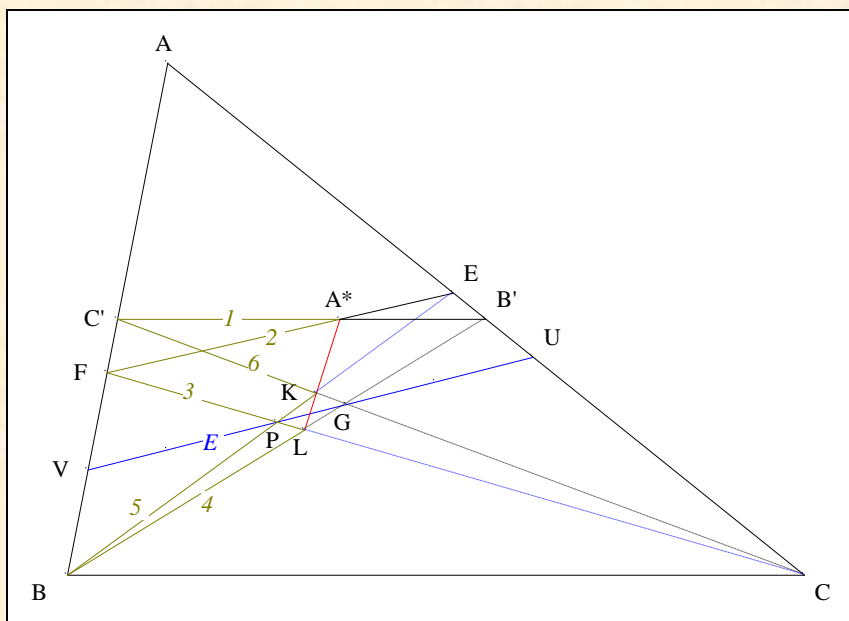
³¹ Ayme J.-L., Collinear, AoPS du 24/11/2013 ; <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=564019>



Traits : ABC un triangle,
 E la droite d'Euler de ABC,
 P un point de E ,
 DEF le triangle P-cévien de ABC,
 G le point médian de ABC,
 $A'B'C'$ le triangle médian de ABC,
 A^* le point d'intersection de $(B'C')$ et (EF) ,
 et K, L les points d'intersection resp. de (BE) et (CC') , (CF) et (BB') .

Donné : K, L et A^* sont alignés.

VISUALISATION



- **Conclusion :** d'après Pappus "La proposition 139"³² appliqué à l'hexagone sectoriel $C'A^*FLBK'$ de frontière (AB) avec $(B'EC)$ pour pascale,

³²

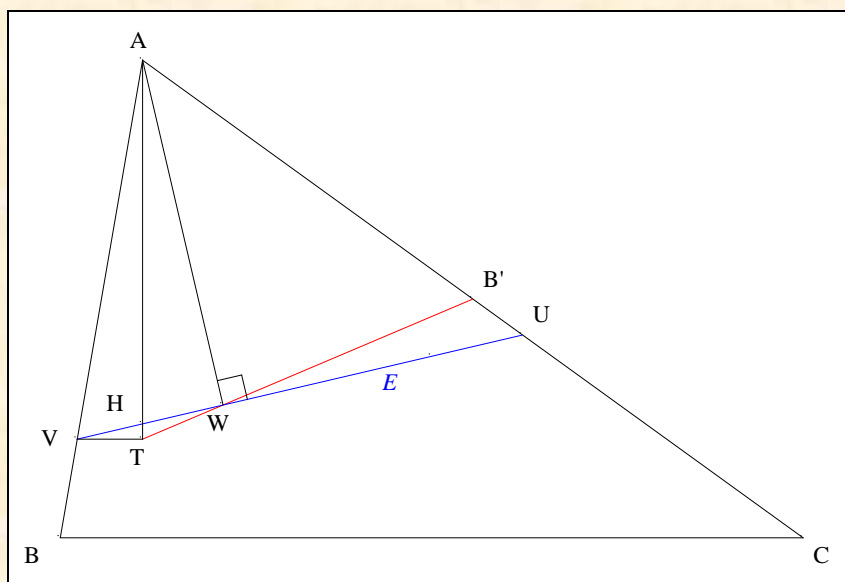
Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus, G.G.G. vol. 6, p. 9-15 ; <http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/>

K, L et A^* sont alignés.

8. Encore un alignement ³³

VISION

Figure :



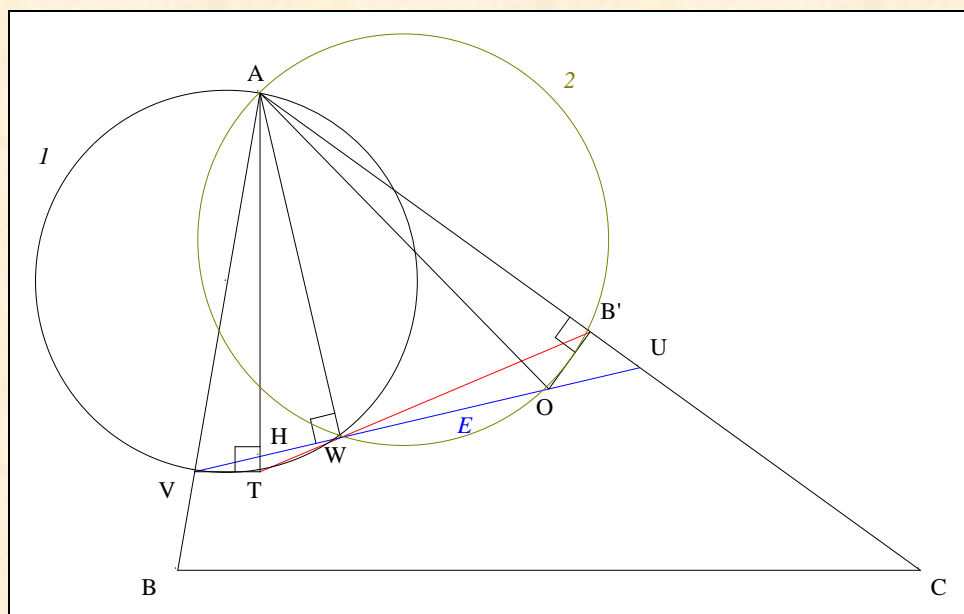
Traits :

ABC	un triangle,
B'	le milieu de $[AC]$,
E	la droite d'Euler de ABC,
U, V	les points d'intersection de E resp. avec (AC) , (AB) ,
W	le pied de la perpendiculaire à E issue de A,
H	l'orthocentre de ABC
et T	le point d'intersection de la parallèle à (BC) issue de V avec (AH) .

Donné : T, W et B' sont alignés.

VISUALISATION

³³ Ayme J.-L., With the Euler's line, AoPS du 10/06/2013 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=538213>



- Notons I et O le cercle de diamètre $[AV]$; il passe par T et W ;
le centre du cercle circonscrit à ABC .

- **Scolies :** (1) H et O sont sur E
(2) $(OB') \perp (AC)$

- Notons 2 le cercle de diamètre $[AO]$; il passe par B' et W .

- Une chasse angulaire :

- * d'après "Le théorème de l'angle inscrit", $\angle VWT = \angle VAT$
- * O et H étant isogonaux relativement à ABC , $\angle VAT = \angle OAC$
- * d'après "Le théorème de l'angle inscrit", $\angle OAC = \angle OWB'$
- * par transitivité de la relation $=$, $\angle VWT = \angle OWB'$.

- **Conclusion :** T , W et B' sont alignés.

F. AUTRES EXERCICES DE L'AUTEUR

1. Two nice parallels, AoPS du 07/06/2013 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=537674>

1. ABC a triangle
2. (E) the Euler line of ABC
3. Z the point of intersection of (E) and AC
4. P a point on (E)
5. $A'B'C'$ the median triangle of ABC
6. $A''B''C''$ the P-cevian triangle of ABC
7. U the point of intersection of $B'C'$ and $B''C''$
8. V the point of intersection of AU and PC

Prove that VZ is parallel to BC.

2. Concurrence on the Euler's line, AoPS du 22/06/2013 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=540027>

1. ABC a triangle
2. (E) the Euler's line of ABC
3. P a point on (E)
4. $A'B'C'$ the P-cevian triangle of ABC
5. $A''B''C''$ the median triangle of ABC
6. A^* the point of intersection of $B'C'$ and $B''C''$
7. U the point of intersection of CA^* and AA'

Prove that $C''U$ and BC meet on (E)

3. A parallel to a perspectrix, AoPS du 07/11/2013 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=561532>

1. ABC a triangle
2. H the orthocenter of ABC
3. DEF the orthic triangle of ABC
4. U, V the points of intersection of the Euler line of ABC with AC, AB
5. M, N the points of intersection the points of the parallels to BC through U, V with resp. BH, CH.

Prove : MN is parallel to the perspectrix of ABC and DEF.

4. Three collinear points, AoPS du 07/11/2013 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&p=3272411>

1. ABC a triangle
2. P a point on the Euler line of ABC
3. DEF the P-cevian triangle of ABC
4. $A'B'C'$ the median triangle of ABC
5. B^* , C^* the points of intersection of DF and $A'C'$, DE and $A'B'$
6. U, V the points of intersection of the Euler line of ABC with AC, AB
7. M, N the points of intersection of the parallels to BC through U, V with resp. CC^* , BB^*

Prove : M, N and P are collinear.

5. Orthocenter, AoPS du 22/08/2014 ;
<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=603376>

1. ABC a triangle
 2. H the orthocenter of ABC
 3. PQR, A'B'C' the orthic, medial triangle of ABC
 4. Eu the Euler's line of ABC
 5. U, Ha the points of intersection of B'C' wrt QR, Eu.
- Prove : U is the orthocenter of the triangle AHHa