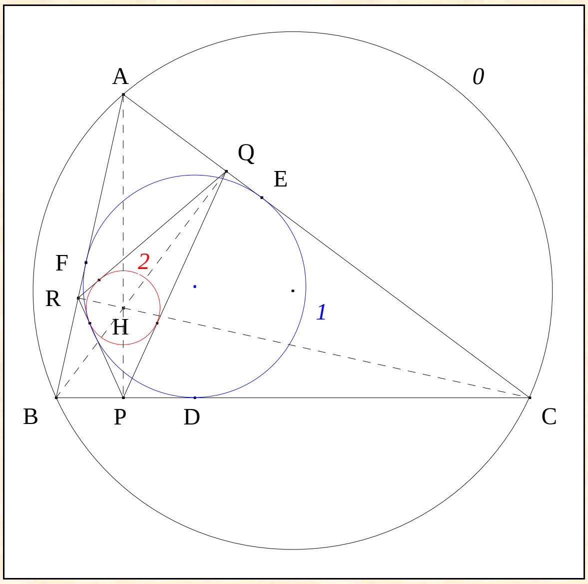
PROFONDEURS * DEPTHS

RELATIONS MÉTRIQUES

ET

TRIGONOMÉTRIQUES

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente une profonde investigation relative à la trigonométrie du triangle ayant pour but de résoudre un problème proposé par Luis González sur le site *Art of Problem Solving*…
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents a deep investigation on the trigonometry of the triangle in order to solve a problem proposed by Luis González on the *Art of Problem Solving* website…

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 15/03/2019 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

Commentaire : l'auteur fasciné par la Géométrie morphique a été attiré d'une façon irrésistible par un résultat de nature métrique. Comme subjugué par la trigonométrie, il dévie dans cet article de la voie qu'il a choisie et qu'à présent il profane sans en être conscient. En se frottant à cet autre monde, il y perd son état de grâce et comprend douloureusement qu'il n'y trouve pas son bonheur…
Grâce à son regard sincère sur la situation, il trouve la force spirituelle de se reprendre et de continuer sa voie initiale…

Sommaire

RÉCAPITULATION

Partie 1 un triangle

B. 1. $\sin A + \sin B + \sin C = 4.\cos A/2.\cos B/2.\cos C/2$
B. 2. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4.\sin A.\sin B.\sin C$
B. 3. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4.\sin A/2.\sin B/2.\sin C/2$
B. 4. $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4.\cos A.\cos B.\cos C$
B. 5. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2.(1 + \cos A.\cos B.\cos C)$
B. 6. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2.\cos A.\cos B.\cos C$
B. 7. $\sin A/2 + \sin B/2 + \sin C/2 = 1 + 4.\sin (\Pi /4 - A/4).\sin (\Pi /4 - B/4).\sin (\Pi /4 - C/4)$
B. 8. $\cos A - \cos B - \cos C = 1 - 4.\sin A/2.\cos B/2.\cos C/2$
B. 9. $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4.\cos C.\sin A.\sin B$
B. 10. $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2.\cos C.\sin A.\sin B$

C. 1.	$a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2.R$	$\sin A + \sin B + \sin C = R/p$
C. 2.	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$	
C. 3.	$2.S = bc.\sin A = ca.\sin B = ab.\sin C$	$S = abc/4R$
		$S = 2.R^2.\sin A.\sin B.\sin C$
C. 4.	$p = 4.R.\cos A/2.\cos B/2.\cos C/2$	
C. 5.	$S = p.r$	$S = p.r = 4.R.r.\cos A/2.\cos B/2.\cos C/2$
		$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + r/R$
C. 6.	$4.\sin A/2.\sin B/2.\sin C/2 = r/R$	

Partie 2 le triangle orthique

A. 1. $AH = 2.R.\cos A = a.\cot an\ A$, $BH = 2.R.\cos B = b.\cot an\ B$, $CH = 2.R.\cos C = c.\cot an\ C$
A. 2. $AH + BH + CH = 2.(R + r)$; $2.(R + r)]^2 - 4R^2.(1 - r_0/R) = 8R^2.(\Sigma \cos B.\cos C)$
A. 3. $HP = 2.R.\cos B.\cos C$, $HQ = 2.R.\cos C.\cos A$, $HR = 2.R.\cos A.\cos B$
A. 4. $AP = 2.R.\sin B.\sin C$, $AQ = 2.R.\sin C.\sin A$, $AR = 2.R.\sin A.\sin B$
$2.R.(AR + AP + AQ) = ab + bc + ca$
A. 5. $QR = R.\sin 2A$, $RP = R.\sin 2B$, $PQ = R.\sin 2C$
A. 6. $p_o = 2.R.\sin A.\sin B.\sin C$
A. 7. $r_0 = 2.R.\cos A.\cos B.\cos C$; $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - r_0/R$

Partie 3 Problème **1** : $AP + AQ + AR = 2.R + 4.r + r_0 + r^2/R$

Problème **2** : $IX + IY + IZ = r.(R + r)/R$

Problème **3** : $IX + IY + IZ = r + r_1$; $r_2 = 2r.\sin A/2.\sin B/2.\sin C/2.$

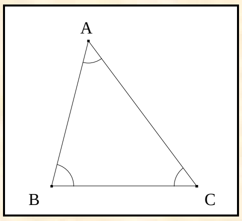
PARTIE 1

PROFONDEURS

MÉTRIQUES ET TRIGONOMÉTRIQUES

A. LA LOI 180

1. Un point d'histoire



Euclide, *Eléments* I, 32

RAOUL, de Liège

RAIMBAUD, de Cologne

XIe siècle

L'histoire de la Géométrie nous rappelle qu'une discussion au sujet d'un *Commentaire* de Boèce concernant le fait que "la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à deux droits" [2], a "beaucoup tourmenté les anciens" et relate, vers 1021, une correspondance [3] mémorable entre un jeune maître aux écoles de Liège, Radufus i.e. Raoul et un écolâtre [4] de Cologne, Ragimboldus i.e. Raimbaud. Huit lettres seront échangées entre ces deux protagonistes au cours de ce tournoi scientifique. Pour Raoul, il s'agissait de gagner en autorité suite à la demande qu'il avait faite à Raimbaud, de répondre à une question que celui-ci lui poserait. Raimbaud lui demanda alors de préciser le passage Boèce cité ci-avant. Les lettres étaient communiquées aux clercs de Cologne et de Liège, mais aussi à l'évêque d'Utrecht, Adelbolt, le disciple de Gerbert. Pour Raimbaud, il s'agissait aussi d'éclaircir la signification du mot "intérieur" plutôt que de procéder à une démonstration de cette proposition car si un triangle a des angles intérieurs où sont ceux qui sont à l'extérieur ?

Prouver la proposition, Raimbaud aurait eu cette proposition à partir d'un recueil donnant de simples résultats sans démonstration ou par de textes géométriques provenant des Romains que l'on pouvait trouver en Italie et qui apparaissaient pour Raimbaud comme une suite d'énigmes indéchiffrables. Rappelons qu'un ancien berger, l'écolâtre Gerbert, le futur pape Sylvestre II, avait écrit une cinquante d'années avant ce concours un recueil de Géométrie qui contenait la preuve que les deux belligérants recherchait. Ils commencèrent par s'envoyer de la poudre aux yeux, et Raimbaud se heurta sur le fait que si un triangle a des angles intérieurs où sont ceux qui sont à l'extérieur ? Ils en parlèrent dans leur entourage et ne reçurent aucune réponse. Aucun ne pouvait mettre la main sur le premier livre d'Euclide et Raimbaud finit un jour à Chartres avec le célèbre évêque Fulbert qu'intérieur était synonyme d'aigu et extérieur d'obtus mais ils n'étaient pas d'accord sur les raisons de cette synonymie. De ce point de vue il concluait qu'il était impossible de prouver n'importe quoi. Il aurait eu même des problèmes s'il avait eu la définition correcte. Aucun des deux n'avait la moindre idée d'une pure démonstration géométrique. Raoul démontra la proposition dans le cas d'un triangle isocèle en traçant les diagonales d'un carré. Mais il éluda le cas général et accepta par intuition la proposition ou par expérience en découpant les angles et en les ajoutant ce qui ne pouvait pas satisfaire un géomètre qui ne peut esquiver une démonstration

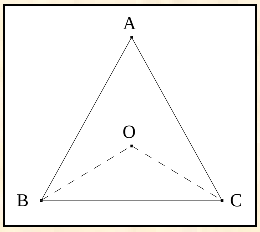
Interprétation de Raimbaud : quand on parle d'un triangle sans épithète, ce doit être un triangle équilatéral comme dans la géométrie de Boèce ; pour un tel triangle l'angle extérieur doit être l'angle obtus ayant son sommet au centre O et sous-tendu par l'un de ses côtés (de 120°), est égal à la somme des angles ABC, ACB du triangle (chacun de 60°)

---

[2] Euclide, *Éléments* **I**, 32. D'après Geminus, un auteur grec du I-er siècle av. J.-C., la première démonstration de ce théorème par les anciens grecs, comprenait trois cas: le triangle équilatéral, puis isocèle, puis scalène

[3] Une correspondance d'écolâtres du XIe siècle, *Comtes rendus de l'Académie des Inscriptions et Belles-lettres* (1897). Abbé Clerval, *Les Ecoles de Chartres au moyen âge*

[4] Au Moyen-âge, clerc ou moine chargé d'une école rattachée à une cathédrale ou une abbaye



Raimbaud voulut imposer cette interprétation sur celle de Raoul qui disait qu'intérieur devait s'appliquer aux angles du triangles qui sont effectivement à l'intérieur de celui-ci tandis qu'extérieur correspondrait à un angle considéré sur la surface d'un solide (un cube). Francon rejettera le point de vue de Raimbaud en disant qu'extérieur signifie un angle dont un côté est extérieur au triangle; pour cela il trace ce côté à partir d'un sommet dans une direction quelconque; il n'a donc pas deviné le sens d'angle formé par un côté du triangle avec le prolongement de l'autre; il n'a pas la clef que l'angle extérieur est égal la somme des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents

Quant à la proposition de départ, il faut reconnaître que Raoul s'efforça de la démontrer : il le fit pour le triangle rectangle isocèle...

2. La loi 180

En géométrie euclidienne, la somme des angles de tout triangle est égale à l'angle plat, soit 180 degrés.
Ce résultat connu et démontré par Euclide d'Alexandrie dans ses *Éléments* est équivalent à son cinquième postulat :

Par un point donné, on peut mener une et une seule parallèle à une droite donnée.

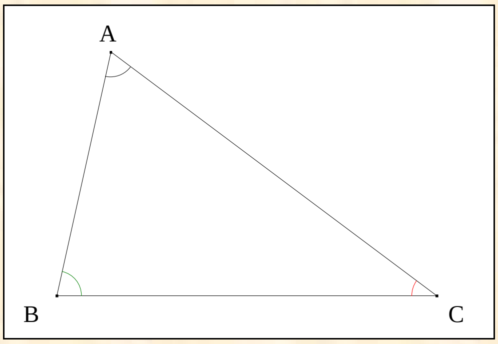
Ainsi, la somme des angles étant un invariant des triangles, permet de résoudre de nombreux problèmes élémentaires de résolution d'un triangle.

B. RELATIONS ANGULAIRES

Commentaire : Leonhard Euler (1707-1783) a été le premier à faire d'un symbole un double usage en désignant par A aussi bien le sommet que l'angle attaché à celui-ci dans un triangle ABC.
Les angles géométriques A, B, C d'un triangle ABC sont trois angles positifs, soumis à la seule restriction que leur somme vérifie "la loi 180".

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle.

1. La somme sin A + sin B + sin C

- Une chasse trigonométrique :

  * par somme-produit [5] et duplication,

  sin A + sin B + sin C = 2.sin (A+B)/2.cos (A-B)/2 + 2.sin C/2.cos C/2

  * par "la loi 180", = 2.cos C/2.cos (A-B)/2 + 2.cos (A+B)/2.cos C/2

  * par factorisation, = 2.cos C/2.[cos (A-B)/2 + cos (A+B)/2]

  * par somme-produit, = 4.cos C/2.cos A/2.cos B/2.

- **Conclusion :** par transitivité de =,

  sin A + sin B + sin C = 4.cos A/2.cos B/2.cos C/2.

2. La somme sin 2A + sin 2B + sin 2C

- **Scolie :** (Π – 2.A) + (Π – 2.B) + (Π – 2.C) = Π.

[5] Formules de Thomas Simpson (20/08/1719-14/05/1761) qu'il ne faut pa confondre avec Robert Simson (14/10/1687 –01/10 1768)

- Une chasse trigonométrique :

  * d'après **B. 1.**, $\sin A + \sin B + \sin C = 4.\cos A/2.\cos B/2.\cos C/2$

  * par substitution,

  $\sin(\Pi - 2.A) + \sin(\Pi - 2.B) + \sin(\Pi - 2.C) = 4.\cos(\Pi/2 - A).\cos(\Pi/2 - B).\cos(\Pi/2 - C)$.

- **Conclusion :** par les formules des angles associés,

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4.\sin A.\sin B.\sin C.$$

3. La somme cos A + cos B + cos C

- Une chasse trigonométrique :

  * par somme-produit [6] et "la loi 180",

  $\cos A + \cos B + \cos C = 2.\cos(A+B)/2.\cos(A-B)/2 - \cos(A+B)$

  * par duplication, $= 2.\cos(A+B)/2.\cos(A-B)/2 - [2.\cos^2(A+B)/2 - 1]$

  * par réarrangement et factorisation, $= 1 + 2.\cos(A+B)/2.[\cos(A-B)/2 - \cos(A+B)/2]$

  * par "la loi 180" et somme-produit, $= 1 + 2.\sin C/2.[2.\sin A/2.\sin -B/2]$

  * par "Arcs associés", $= 1 + 4.\sin A/2.\sin B/2.\sin C/2$.

- **Conclusion :** par transitivité de =,

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4.\sin A/2.\sin B/2.\sin C/2.$$

4. La somme cos 2A + cos 2B + cos 2C

- **Scolie :** $(\Pi - 2.A) + (\Pi - 2.B) + (\Pi - 2.C) = \Pi$.

- Une chasse trigonométrique :

  * d'après **B. 3.**, $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4.\sin A/2.\sin B/2.\sin C/2$.

  * par substitution,

  $\cos(\Pi - 2.A) + \cos(\Pi - 2.B) + \cos(\Pi - 2.C) = 1 + 4.\sin(\Pi/2 - A).\sin(\Pi/2 - B).\sin(\Pi/2 - C)$

- **Conclusion :** par les formulas des angles associés et transposition,

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4.\cos A.\cos B.\cos C.$$

5. La somme sin² A + sin² B + sin² C

[6] Formules de Simpson

- Par linéarisation [7], $2.\sin^2 A = 1 - \cos 2A$, $2.\sin^2 B = 1 - \cos 2B$, $2.\sin^2 C = 1 - \cos 2C$.
- Une chasse trigonométrique :

  * par multiplication par 2,

  $2.\sin^2 A + 2.\sin^2 B + 2.\sin^2 C = (1 - \cos 2A) + (1 - \cos 2B) + (1 - \cos 2C)$

  * par développement, $= 3 - (\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)$

  * d'après **B. 4.**, $= 3 - (-1 - 4.\cos A.\cos B.\cos C)$.

- **Conclusion :** $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2.(1 + \cos A.\cos B.\cos C)$.

6. La somme cos² A + cos² B + cos² C

- Par linéarisation [8], $2.\cos^2 A = 1 + \cos 2A$, $2.\cos^2 B = 1 + \cos 2B$, $2.\cos^2 C = 1 + \cos 2C$.
- Une chasse trigonométrique :

  * par multiplication par 2,

  $2.\cos^2 A + 2.\cos^2 B + 2.\cos^2 C = (1 + \cos 2A) + (1 + \cos 2B) + (1 + \cos 2C)$

  * par développement,

  $= 3 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$

  * d'après **B. 4.**, $= 3 + (-1 - 4.\cos A.\cos B.\cos C)$.

- **Conclusion :** par transitivité de =,

  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2.\cos A.\cos B.\cos C$

7. La somme sin A/2 + sin B/2 + sin C/2

- **Scolie :** $(\Pi/2 - A/2) + (\Pi/2 - B/2) + (\Pi/2 - C/2) = \Pi$.
- Une chasse trigonométrique :

  * d'après **B. 3.**, $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4.\sin A/2.\sin B/2.\sin C/2$.

  * par substitution,

$\cos(\Pi/2 - A/2) + \cos(\Pi/2 - B/2) + \cos(\Pi/2 - C/2) = 1 + 4.\sin(\Pi/4 - A/4).\sin(\Pi/4 - B/4).\sin(\Pi/4 - C/4)$

- **Conclusion :** par les formulas des angles associés et transposition,

  $\sin A/2 + \cos B/2 + \cos C/2 = 1 + 4.\sin(\Pi/4 - A/4).\sin(\Pi/4 - B/4).\sin(\Pi/4 - C/4)$.

[7] Formules de Lazare Carnot (13/05/1753 – 02/08/1823)
[8] Formules de Lazare Carnot (13/05/1753 – 02/08/1823)

8. La somme cos A - cos B - cos C

- **Scolie :** $(-A) + (\Pi - B) + (\Pi - C) = \Pi$.
- Une chasse trigonométrique :

  * d'après **B. 3.**, $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4.\sin A/2.\sin B/2.\sin C/2$.

  * par substitution,

$$\cos(-A) + \cos(\Pi - B) + \cos(\Pi - C) = 1 + 4.\sin(-A/2).\sin(\Pi - B)/2.\sin(\Pi - C/2)$$

- **Conclusion :** par les formulas des angles associés,

$$\cos A - \cos B - \cos C = 1 - 4.\sin A/2.\cos B/2.\cos C/2$$

9. La somme cos 2A + cos 2B - cos 2C

- **Scolie :** $(\Pi - 2.A) + (\Pi - 2.B) + (\Pi - 2.C) = \Pi$.
- Une chasse trigonométrique :

  * d'après **B. 8.**, $\cos A - \cos B - \cos C = 1 - 4.\sin A/2.\sin B/2.\sin C/2$

  * par substitution,

$$\cos(\Pi - 2.A) - \cos(\Pi - 2.B) - \cos(\Pi - 2.C) = 1 - 4.\sin(\Pi - 2.A)/2.\cos(\Pi - 2.B)/2.\cos(\Pi - 2.C)/2$$

- **Conclusion :** par les formulas des angles associés,

$$-\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4.\cos A.\sin B.\sin C$$

Scolies : vision triangulaire

$$\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4.\cos B.\sin C.\sin A$$

$$\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4.\cos C.\sin A.\sin B.$$

10. La somme sin² A + sin² B - sin² C

- Une chasse trigonométrique :

  * par duplication, $2.(\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C) = (1 - \cos 2A) + (1 - \cos 2B) - (1 - \cos 2C)$

  * par développement, $= 1 - (\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C)$

  * d'après **B. 9.**, $= 1 - (1 - 4.\cos C.\sin A.\sin B)$

- **Conclusion :** $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2.\cos C.\sin A.\sin B.$

Scolies : vision triangulaire

$$\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = 2.\cos A.\sin B.\sin C$$

$$\sin^2 C + \sin^2 A - \sin^2 B = 2.\cos B.\sin C.\sin A.$$

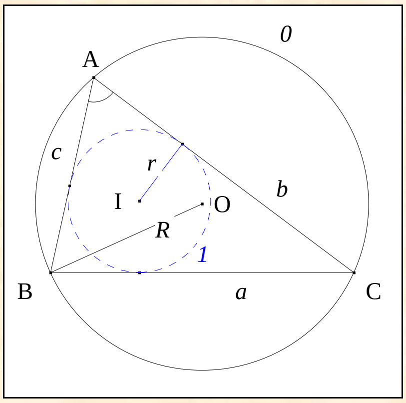
C. RELATIONS

ENTRE

ANGES * CÔTÉS * AIRE * CERCLES CIRCONSCRIT, INSCRIT

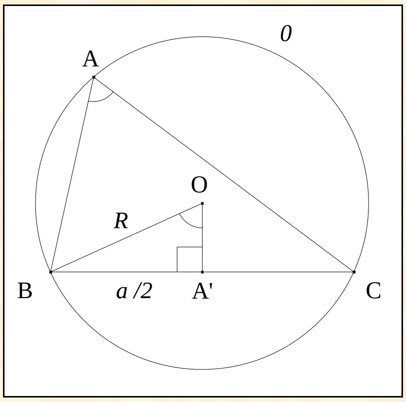
VISION

Figure :



Traits : ABC		un triangle acutangle,
	a, b, c	les longueurs resp. BC, AC, AB,
	2.p	le périmètre de ABC,
	0, *1*	les cercles circonscrits à ABC,
	O, I	les centres resp. de *0*, *1*,
	R, r	les rayons resp. de *0*, *1*
et	S	l'aire de ABC.

1. La loi des sinus [9]



- Notons A' le milieu de [BC].

- Par "Angles inscrit et au centre", <BAC = <BOA'.

[9] En trigonométrie, la **loi des sinus** est une relation de proportionnalité entre les longueurs des côtés d'un triangle et les **sinus** des angles respectivement opposés.
Elle a été formulée par Nasir al-Din al-Tusi au début du **XIII**e siècle

- Par projection, $BA' = OB.\sin <BOA'$

- **Conclusion :** par substitution et réarrangement, $a/\sin A = 2.R.$

Scolies : **(1)** vision triangulaire : $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2.R$

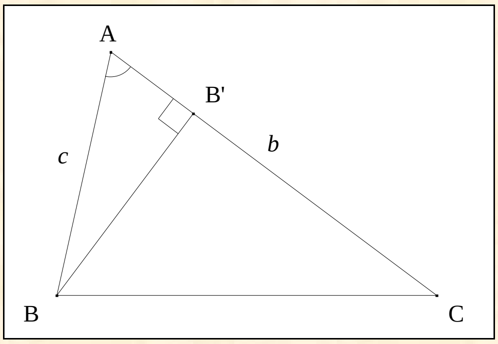
(2) en conséquence, $2.R = (a + b + c)/(\sin A + \sin B + \sin C)$

$\sin A + \sin B + \sin C = R/p$

2. La loi des cosinus [10]

- **Conclusion :** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A.$

3. La formule de Snell [11]



- Notons B' le pied de la B-hauteur de ABC.

- Par "la formule égyptienne", $2.S = b.BB'.$

- Par projection, $BB' = c.\sin A.$

- **Conclusion :** par substitution, $2.S = bc.\sin A.$

Scolies : **(1)** vision triangulaire $2.S = bc.\sin A = ca.\sin B = ab.\sin C.$

(2) une formule

* par multiplication par a, $2.S.a = abc.\sin A.$

* par une autre écriture, $2.S.a/\sin A = abc$

* par "la loi de sinus", $2.S.2.R = abc$

* par réarrangement, $S = abc/4R.$

[10] Ou formule d'al-Kashi (1380-1429). Elle était connue d'Euclide (IIIe siècle av. J.-C.)
[11] Willebrord Snell van Royen ou Snellius (13/06/1580 Leyde Pays-Bas-30/10/1626 Leyde)

(3) une autre formule

* par "la loi de sinus", a = 2.R.sin A
b = 2.R.sin B
c = 2.R.sin C.

* par multiplication membre à membre, abc = $8.R^3$.sin A.sin B.sin C

* par la formule précédente, 4.R.S = $8.R^3$.sin A.sin B.sin C

* par simplification, S = $2.R^2$.sin A.sin B.sin C

4. Le périmètre 2.p

- Une chasse :

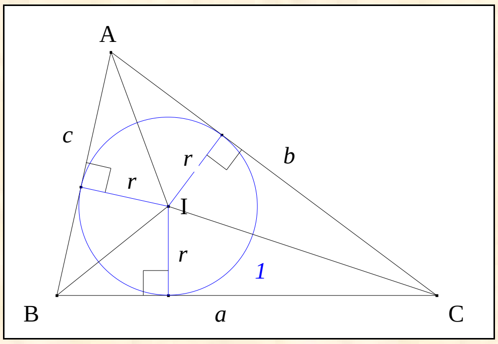
* par définition, 2.p = a + b + c

* par "la loi de sinus", = 2.R.sin A + 2.R.sin B + 2.R.sin C

* par factorisation et **B. 1.**, = 8.R.cos A/2.cos B/2.cos C/2

- **Conclusion :** par simplification, p = 4.R.cos A/2.cos B/2.cos C/2

5. La formule p.r [12]



- Une chasse d'aire par "la formule égyptienne" :

* 2.[IBC] = a.r

* 2.[IBC] = a.r

* 2.[IBC] = a.r.

- **Conclusion :** par addition membre à membre, S = p.r.

Scolies : **(1)** une formule S = p.r = 4.R.r.cos A/2.cos B/2.cos C/2

(2) la somme des cosinus

[12] Willebrord Snell van Royen ou Snellius (13/06/1580 Leyde Pays-Bas-30/10/1626 Leyde)

* d'après **C. 3.** scolie **3**, S = 2.R².sin A.sin B.sin C

* par duplication, S = 2.R².(2.sin A/2.cos A/2).(2.sin B/2.cos B/2).(2.sin C/2.cos C/2)

* par substitution de **C. 5.** scolie **1** dans la formule S = p.r,

  4.R.r.cos A/2.cos B/2.cos C/2 = 2.R².(2.sin A/2.cos A/2).(2.sin B/2.cos B/2).(2.sin C/2.cos C/2)

* par simplification, r = 4.R.sin A/2.sin B/2.sin C/2

* par une autre écriture, r/R = 4.sin A/2.sin B/2.sin C/2

* d'après **B. 3.**, cos A + cos B + cos C = 1 + 4.sin A/2.sin B/2.sin C/2

* par substitution, cos A + cos B + cos C = 1 + r/R.

6. La formule sin A/2.sin B/2.sin C/2

- Une chasse d'aire :

  * d'après **C. 3.**, S = 2.R².sin A.sin B.sin C

  * d'après **C. 5.**, S = 4.R.r.cos A/2.cos B/2.cos C/2

  * par comparaison, duplication et simplification, 4.R.sin A/2.sin B/2.sin C/2 = r

- **Conclusion :** 4.sin A/2.sin B/2.sin C/2 = r/R.

PARTIE 2

LE TRIANGLE ORTHIQUE

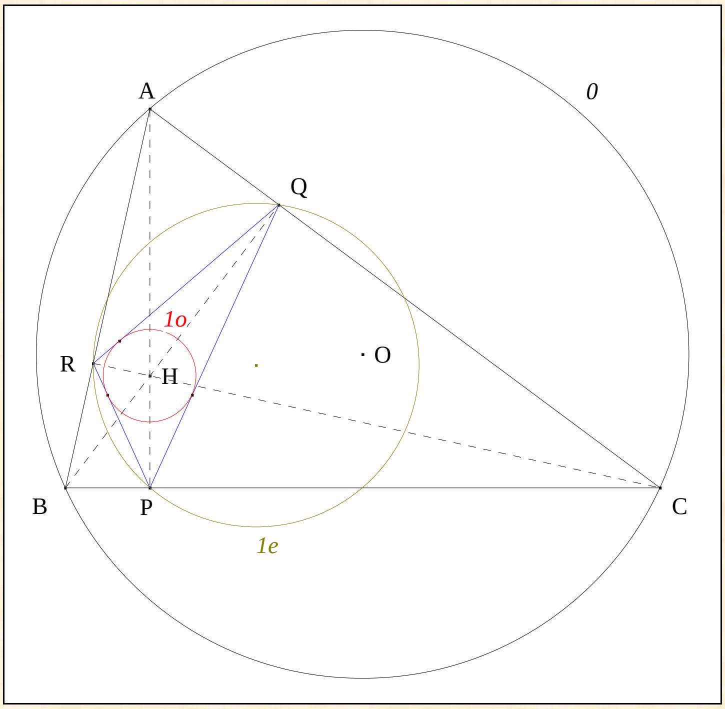
A. RELATIONS

ENTRE

ANGES * CÔTÉS * AIRE * CERCLES CIRCONSCRIT, INSCRIT

VISION

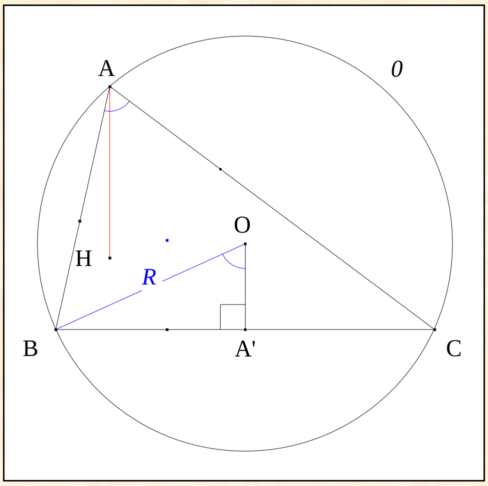
Figure :



Traits :

	ABC	un triangle acutangle,
	a, b, c	les longueurs resp. BC, AC, AB,
	2.p	le périmètre de ABC,
	H	l'orthocentre de ABC,
	PQR	le triangle orthique de ABC,
	$2.p_o$	le périmètre de PQR,
	1_o	le cercle inscrit à PQR,
	0, 1_e	les cercles circonscrit, d'Euler à ABC,
	O	le centre de *0*,
	1_0	le cercle inscrit à PQR,
	R, R_o, r_o	les rayons resp. de 0, 1_e, 1_0
et	S, S_o	les aires resp. de ABC, PQR.

1. Le A-segment d'Euler [13]



- Notons A' le milieu de [BC]

- D'après Lazare Carnot "Une formule", AH = 2.OA'

  * par "Angles inscrit et au centre", <BAC = <BOA'.

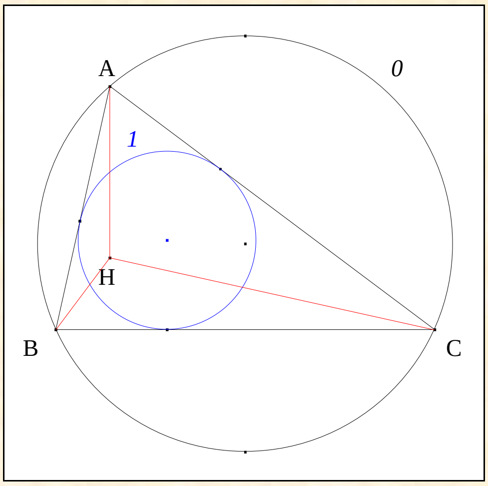
  * par projection, OA' = R.cos A

- **Conclusion :** par substitution, AH = 2.R.cos A.

Scolies : **(1)** vision triangulaire BH = 2.R.cos B , CH = 2.R.cos C

(2) AH = a.cotan A.

2. La somme des A, B, C-segments d'Euler [14]



- Notons T la somme AH + BH + CH.

13 pour Floor Van Lamoen et Darig Grinberg, [AH] est "le A-segment d'Euler".

14 Sum of altitudes in the acute triangle, AoPS du 18/02/2009 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h259185p1411159

- Évaluation de T :

  * nous avons : $T = AH + BH + CH$
  * d'après **A. 1.**, $T = 2.R.\cos A + 2.R.\cos B + 2.R.\cos C$
  * par factorisation, $T = 2.R.[\cos A + \cos B + \cos B]$.
  * d'après Partie **1**, **C. 5.** scolie **2**, $T = 2.R.\ (1 + r/R)$.

- **Conclusion :** $T = 2.(R + r)$.

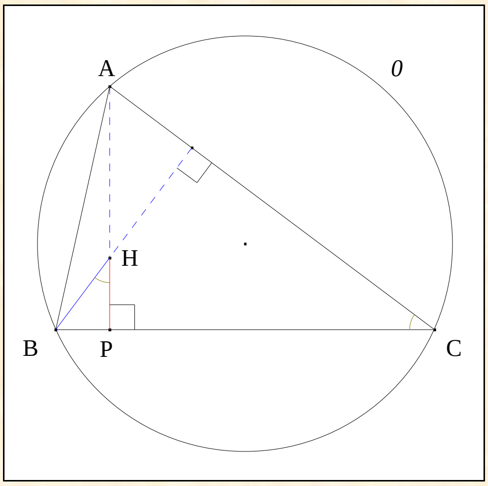
Scolie : la somme $\cos B.\cos C + \cos C.\cos A + \cos A.\cos B$

* d'après **A. 1.**, $AH + BH + CH = 2.R.(\cos A + \cos B + \cos C)$
* d'après **A. 2.**, $2.(R + r) = 2.R.(\cos A + \cos B + \cos C)$
* élévation au carré, $(R + r)^2 = R^2.(\cos A + \cos B + \cos C)^2$
* $(R + r)^2 = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2.(\cos B.\cos C + \cos C.\cos A + \cos A.\cos B)$
* d'après Partie **2, A. 7.** scolie,

  $(R + r)^2 = 4R^2.[(1 - r_0/R)$ $+ 2.(\cos B.\cos C + \cos C.\cos A + \cos A.\cos B)$
* en conséquence,

  $[2.(R + r)]^2 - 4R^2.(1 - r_0/R) = 8R^2.(\cos B.\cos C + \cos C.\cos A + \cos A.\cos B)$

3. Contre A-segment d'Euler



- Considérons le triangle BHP : $HP = BH.\cos C$

  * d'après **A. 1.**. $BH = 2.R.\cos B$

- **Conclusion :** par substitution, $HP = 2.R.\cos B.\cos C$.

Scolies : vision triangulaire $HQ = 2.R.\cos C.\cos A$, $HR = 2.R.\cos A.\cos B$.

4. Hauteurs de ABC

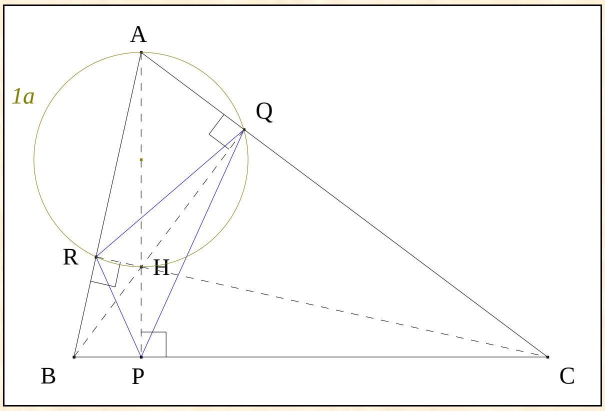
- Une chasse d'aire :

  * par comparaison des formules d'aire, 2.S = a.AP = 2.abc/4R
  * par réarrangement, 2.R.AP = bc
  * par la loi des sinus, AP = 2.R.sin B.sin C.

Scolies : **(1)** vision triangulaire AQ = 2.R.sin C.sin A , AR = 2.R.sin A.sin B

(2) somme des hauteurs 2.R.(AR + AP + AQ) = ab + bc + ca.

5. Côtés de PQR



- Notons *1a* le cercle de diamètre [AH] ; il passe par Q et R.
- D'après "La loi des sinus", QR/sin A = AH
- D'après **A. 1.**, AH = 2.R.cos A
- **Conclusion :** par substitution, QR = R.sin 2A.

Scolies : vision triangulaire, RP = R.sin 2B , PQ = R.sin 2C.

6. Le périmètre de PQR

- D'après **A. 5.**, QR + RP + PQ = R.sin 2A + R.sin 2B + R.sin 2C

  * par factorisation, QR + RP + PQ = R.(sin 2A + sin 2B + sin 2C)

- **Conclusion :** d'après Partie **1, B. 2.** p_o = 2.R.sin A.sin B.sin C.

7. Rayon du cercle inscrit au triangle orthique

- **Scolie :** $2.R_o = R$.

- Une chasse d'aire :

  * par comparaison des formules d'aire, $S_o = p_o.r_o = QP.RP.PQ/4.R_o$

  * par substitution, $2.R.\sin A.\sin B.\sin C.r_0 = (R.\sin 2A).(R.\sin 2B).(R.\sin 2C)/4.R_o$

  * par duplication et substitution

$$2.R.\sin A.\sin B.\sin C.r_0 = (2.R.\sin A.\cos A).(2.R.\sin B.\cos B).(2.R.\sin C.\cos C)/2.R$$

- **Conclusion :** par simplification, $r_0 = 2.R.\cos A.\cos B.\cos C$.

Scolie : la formule $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

  * d'après **Partie 1, B. 6.**, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2.\cos A.\cos B.\cos C$

  * en conséquence, $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - r_0/R$

PARTIE 3

PROBLÈMES

PROBLÈME 1

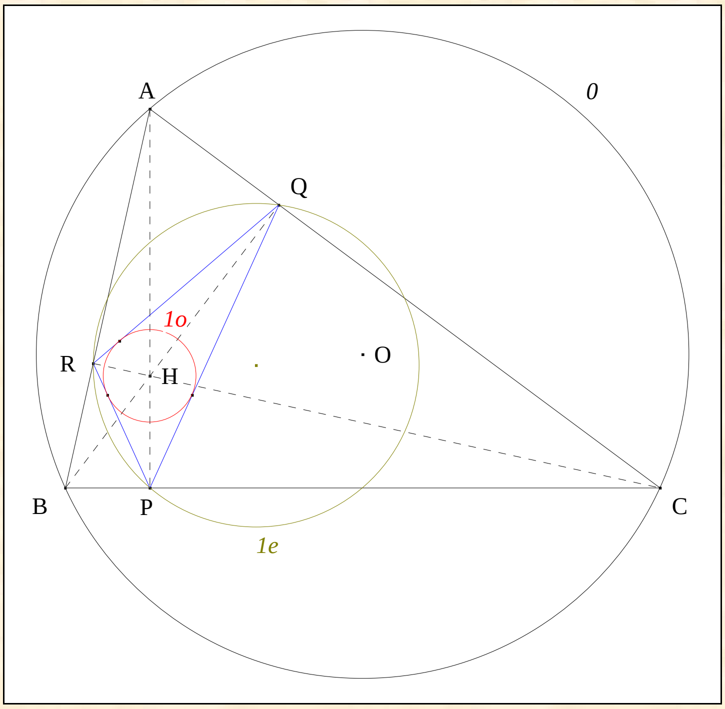
proposed

By

Luis Gonzáles [15]

VISION

Figure :



Traits : ABC		un triangle,
	0, 1	les cercles circonscrit, inscrit à ABC,
	R, r	les rayons resp. de 0, 1,
	PQR	le triangle orthique de ABC,
	1_0	le cercle inscrit à PQR
et	r_0	le rayon de 1_0.

Donné : AP + AQ + AR = 2.R + 4.r + r_0 + r²/R.

VISUALISATION

- Notons U la somme AP + BQ + CR.
- Une chasse segmentaire :

  * par décomposition, U = (AH + HP) + (BH + HQ) + (CH + HR)

[15] Sum of altitudes in the acute triangle, AoPS du 18/02/2009 ; https://artofproblemsolving.com/community/c6h259185p1411159

* par commutativité
et associativité, U = (AH + BH + CH) + (HP + HQ + HR)

* d'après Partie **2**, **A. 2.** et **3.**, U = 2.(R + r) + 2.R.(cos B.cos C + cos C.cos A + cos A.cos B)

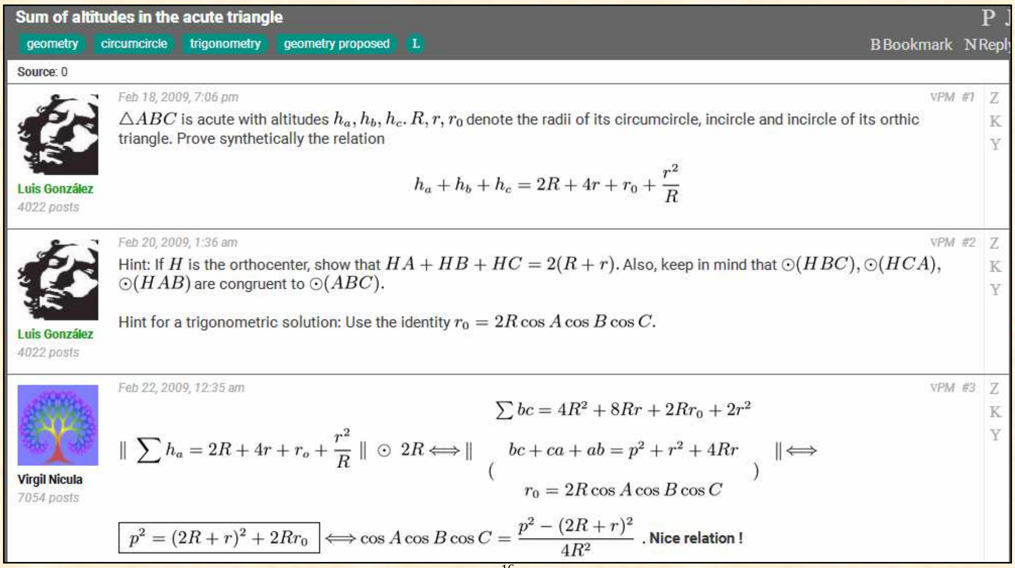
* d'après Partie **2**, **A. 2.** scolie, U = 2.(R + r) + (1/4.R).[2.(R + r)]² - 4.R².(1 - r_0/R)]

* par développement, U = 2.R + 2.r + (1/4.R).[4.R² + 8.R.r + 4.r² - 4.R² + 4.R.r_o]

* par réduction, U = 2R + 2r + 2.r + r²/R + r_o

- **Conclusion :** AP + BQ + CR = 2R + 4r + r²/R + r_o

Archive :



Sum of altitudes in the acute triangle

geometry circumcircle trigonometry geometry proposed

Source: 0

Luis González, 4022 posts — Feb 18, 2009, 7:06 pm — #1

$\triangle ABC$ is acute with altitudes h_a, h_b, h_c. R, r, r_0 denote the radii of its circumcircle, incircle and incircle of its orthic triangle. Prove synthetically the relation

$$h_a + h_b + h_c = 2R + 4r + r_0 + \frac{r^2}{R}$$

Luis González, 4022 posts — Feb 20, 2009, 1:36 am — #2

Hint: If H is the orthocenter, show that $HA + HB + HC = 2(R + r)$. Also, keep in mind that $\odot(HBC), \odot(HCA), \odot(HAB)$ are congruent to $\odot(ABC)$.

Hint for a trigonometric solution: Use the identity $r_0 = 2R\cos A\cos B\cos C$.

Virgil Nicula, 7054 posts — Feb 22, 2009, 12:35 am — #3

$$\| \sum h_a = 2R + 4r + r_o + \frac{r^2}{R} \| \odot\ 2R \iff \| \left(\begin{array}{c} \sum bc = 4R^2 + 8Rr + 2Rr_0 + 2r^2 \\ bc + ca + ab = p^2 + r^2 + 4Rr \\ r_0 = 2R\cos A\cos B\cos C \end{array} \right) \| \iff$$

$\boxed{p^2 = (2R + r)^2 + 2Rr_0} \iff \cos A\cos B\cos C = \frac{p^2 - (2R+r)^2}{4R^2}$. **Nice relation !**

[16]

16 https://artofproblemsolving.com/community/c6h259185p1411159

PROBLÈME 2 [17]

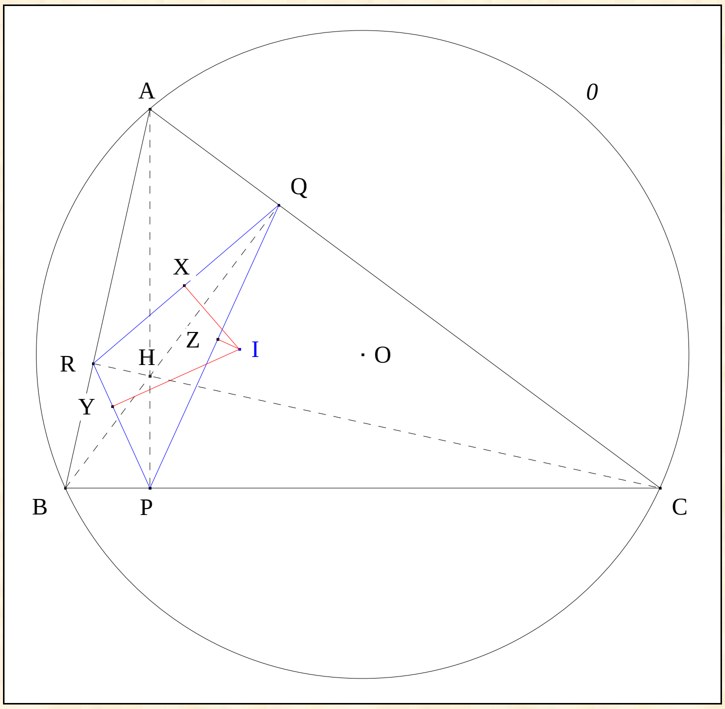
proposed

by

Srirampanchapakesan

VISION

Figure :

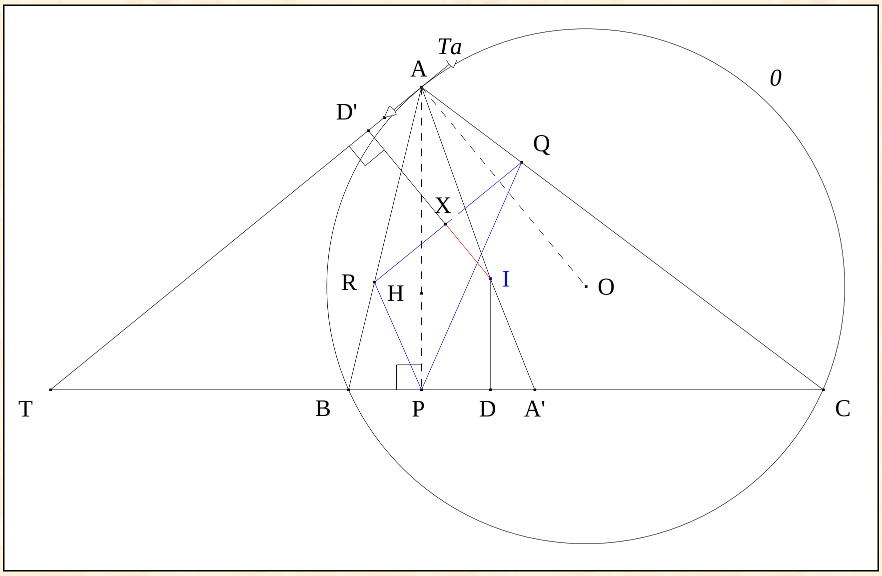


Traits :		ABC	un triangle,
		0, *1*	les cercles circonscrit, inscrit à ABC,
		R, r	les rayons resp. de *0*, *1*,
		O, I	le centre de *0*, *1*,
		H	l'orthocentre de ABC,
		PQR	le triangle orthique de ABC
	et	X, Y, Z	le triangle I-pédal de PQR.

Donné : IX + IY + IZ = r.(R + r)/R.

VISUALISATION

[17] Incenter and orthic triangle, AoPS du 10/07/2018 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1671379_incenter_and_orthic_triangle

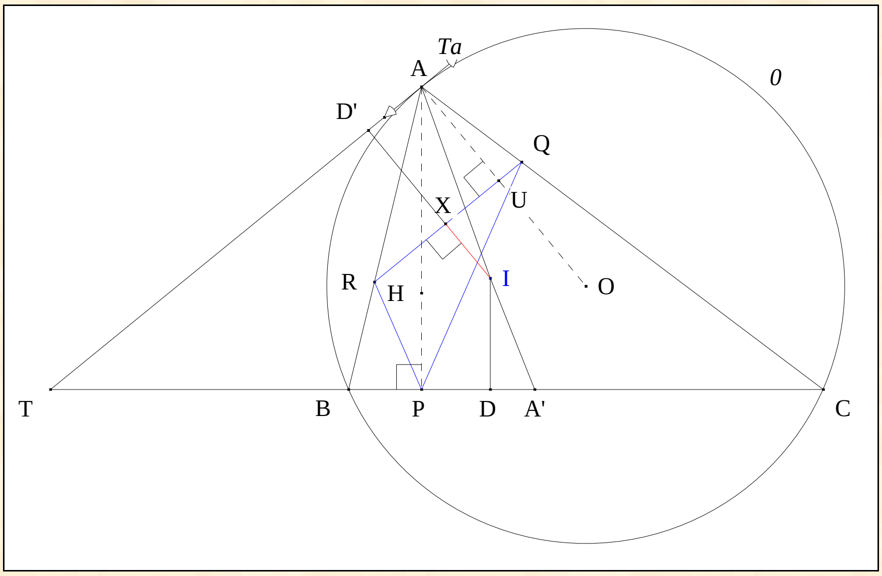


- Notons *Ta* la tangente à *0* en A,
  T, A' le point d'intersection de (BC) resp. avec *Ta*, (AI),
  et D, D' les pieds des perpendiculaires à (BC), (AT) issues de I.

- **Scolies :** **(1)** (AH) et (AO) sont deux A-isogonales de ABC

  (2) le triangle TAA' est T-isocèle

  (3) ID + ID' = AP. [18]



- Notons U le point d'intersection de (AO) et (QR).

- D'après Christian von Nagel "Un rayon" [19], (AU) ⊥ (QR).

- **Scolies :** **(1)** *Ta* // (QR)

  (2) (AU) et (AP) sont deux A-hauteurs resp. à AQR, ABC.

---

[18] Ayme J.-L., Orthique Encyclopédie **0**, G.G.G. vol. **49**, Problème **16** ; http://jl.ayme.pages perso-orange.fr/

[19] Ayme J.-L., Cinq théorème de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 21-22 ; http://jl.ayme.pages perso-orange.fr/

- Notons x, y, z les longueurs resp. de IX, IY, IZ.
- Une chasse segmentaire :

  * nous avons : AP = ID + ID'
  * par décomposition, ID' = IX + XD'
  * AUXD' étant un rectangle, XD' = AU
  * par substitution, AP = ID + IX + AU
  * d'après Partie **2. A. 4.**,

    AP = r + IX + AH.sin B.sin C
  * d'après Partie **2. A. 1.**, AH = 2.R.cos A
  * par substitution,

    AP = r + x + 2.R.cos A.sin B.sin C.

- Sommation

* AP + BQ + CR = 3.r + (x + y + z) + 2.R.(cos A.sin B.sin C + cos B.sin C.sin A + cos C.sin A.sin B)
* d'après Partie **1**. **B. 10.**,

  = 3.r + (x +y +z) + R.($\sin^2$A+ $\sin^2$B+ $\sin^2$C)
* d'après Partie **3** Problème **1** et Partie **2. B. 5.**,

  2.R + 4.r + r^2/R + r_o = 3.r + (x +y +z) + 2.R.(1 + cos A.cosB.cos C)
* d'après Partie **2. A. 7.**, r_0 = 2.R.cos A.cos B.cos C
* par substitution et simplification, x + y + z = r + + r^2/R.

- **Conclusion :** x + y + z = r.(R + r)/R.

PROBLÈME 3 [20]

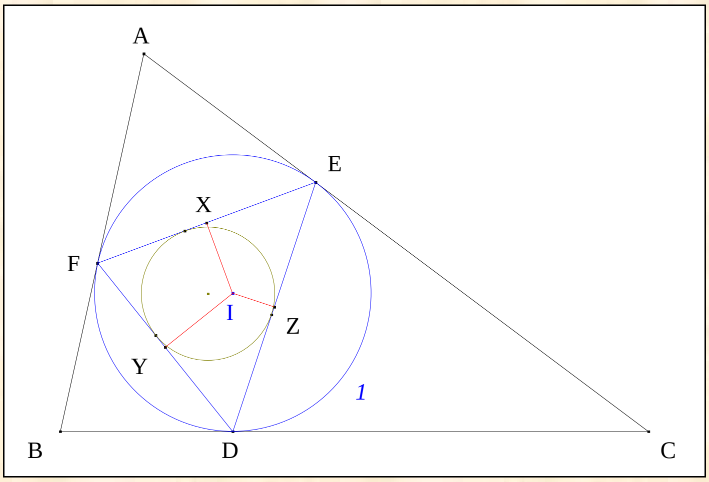
proposed

by

Jean-Louis Ayme

VISION

Figure :



Traits :		ABC	un triangle,
		1	le cercle inscrit à ABC,
		I	le centre de *1*,
		r	le rayon de *1*,
		DEF	le triangle de contact de ABC,
		r_1	le rayon du cercle inscrit à DEF
	et	X, Y, Z	le triangle I-pédal de DEF

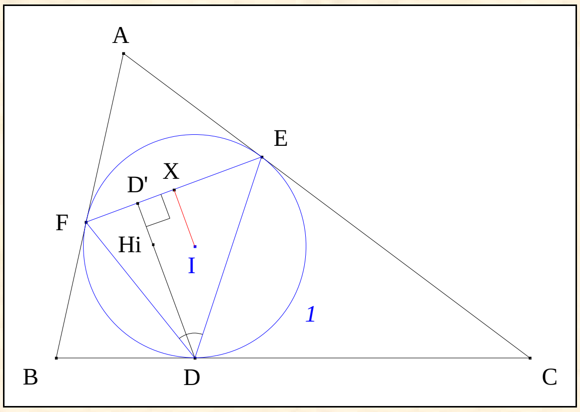
Donné : $IX + IY + IZ = r + r_1$.

Commentaire : l'auteur a désiré poursuivre dans la lignée précédente…Le résultat est cependant immédiat en recourrant à la formule de Carnot [21].

VISUALISATION

[20] Ayme J.-L., A relation, AoPS du 14/03/2019 . https://artofproblemsolving.com/community/c6h1802205_a_relation

[21] https://www.maa.org/press/periodicals/the-japanese-theorem-for-nonconvex-polygons-carnots-theorem
https://www.cut-the-knot.org/proofs/carnot.shtml



- **Scolie :** <EDF = Π/2 – ½.A.

- Notons Hi l'orthocentre de DEF
  et x, y, z les longueurs resp. de IX, IY, IZ.

- D'après Partie **2. A. 1.**, DHi = 2.r.cos (Π/2 – ½.A) = 2.r.sin ½.A

- D'après Lazare Carnot "Une relation" [22], DHi = 2.IX (= 2.x)

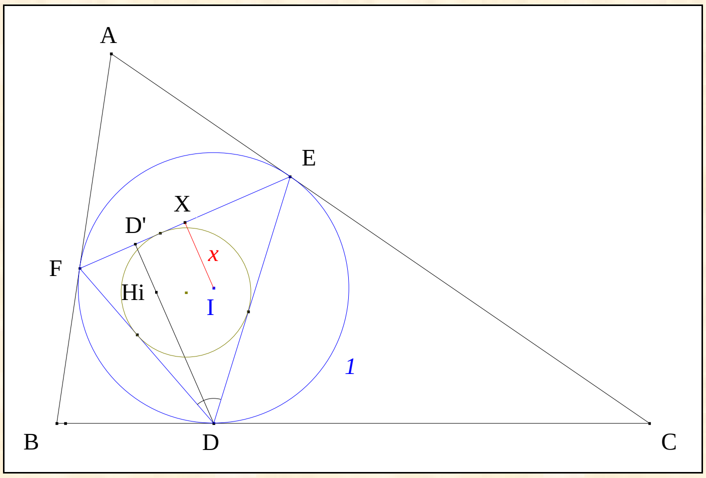
- **Conclusion partielle :** x = r.sin ½.A.

- **Scolie :** vision triangulaire, y = r.sin ½.B , z = r.sin ½.B

- Une chasse trigonométrique :

  * par factorisation, x + y + z = r.[sin ½.A + sin ½.B + sin ½.C]

- **Conclusion partielle :** d'après Partie **1, B. 7.**, x + y + z = r.[1 + 4.∏ sin (Π/4 – 1/4.A)].



- Notons S_1 l'aire de DEF
  et r_1 le rayon du cercle inscrit à DEF.

- Le rayon r_1 :

  * d'après Partie **1, C. 3** S_1 = 2.r².sin (Π/2 – ½.A).sin (Π/2 – ½.B).sin (Π/2 – ½.C)

[22] Ayme J.-L., A relation, AoPS du 15/03/2019 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1802931_a_relation

* d'après Partie **1, C. 5** $S_1 = p_1.r_1 = 4.r.r_1.\cos(\Pi/4 - A/4).\cos(\Pi/4 - B/4).\cos(\Pi/4 - C/4)$

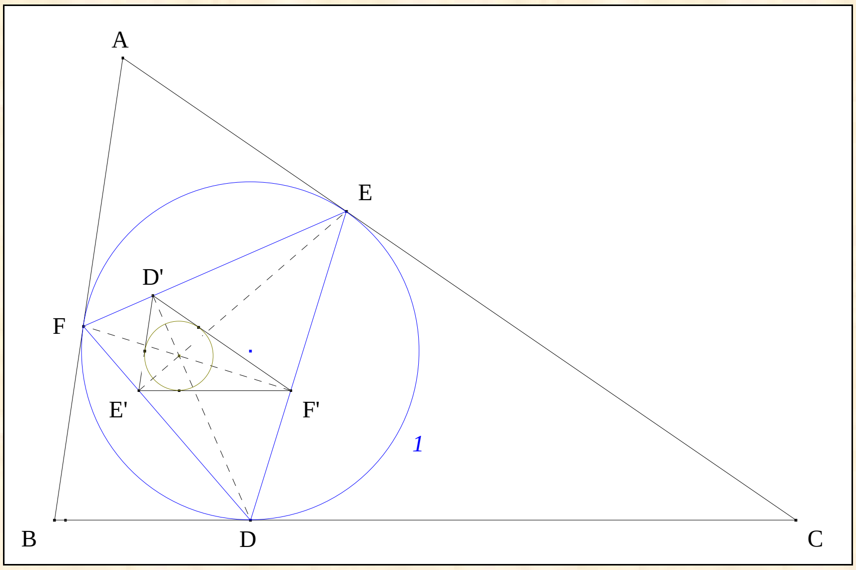
* par duplication "sin 2A", comparaison et simplification

$$2.r^2.8.\sin(\Pi/4 - A/4).\sin(\Pi/4 - B/4).\sin(\Pi/4 - C/4) = 4.r.r_1$$

* par réarrangement, $r_1 = 4.r.\sin(\Pi/4 - A/4).\sin(\Pi/4 - B/4).\sin(\Pi/4 - C/4)$.

- **Conclusion :** $IX + IY + IZ = r + r_1$.

Scolie : le rayon r_2



- Notons D'E'F' le triangle orthique de DEF
  et r_2 le rayon du cercle inscrit à D'E'F'.

- D'après Partie **3.** Problème **1**, $r_2 = 2.r.\cos(\Pi/2 - ½.A).\cos(\Pi/2 - ½.B/2).\cos(\Pi/2 - ½.C)$

- **Conclusion :** par formules des angles associés, $r_2 = 2r.\sin A/2.\sin B/2.\sin C/2$.

PARTIE 4

FORMULAIRE ET LEXIQUE

FORMULAIRE DE TRIGONOMÉTRE

Formulaire 1 : addition [modifier | modifier le wikicode]

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

(On en déduit des formules analogues en remplaçant b par $-b$, grâce aux formules de la première section ci-dessus.)

Formulaire 2 : duplication [modifier | modifier le wikicode]

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 a \\ &= \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}\end{aligned}$$
$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Formulaire 3 : linéarisation (formules de Carnot) [modifier | modifier le wikicode]

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$
$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

Formulaire 3 : linéarisation (formules de Carnot) [modifier | modifier le wikicode]

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$
$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

Formulaire 4 : produit-somme [modifier | modifier le wikicode]

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$
$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$
$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$$
$$\cos a \sin b = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$$

Formulaire 5 : somme-produit (formules de Simpson) [modifier | modifier le wikicode]

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

LEXIQUE

FRANÇAIS - ANGLAIS

A	
aligné	collinear
annexe	annex
axiome	axiom
appendice	appendix
adjoint	associate
a propos	by the way btw
acutangle	acute angle
axiome	axiom
B	
bissectrice	bisector
bande	strip
C	
centre	incenter
centre du cercle circonscrit	circumcenter
cercle circonscrit	circumcircle
cévienne	cevian
colinéaire	collinear
concourance	concurrence
coincide	coincide
confondu	coincident
côté	side
par conséquence	consequently
commentaire	comment
D	
d'après	according to
donc	therefore
droite	line
d'où	hence
distinct de	different from
E	
extérieur	external
F	
figure	figure
H	
hauteur	altitude
hypothèse	hypothesis
I	
intérieur	internal
identique	identical
i.e.	namely
incidence	incidence
L	
lemme	lemma
lisibilité	legibility
M	
mediane	median
médiatrice	perpendicular bissector
milieu	midpoint
N	
Notons	name
nécessaire	necessary
note historique	historic note
O	
orthocentre	orthocenter
ou encore	otherwise
P	
parallèle	parallel
parallèles entre elles	parallel to each other
parallélogramme	parallelogram
pédal	pedal
perpendiculaire	perpendicular
pied	foot
point de vue	point of view
postulat	postulate
point	point
pour tout	for any
Q	
quadrilatère	quadrilateral
R	
remerciements	thanks
reconnaissance	acknowledgement
respectivement	respectively
rapport	ratio
répertorier	to index
S	
semblable	similar
sens	clockwise in this
order	
segment	segment
Sommaire	summary
symédiane	symmedian
suffisante	sufficient
sommet (s)	vertex (vertice)
T	
trapèze	trapezium
tel que	such as
théorème	theorem
triangle	triangle
triangle de contact	contact triangle
triangle rectangle	right-angle triangle