# UN CERCLE

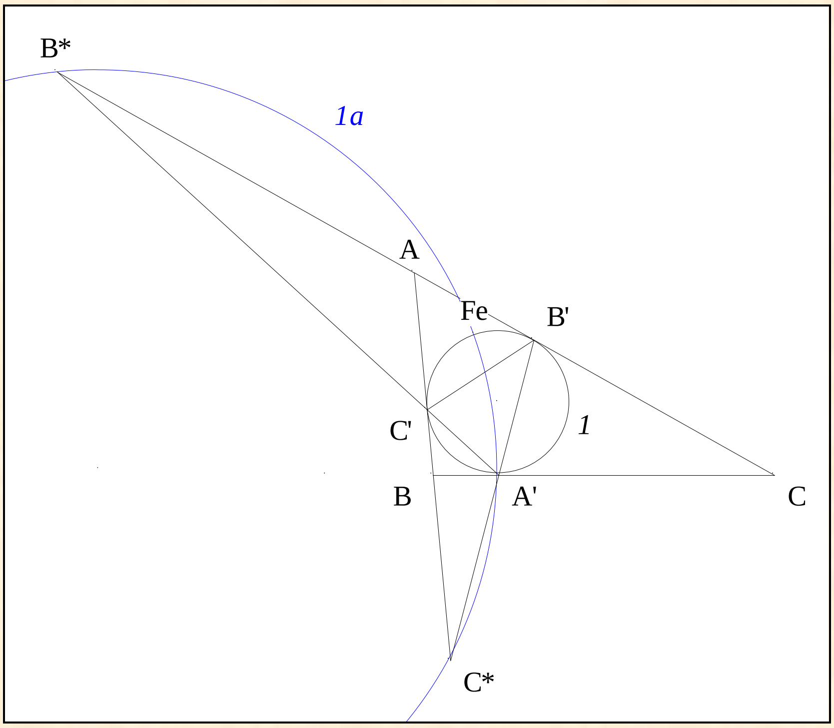
## PASSANT

## PAR

## LE POINT DE FEUERBACH

†

Jean - Louis AYME [1]




**Résumé.** L'auteur montre synthétiquement que le point de Feuerbach d'un triangle peut être considéré comme le point de Miquel du delta déterminé par le triangle inscrit et par la droite de Gergonne du triangle donné. Dix lemmes conduisent à ce résultat et deux exercices sont alors proposés.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

**Abstract.** The author shows synthetically the Feuerbach's point of a triangle can be considered as the Miquel's point of the Delta determined by the inscribed triangle and the Gergonne's line of the given triangle. Ten lemmas lead to this result and two exercises are then offered.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/10/2012.

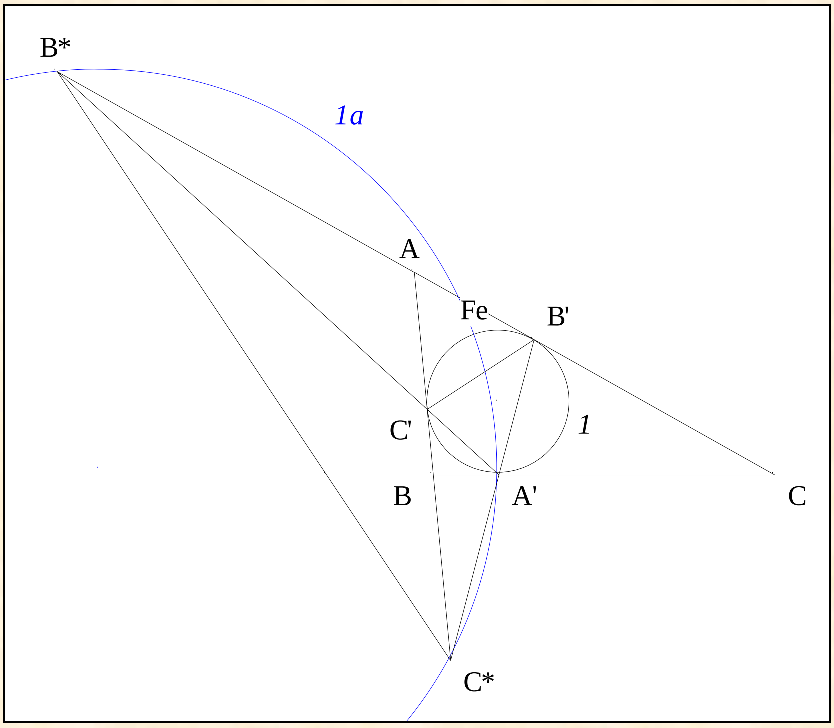
**Sommaire**



## A. PRÉSENTATION DU RÉSULTAT

### VISION

**Figure :**




**Traits :** ABC un triangle,
*1* le cercle inscrit de ABC,

| | | |
|---|---|---|
| | A'B'C' | le triangle de contact de ABC, |
| | B*, C* | les B, C-points de Nobbs de ABC, |
| | *1a* | le cercle circonscrit au triangle A'B*C* |
| et | Fe | le point de Feuerbach de ABC. |

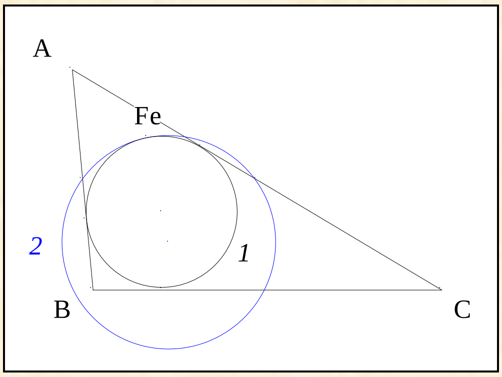
**Donné :** *1a* passe par Fe.

## B. DES LEMMES

### 1. Le point de Feuerbach

**VISION**

**Figure :**




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | *1* | le cercle inscrit dans ABC |
| et | *2* | le cercle d'Euler de ABC. |

**Donné :** *1* et *2* sont tangents[2].

**Scolie :** le point de contact de *1* et *2*, est "le point de Feuerbach de ABC" ; il est noté Fe et est répertorié sous $X_{11}$ chez ETC[3].

**Énoncé traditionnel :**

*le cercle d'Euler d'un triangle*
*est*
*tangent au cercle inscrit de ce triangle.*

**Note historique :** la preuve analytique de Karl Feuerbach constitue un véritable tour de force qui témoigne de sa ténacité pour arriver au résultat ; il prend A pour origine, (AB) pour axe des abscisses et s'appuie sur un article de Leonhard Euler[4] pour arriver au résultat.

---

[2] Feuerbach K.. *Eigenschaften einiger merkwurdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* (1822) 38.
Ayme J.-L., Le théorème de Feuerbach, G.G.G. vol. 1 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.

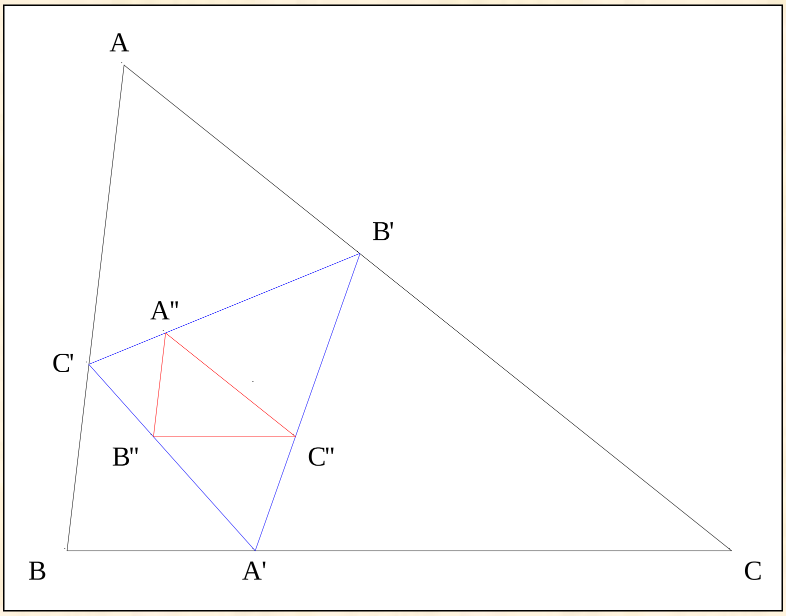
[3] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

Rappelons que Jakob Steiner[5] en 1833, Christian Heinrich von Nagel[6] en 1836, Olry Terquem en 1841, Carl Adams[7] en 1846, l'élève du Lycée Descartes (Paris)
J. Mention[8] en 1846 et 1850, C. G. Reuschle en 1853, Hart vers 1860, W. Harvey[9] en 1887, J. P. Taylor[10] en 1900, Amédée Mannheim[11] en 1902, Georges Fontené[12] en 1905, prouveront le célèbre résultat de Feuerbach.
Signalons que J. Mention sera le premier a en donné une preuve géométrique en 1846, qu'Hamilton en 1860 déterminera la position du point de contact, que Camille Gérono[13] en 1865 déterminera à son tour l'emplacement du point de contact mais en n'en n'employant que la règle et que Georges Fontené[14] en donnera une preuve basée sur l'inversion tout en précisant la position du point de contact.

## 2. Le triangle orthique du triangle de contact

**VISION**

**Figure :**



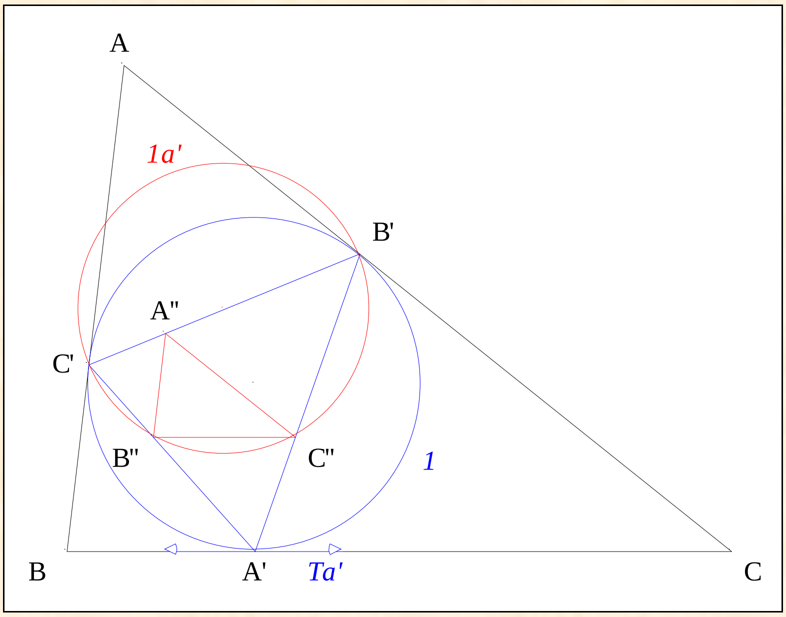

**Traits :** ABC un triangle,
A'B'C' le triangle de contact de ABC
et A"B"C" le triangle orthique de A'B'C'.

**Donné :** A"B"C" est homothétique à ABC.[15]

---

4 Euler L., Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum, *Novi commentarii Academiae Petropolitanae* 11, 103 (1765)
5 Steiner J., *Annales de Gergonne* **19**
Steiner J., *Développement systématique de la dépendance mutuelle des figures géométriques* (1833) 55
6 Nagel (von) C., *Le développement de la géométrie moderne du triangle* (1836)
7 Adams C., *Die merkwürdigen Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks* (1846)
8 Mention, *Nouvelles Annales* **5** (1846) 403-404 ;
Mention, Note sur le triangle rectiligne, *Nouvelles Annales* **9** (1850) 324-327
9 Harvey, *Proceedings of Edinburgh Math. Soc.* **5** (1887) 102
10 Taylor J. p., Question 1544, *Intermédiaire des mathématiciens* (1900) 314
11 Mannheim A., *Nouvelles Annales* (1902) 500
12 Fontené G., Sur le théorème de Feuerbach, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1905)
13 Gérono C., *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1865) 220
14 Fontené G., Sur le théorème de Feuerbach, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1907)
15 Gob A., Sur la droite et le cercle d'Euler, *Mathesis* (1889) Supplément, p. 1 art. 1

**VISUALISATION**




- Notons *1* le cercle inscrit de ABC ; il passe par A', B', C' ;
  *1a'* le cercle de diamètre [B'C'] ; il passe par B", C" ;
  et *Ta'* la tangente à *1* en A'.

- **Scolie :** *Ta'* = (BC).

- Les cercles *1a'* et *1*, les points de base B' et C', les moniennes (C"B'A') et (B"C'A'), conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (B"C") // *Ta'* i.e. (B"C") // (BC).

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (C"A") // (CA).
  (A"B") // (AB).

- **Conclusion :** par définition, A"B"C" est homothétique à ABC.

**Scolie :** ABC est "le triangle tangentiel de A'B'C'.

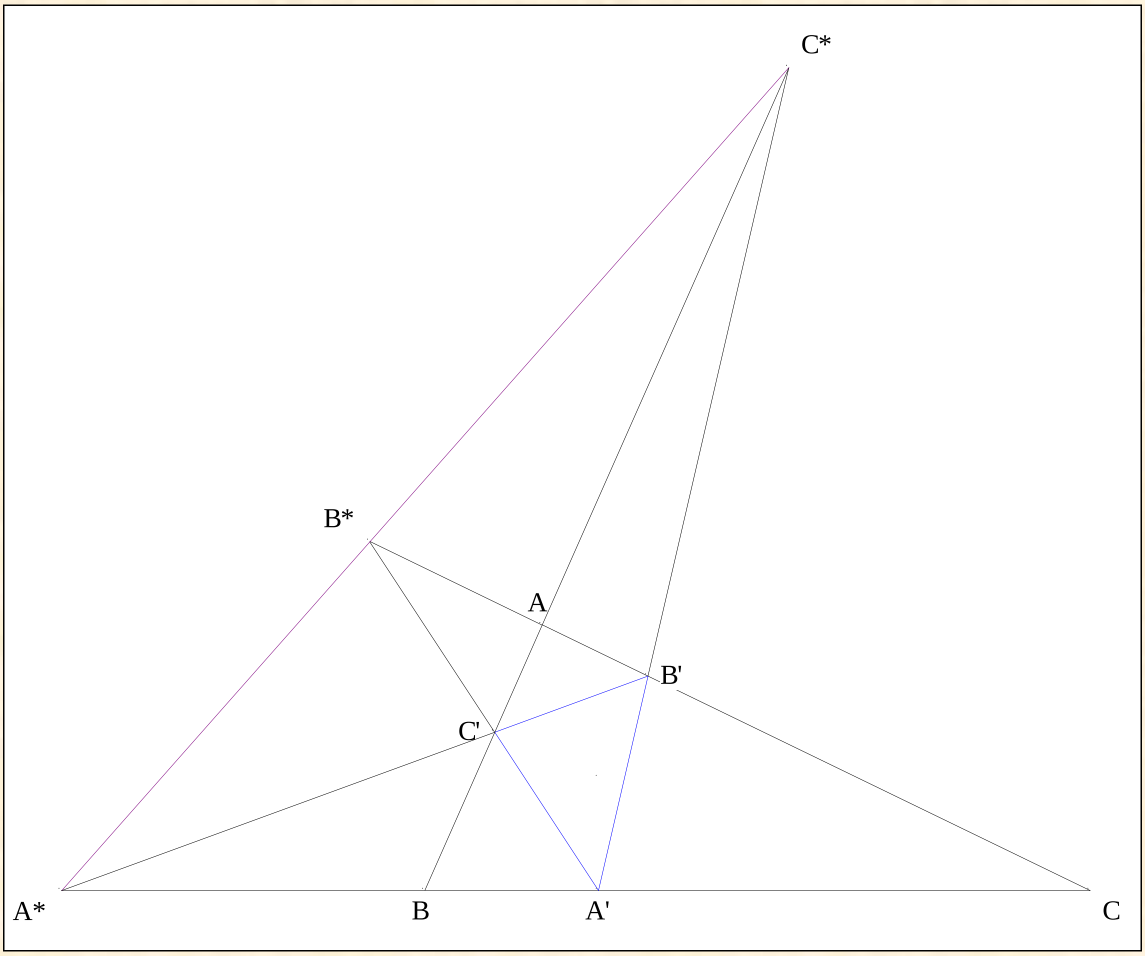
**Énoncé traditionnel :**

*le triangle tangentiel d'un triangle*
*est homothétique*
*au triangle orthique du triangle donné.*

## 3. La droite de Gergonne

**VISION**

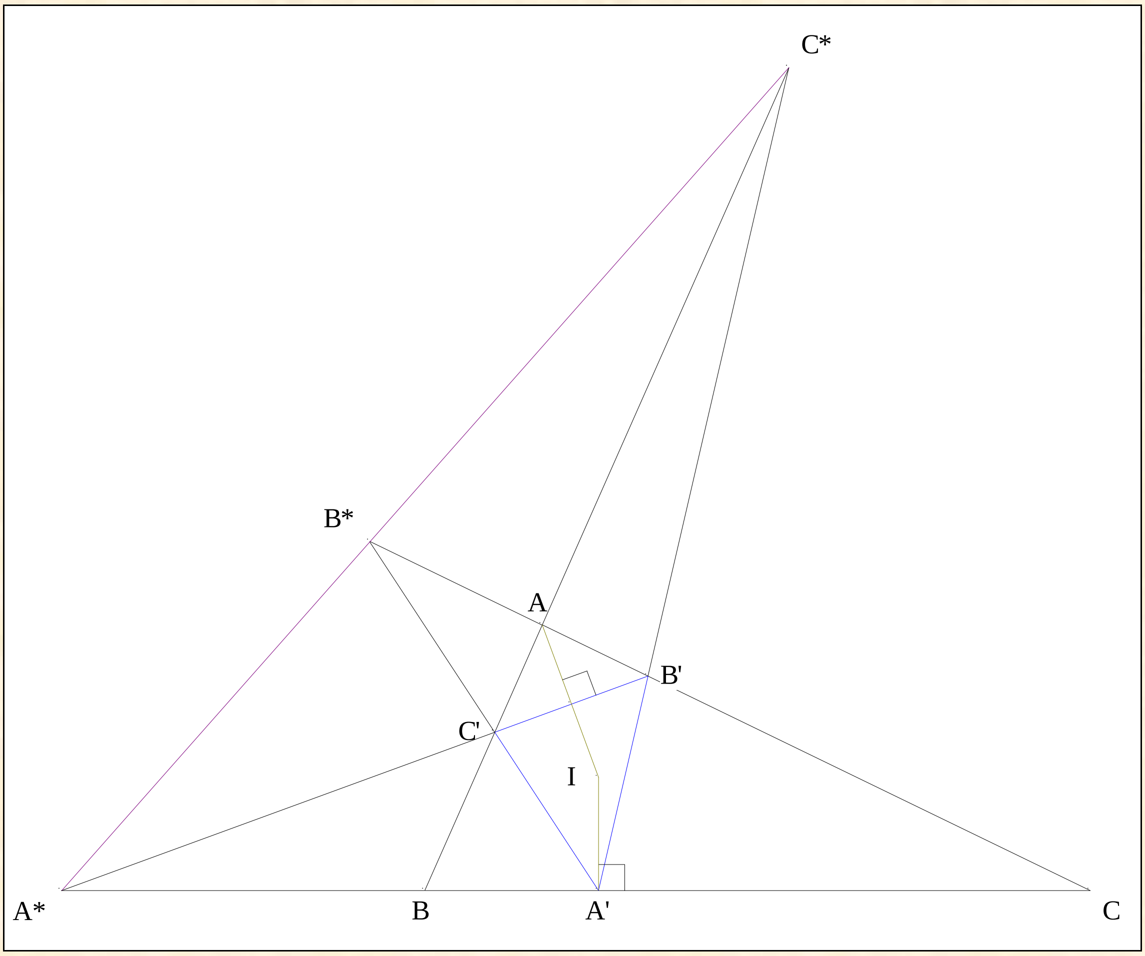
**Figure :**




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | A'B'C' | le triangle de contact de ABC, |
| | A*, B*, C* | les A, B, C-points de Nobbs de ABC. |

| | |
|---|---|
| **Donné :** | A*, B* et C* sont alignés. |

**VISUALISATION**




- Notons I le centre de ABC.

- ABC et A'B'C' étant bilogiques[16], sont perspectifs.[17]

- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 1), A*, B* et C* sont alignés.

**Scolie :** A*, B* et C* sont "les A, B, C-points de Nobbs de ABC" et (A*B*C*) est "la droite de Gergonne de ABC".[18]

**Énoncé traditionnel :**

*la droite de Gergonne d'un triangle*
*est*
*l'axe de perspective de ce triangle et de son triangle de contact.*

## 4. L'axe orthique du triangle de contact

**VISION**

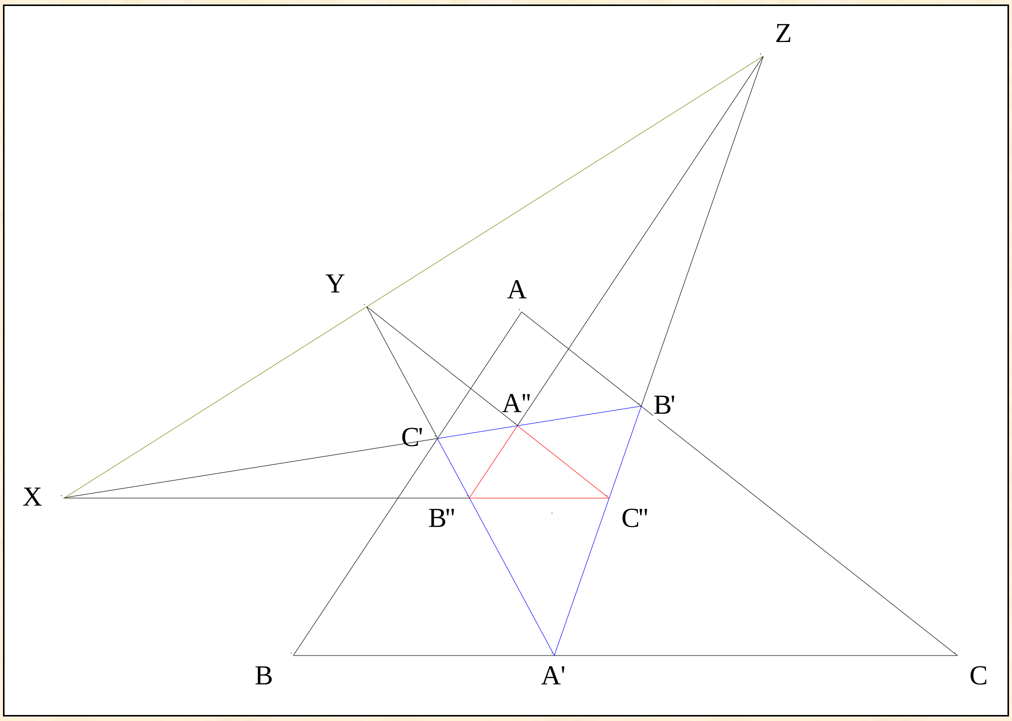
---

[16] Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, Annexe 6, G.G.G. vol. 1 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[17] Ayme J.-L., Le théorème de Sondat, Lemme 1, G.G.G. vol. 1 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[18] Oldknow, A., The Euler-Gergonne-Soddy triangle of a triangle, *Amer. Math. Montly* **103** (1996), 319-329

**Figure :**




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | A'B'C' | le triangle de contact de ABC, |
| | A"B"C" | le triangle orthique de A'B'C' |
| et | X, Y, Z | les points d'intersection resp. de (B"C") et (B'C'), de (C"A") et (C'A'), de (A"B") et (A'B'). |

**Donné :** X, Y et Z sont alignés.

**VISUALISATION**

- A'B'C' et A"B"C" sont perspectifs de centre l'orthocentre de A'B'C'.
- **Conclusion :** d'après Desargues "Le théorème des deux triangles" (Cf. Annexe 1), X, Y et Z sont alignés.

**Scolie :** (XYZ) est l'axe orthique de A'B'C'.

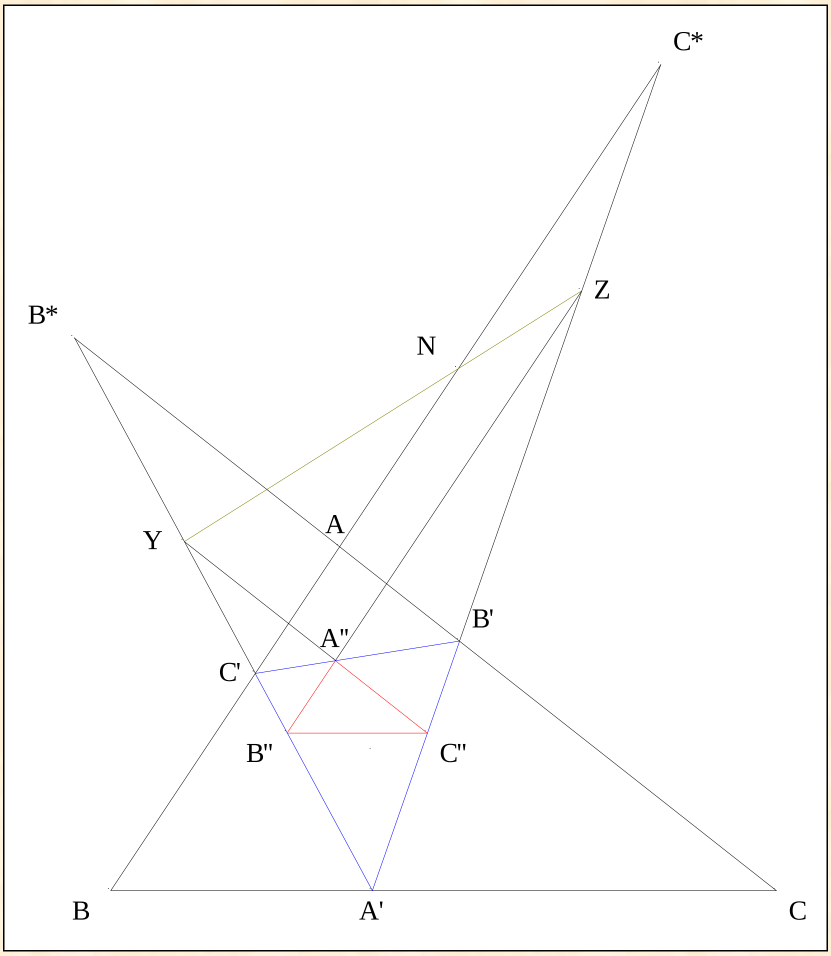
**Énoncé traditionnel :**

*l'axe orthique d'un triangle*
*est*
*l'axe de perspective de ce triangle et de son triangle orthique.*

**5. Un milieu sur l'axe orthique du triangle de contact**

**VISION**

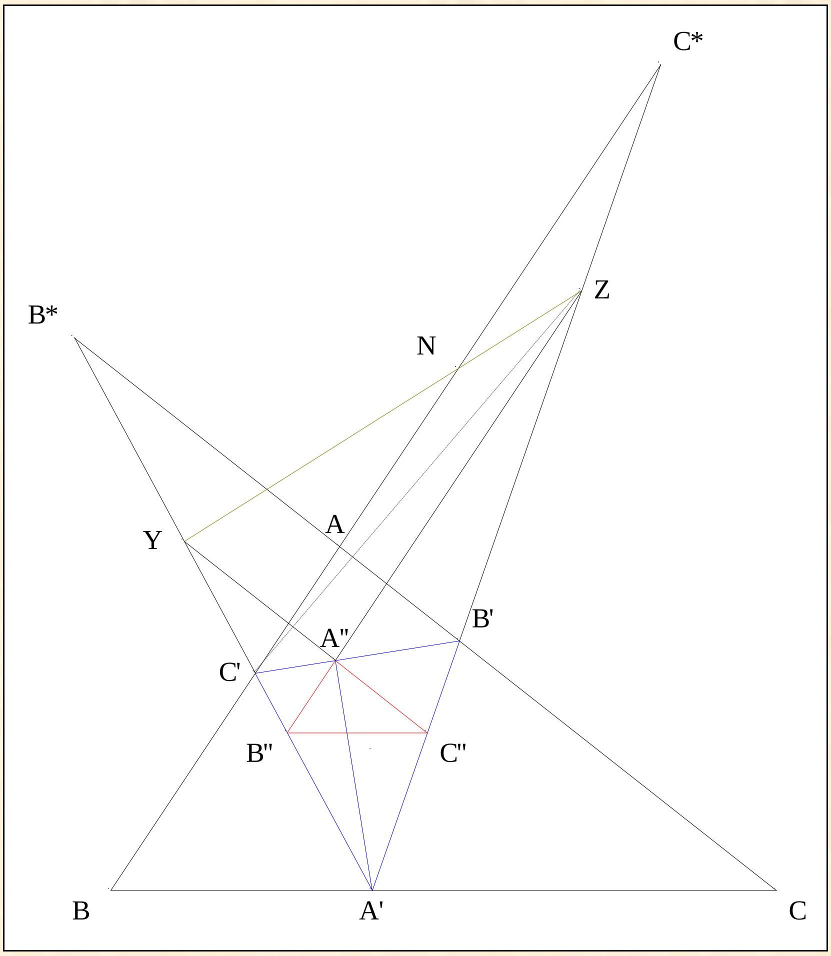
**Figure :**




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | A'B'C' | le triangle de contact de ABC, |
| | A"B"C" | le triangle orthique de A'B'C', |
| | Y, Z | les points d'intersection resp. de (C"A") et (C'A'), de (A"B") et (A'B'), |
| | B*, C* | les B, C-points de Nobbs de ABC, |
| et | N | le milieu de [C'C*]. |

**Donné :** N est sur (YZ).

**VISUALISATION**




- **Scolie :** (A"A'), (A"B') sont resp. les A"-bissectrices intérieure, extérieure de A"B"C".

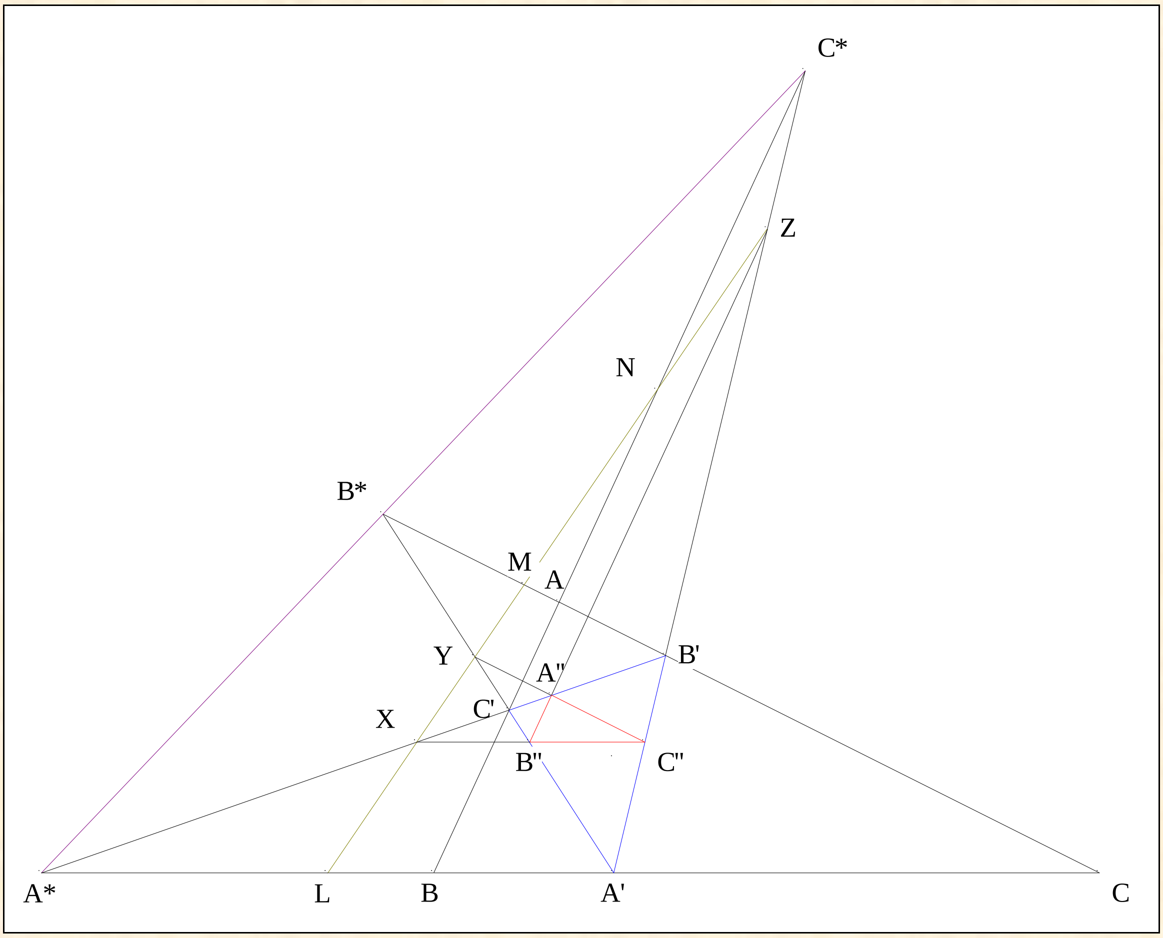
- La quaterne (B", Y, C', A') étant harmonique,
  par définition, le pinceau (Z ; B", Y, C', A') est harmonique.

- D'après Pappus[19], (C'C*) étant parallèle au rayon (ZA') du pinceau, le milieu de [C'C*] sur (YZ).

- **Conclusion :** N est sur (YZ).

**Scolies :** **(1)** deux autres milieux

[19] Pappus, proposition **131** livre **VII**, *Collections*




- Notons X le point d'intersection de (B"C") et (B'C'),
  A* le A-point de Nobbs de ABC,
  M le milieu de [B'B*]
  et L le milieu de [A'A*].

- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que M et L sont sur (XYZ).

  **(2)** (LMN) i.e. (XYZ) est la gaussienne du delta déterminé par le triangle A'B'C' et par la ménélienne (A*B*C*).[20]

**Énoncé traditionnel :**

*l'axe orthique du triangle de contact d'un triangle*
*est*
*la gaussienne du delta déterminé par ce triangle de contact et par la droite de Gergonne du triangle donné.*

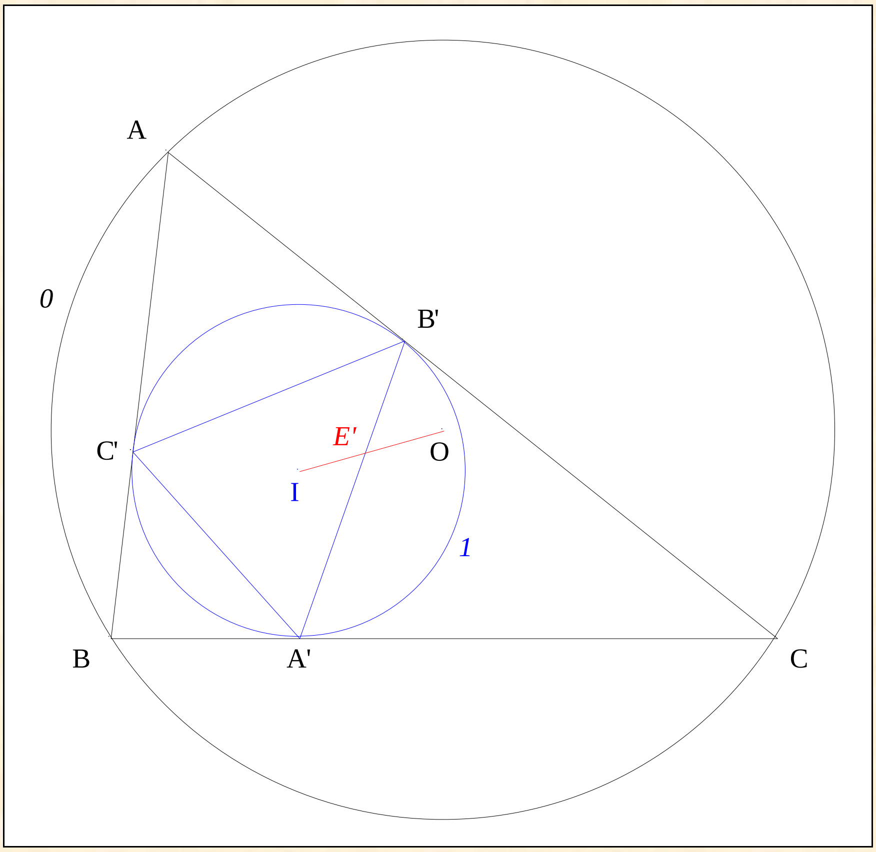
## 6. Le résultat d'Antoine Gob

**VISION**

**Figure :**

---

20 Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. **4**, p. 1-4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme




**Traits :** ABC un triangle,
*0* le cercle circonscrit à ABC,
O le centre de *0*,
*1* le cercle inscrit à ABC,
I le centre de *1*,
A'B'C' le triangle de contact de ABC
et *E'* la droite d'Euler de A'B'C'.

**Donné :** *E'* passe par I et O.[21]

**Énoncé traditionnel :**

*le centre du cercle circonscrit d'un triangle*
*est*
*sur la droite d'Euler de son triangle de contact.*

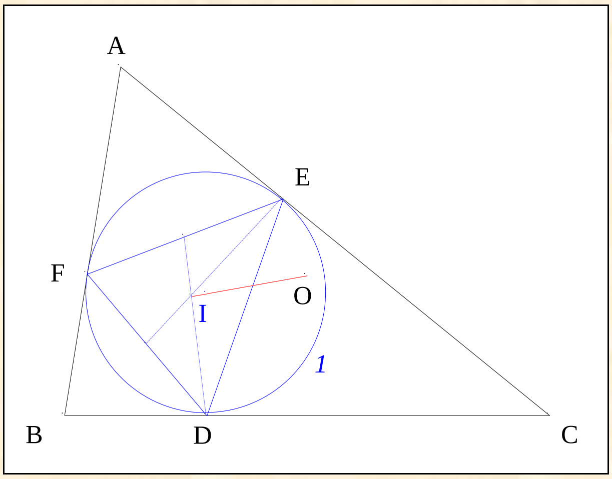
**Note historique :** la preuve d'Antoine Gob est trigonométrique.
Nous trouvons une preuve synthétique de ce résultat chez Mihalescu[22].
Lo Jacomo représentera ce résultat dans la revue française *APMEP*[23].

---

[21] Gob A., proposition 2, Sur la droite et le cercle d'Euler, *Notes de Géométrie Récentes*, supplément de *Mathesis* **9** (1889) ;
Ayme J.-L., La droite de Simson de Fe relativement au triangle de contact, G.G.G. vol. **7** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[22] Mihalescu C., *Geometria elementelor remarcabile*, Ed. Tehnica, Bucarest (1957) 42-43

[23] Lo Jacomo F., *APMEP*, n°**425**, énoncé **268**




Rappelons qu'Antoine Gob est parti d'un triangle DEF pour considérer son triangle tangentiel ABC :

*le centre du cercle circonscrit du triangle tangentiel d'un triangle*
*est*
*sur la droite d'Euler du triangle donné.*

Sachant que le point médian de DEF est sur la droite d'Euler de DEF, nous avons une nouvelle formulation due à Matthieu Weill :

*le centre O du cercle circonscrit d'un triangle, le centre I du cercle inscrit*
*et le point médian du triangle de contact du triangle donné,*
*sont alignés.*

Sachant que l'orthocentre de DEF est sur la droite d'Euler de DEF, nous avons une nouvelle formulation due à M. A. Hillier[24] :

*le centre O du cercle circonscrit d'un triangle, le centre I du cercle inscrit*
*et l'orthocentre du triangle de contact du triangle donné,*
*sont alignés.*

**Une courte biographie :**

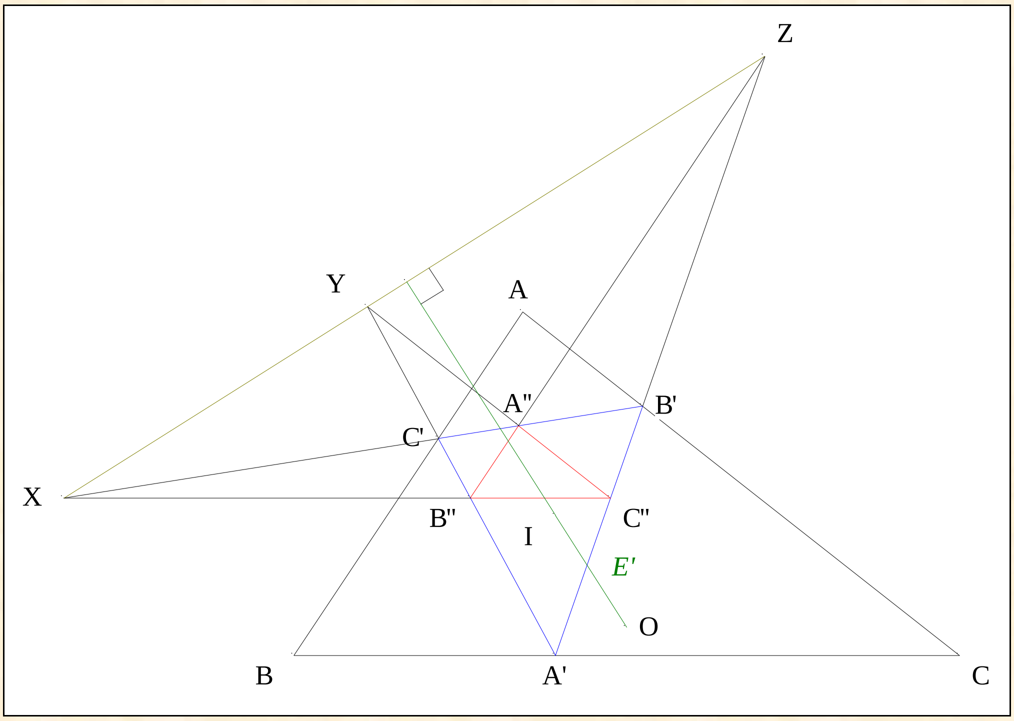
en 1894, Antoine Gob est professeur agrégé de l'Enseignement moyen à Hasselt (Belgique).
Avec Joseph Neuberg, il écrit un papier *Sur les foyers de Steiner d'un triangle*.
En 1889, il signe un article intitulé *Sur la droite et le cercle d'Euler* dans *Notes de Géométrie récente*, un supplément de *Mathesis*. La même année et l'année suivante, il publie des articles dans la revue de l'*AFAS*.
En 1890, au congrès scientifique de Limoges, il est le précurseur de l'inversion symétrique dû à Bernès, professeur à Paris.
En 1891, il est présent au congrès de l'*AFAS* à Marseille et publie à nouveau dans *Mathesis*.

## 7. La droite d'Euler est perpendiculaire à l'axe orthique

### VISION

[24] Hillyer M. A., *Educational Times* (1900) ;
i find it difficult [Euler line of intouch triangle], Iran 1995; Hungary-Israel Competition 2000; 97th Kürschák Competition 1997, *Mathlinks* du 15/06/2004 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=6228

**Figure :**




**Traits :** ABC un triangle,
A'B'C' le triangle de contact de ABC,
A"B"C" le triangle orthique de A'B'C',
(XYZ) l'axe orthique de A'B'C'
et *E'* la droite d'Euler de A'B'C'.

**Donné :** *E'* est perpendiculaire à (XYZ).[25]

**Scolies :** **(1)** (OI) est la droite d'Euler de A'B'C'
où
O (resp. I) est le centre du cercle circonscrit (resp. inscrit) de ABC.

**(2)** (XYZ) est la gaussienne (LMN) du delta
déterminé par
le triangle A'B'C' et par la ménélienne (A*B*C*).

**Énoncé traditionnel :**

*la droite d'Euler d'un triangle*
*est perpendiculaire à*
*l'axe orthique du triangle donné.*

**Note historique :** John Griffiths a considéré le triangle excentral d'un triangle.
Le fait que (OI) est perpendiculaire à (LMN) a été proposé comme problème[26] aux

---

[25] Griffiths J., *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1884) 345
Griffiths J., *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1865) 322
Lemoine E., *Nouvelles Annales*, Question 1023 ; solution de Gambey, *Nouvelles Annales* (1872) p. 187 **;**
Altshiller-Court N., *College Geometry*, Richmond (1936), Exercice **7** p. 205 ;
Ayme J.-L., La droite d'Euler est perpendiculaire à l'axe orthique, G.G.G. vol. **1** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

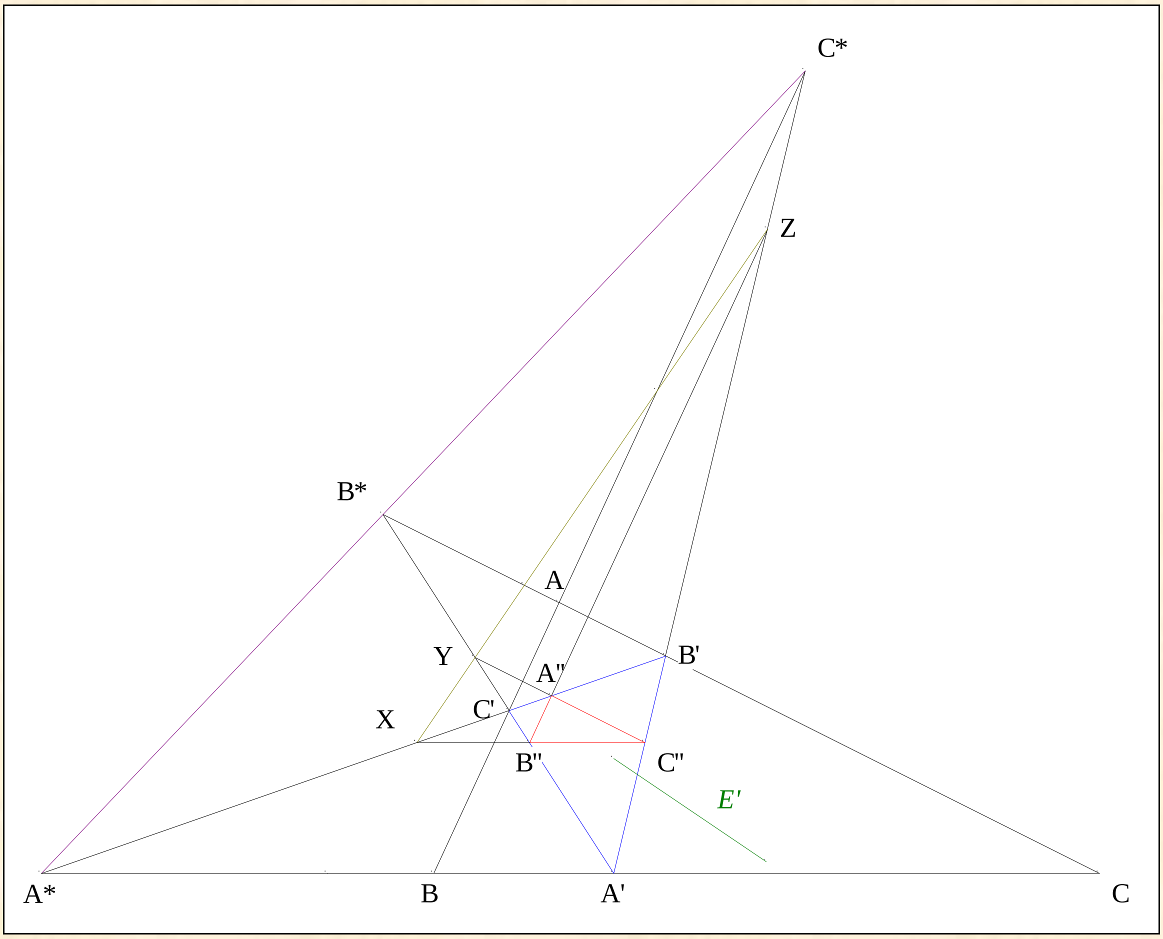
[26] Chine, M.O. (2007) problème **4**

Olympiades Mathématiques de Chine en 2007.

## 8. La droite de Steiner du delta "triangle de contact et droite de Gergonne"

### VISION

**Figure :**

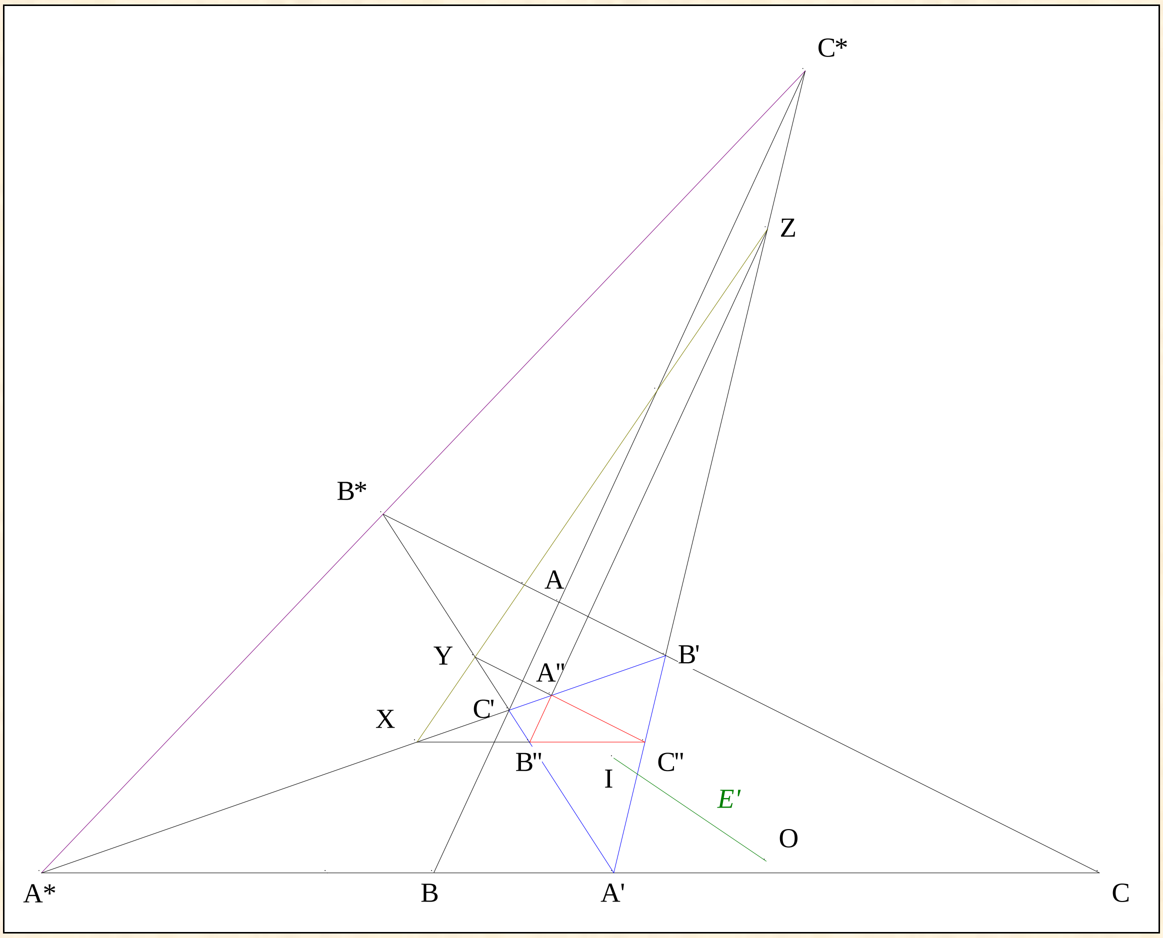



**Traits :** ABC un triangle,
A'B'C' le triangle de contact de ABC,
(A*B*C*) la droite de Gergonne de ABC,
A"B"C" le triangle orthique de A'B'C',
(XYZ) l'axe orthique de A'B'C'
et *E'* la droite d'Euler de A'B'C'.

**Donné :** *E'* est la droite de Steiner du delta déterminé par A'B'C' et (A*B*C*).[27]

### VISUALISATION

[27] Steiner J., *Annales de Gergonne*, **18** (1827-28) 302-304, proposition 4 ;
reprinted in *Gesammelte Werke*, **2** volumes, edited by Weierstrass K. (1881) ; Chelsea reprint.
Steiner J., *Journal* de Crelle **2** (1827) 97
Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. **4**, p. 4-6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme




- Notons O le centre du cercle circonscrit à ABC
  et I le centre du cercle inscrit de ABC.

- D'après B. 7. La droite d'Euler est perpendiculaire à l'axe orthique, *E'* = (OI) et *E'* ⊥ (XYZ).

- D'après B. 7. Le résultat d'Antoine Gob, note historique, *E'* passe par l'orthocentre de A'B'C'.

- D'après B. 5. Un milieu sur l'axe orthique du triangle de contact, scolie 2,
  (XYZ) est la gaussienne du delta déterminé par A'B'C' et (A*B*C*).

- D'après Steiner "La droite de Gauss et la droite de Steiner"[28], *E'* est perpendiculaire à (XYZ),

- **Conclusion :** *E'* est la droite de Steiner du delta déterminé par A'B'C' et (A*B*C*).

**Scolie :** *E'* passe par les orthocentres des triangles A'B'C', A'B*C*, B'C*A* et C'A*B*.

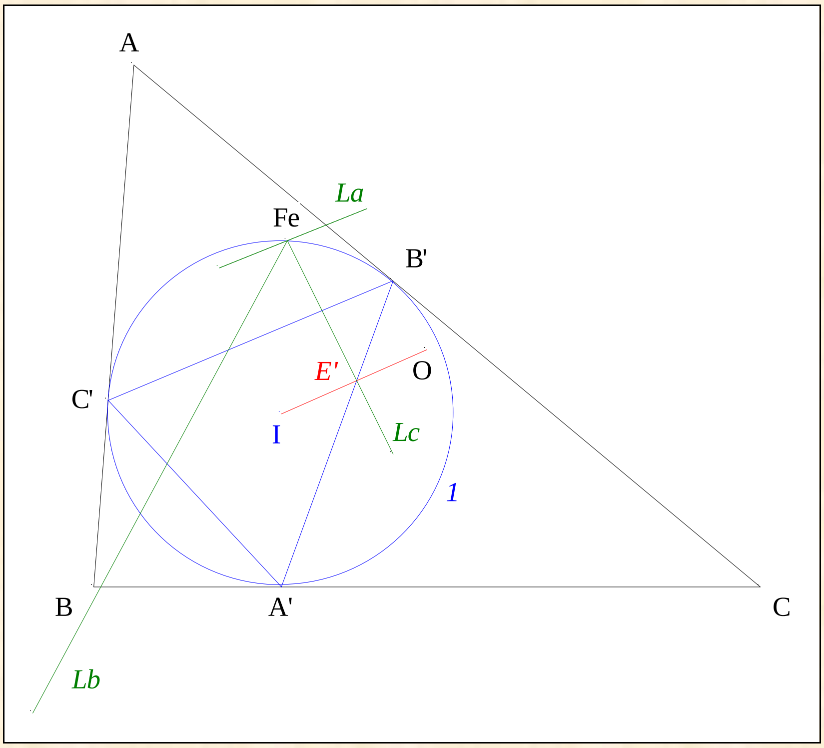
## 9. Symétrique de (IO) par rapport aux côtés du triangle de contact

**VISION**

**Figure :**

---

[28] Steiner J., *Annales de Gergonne* **18** (1827-28) 302-304, proposition **7** ;
Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. **4** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme




**Traits :** ABC un triangle,
*1* le cercle inscrit à ABC,
I le centre de *1*,
A'B'C' le triangle de contact de ABC,
*E'* la droite d'Euler de A'B'C',
*La*, *Lb*, *Lc* les symétriques de (OI) resp. par rapport à (B'C'), (C'A'), (A'B')
et Fe le point de Feuerbach de ABC.

**Donné :** *La*, *Lb*, *Lc* passent par Fe. [29]

**Scolies :** **(1)** *E'* = (OI)
où
O (resp. I) est le centre du cercle circonscrit (resp. inscrit) de ABC.

**(2)** Fe est sur le cercle circonscrit *1* de A'B'C'.

**(3)** Fe est l'antipoint de Steiner de *E'* relativement à A'B'C'.

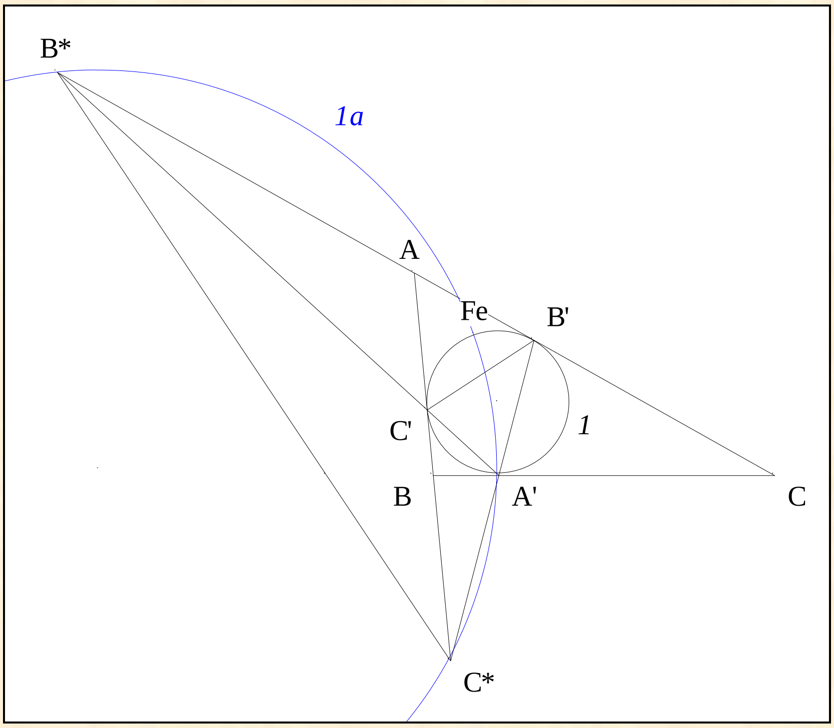
**Énoncé traditionnel :** *les symétriques*
*de la droite joignant les centres des cercles circonscrit et inscrit d'un triangle,*
*par rapport aux côtés du triangle de contact du triangle donné,*
*concourent au point de Feuerbach du triangle donné.*

## C. LA PREUVE

[29] Ayme J.-L., Symétriques de (OI) par rapport au triangle de contact, G.G.G. vol. **4** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

## VISION

**Figure :**

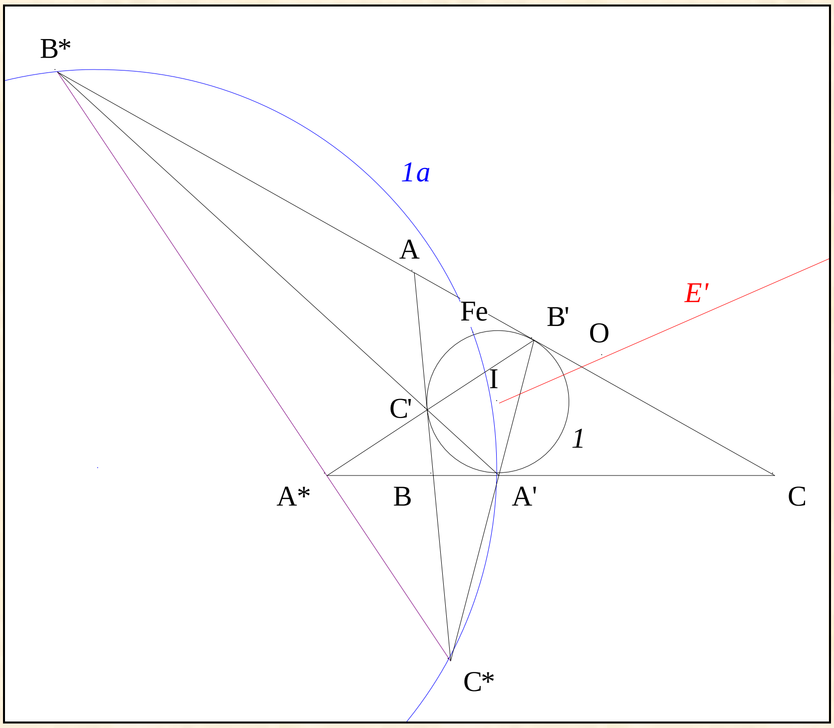



| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | *1* | le cercle inscrit de ABC, |
| | A'B'C' | le triangle de contact de ABC, |
| | B*, C* | les B, C-points de Nobbs de ABC, |
| | *1a* | le cercle circonscrit au triangle A'B*C* |
| et | Fe | le point de Feuerbach de ABC. |

**Donné :** *1a* passe par Fe.[30]

## VISUALISATION

[30] Feuerbach point : G, D, X, X concyclic, *Mathlinks* du 14/07/2007 ;
http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?search_id=64018334&t=158254




- Notons A* le A-points de Nobbs de ABC,
  I le centre de *1*,
  O le centre du cercle circonscrit à ABC
  et *E'* la droite d'Euler de A'B'C'.

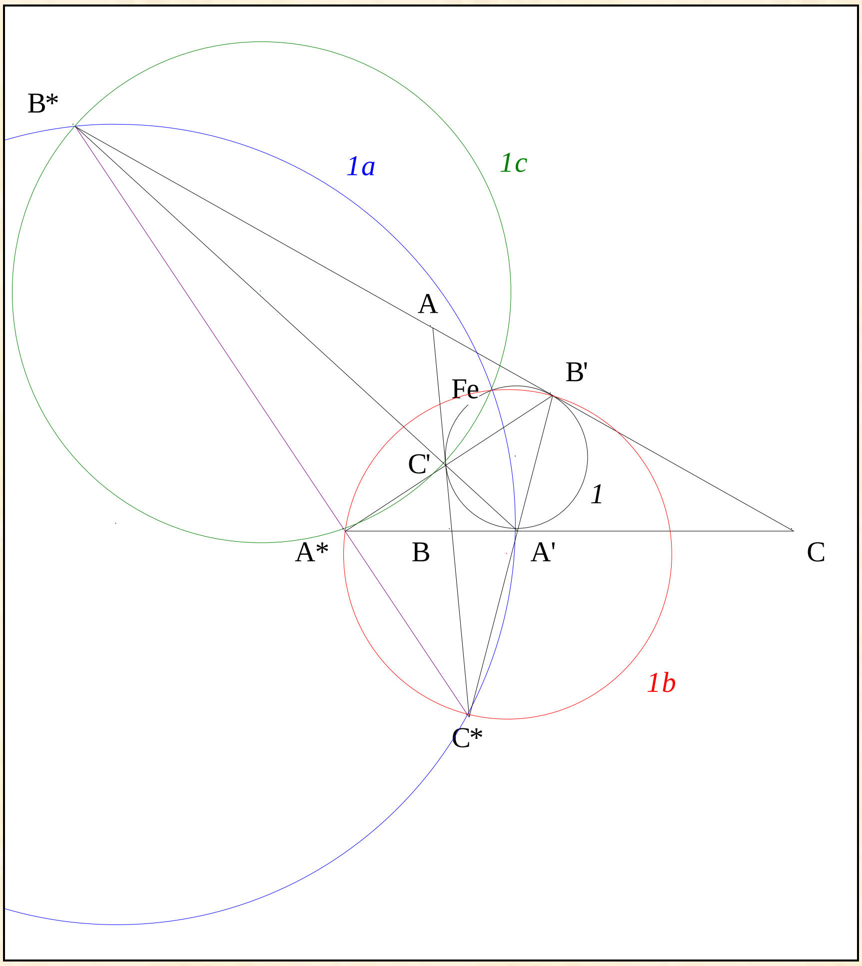
- **Scolies :** **(1)** *E'* = (OI).
  **(2)** *E'* est la droite de Steiner du delta déterminé par A'B'C' et (A*B*C*).
  **(3)** *E'* passe par les orthocentres des triangles A'B'C' et A'B*C*.
  **(4)** les symétriques de *E'* resp. par rapport à (C'A'), (A'B') passent par Fe.
  **(5)** *E'* est une droite de Steiner de A'B*C*.

- D'après "L'antipoint de Steiner" [31], Fe est sur *1a*.

- **Conclusion :** *1a* passe par Fe.

**Scolies :** **(1)** vision triangulaire

[31] Ayme J.-L., Auguste Miquel, élève de l'institution Barbet, G.G.G. vol. **13**, p. 31-34 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme




- Notons *1b*, *1c* les cercles circonscrits aux triangles B'C*A*, C'A*B*.

- **Conclusion :** *1b*, *1c* passent par Fe.

**(2)** Fe est le point de Miquel-Wallace du delta déterminé par A'B'C' et (A*B*C*).

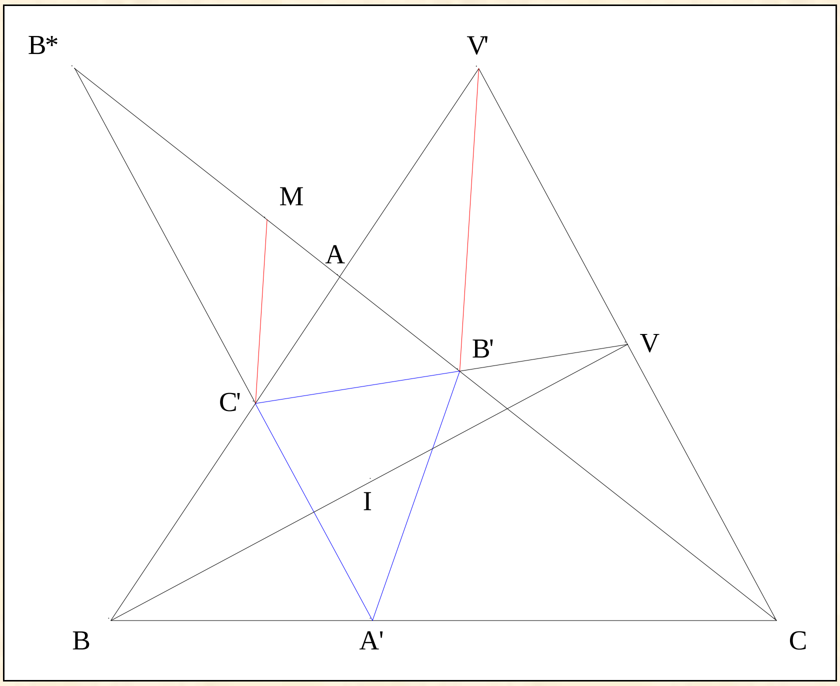
## D. APPENDICE

**Commentaire :** cette étude me permet de proposer deux exercices au lecteur.

### 1. Premier exercice

**VISION**

**Figure :**




**Traits :** ABC un triangle,
I le centre de ABC,
A'B'C' le triangle de contact de ABC,
B* le B-point de Nobbs de ABC,
M le milieu de [B*B'],
V le point d'intersection de (B'C') et (BI),
et V' le point d'intersection de (CV) et (AB).

**Donné :** (B'V') est parallèle à (C'M).[32]

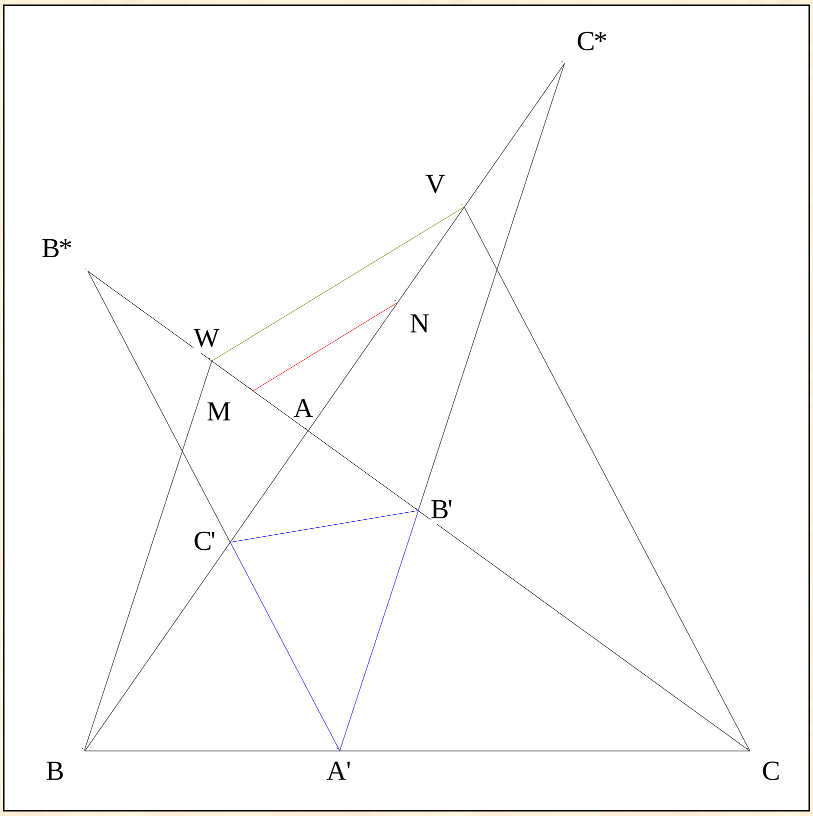
**Conseils :** considérer la parallèle à (B'C') passant par V', puis voir deux triangles homothétiques et conclure.

**2. Second exercice**

**VISION**

**Figure :**

[32] Ayme J.-L., Two parallels, *Mathlinks* du 05/03/2010 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=336090




**Traits :** ABC un triangle,
A'B'C' le triangle de contact de ABC,
*G* l'axe orthique de A'B'C',
V le point de (AB) tel que le triangle BCV soit B-isocèle
et W le point de (AC) tel que le triangle CBW soit C-isocèle.

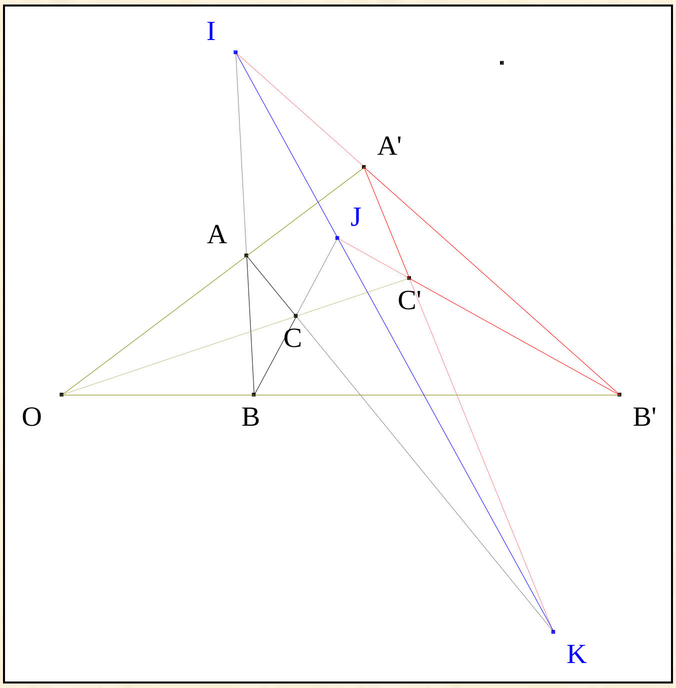
**Donné :** (VW) est parallèle à *G* .[33]

**Conseils :** considérer un résultat de cet article relatif à un axe orthique, puis voir deux couples de parallèles et conclure avec le petit théorème de Pappus.

## E. ANNEXE

### 1. Le théorème des deux triangles

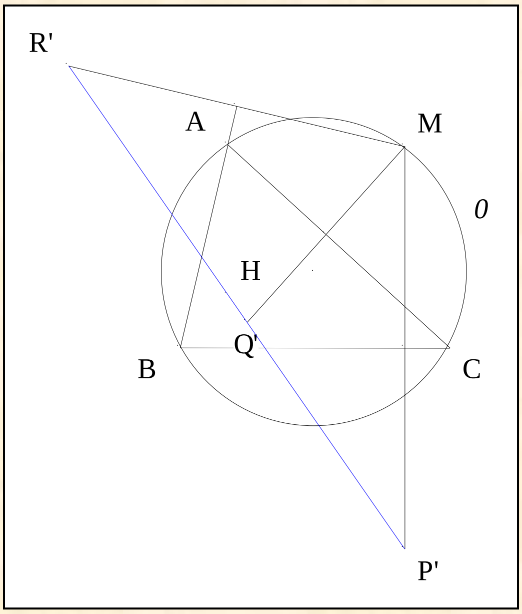
[33] Ayme J.-L., Parallel to an orthic axis, *Mathlinks* du 07/03/2010 ; http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=336504 ;
A little and nice problem, Message *Hyacinthos* # 18687 du 07/03/2010 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/18687




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | A'B'C' | un triangle tel que les droites (AA') et (BB') soient concourantes, |
| | O | le point de concours de (AA') et (BB'), |
| et | I, J, K | le point d'intersection de (AB) et (A'B'), de (BC) et (B'C'), de (CA) et (C'A'). |

**Donné :** (CC') passe par O *si, et seulement si,* I, J et K sont alignés. [34]

## 2. La droite et l'antipoint de Steiner




| | | |
|---|---|---|
| **Traits :** | ABC | un triangle, |
| | H | l'orthocentre de ABC, |
| | *0* | le cercle circonscrit à ABC, |
| | M | un point, |

[34] Ce résultat se trouve dans les écrits d'Abraham Bosse (Tours, 1604-Paris, 1676), un continuateur de l'œuvre de Desargues, qui serait son élève d'après François Joseph Servois et Jean-Victor Poncelet

et P', Q', R' les symétriques de M resp. par rapport à (BC), (CA), (AB).

**Donné :** M est sur *0* *si, et seulement si,* P', Q', R' et H sont alignés. [35]

---

[35] Steiner J. ;
Ayme J.-L., La droite de Simson de Fe relativement au triangle de contact, G.G.G. vol. **7**, p. 11 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme