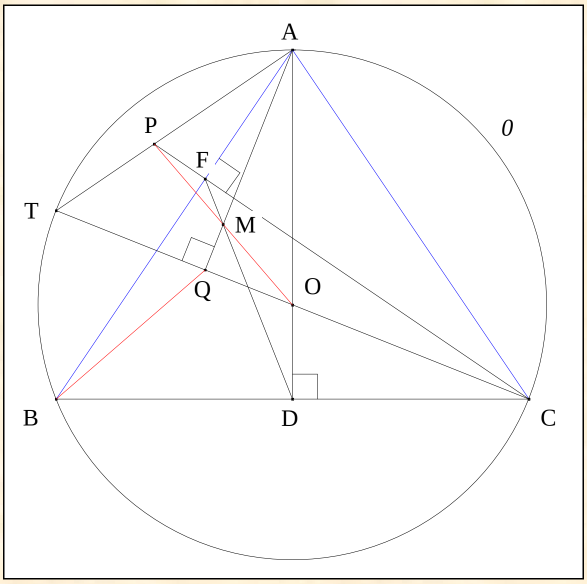
CULTURE GÉOMÉTRIQUE 5

UN POINT MILIEU

DANS

UN TRIANGLE ISOCÈLE

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente un problème résoluble rapidement par le théorème de Ceva…
En le solutionnant patiemment à sa façon, cette démarche lui permet de découvrir une remarquable perpendicularité…
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents a problem solvable quickly by Ceva theorem...
And solving patiently in its own way, this approach allows him to discover a remarkable perpendicularity...
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

Sommaire

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 29/08/2016 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

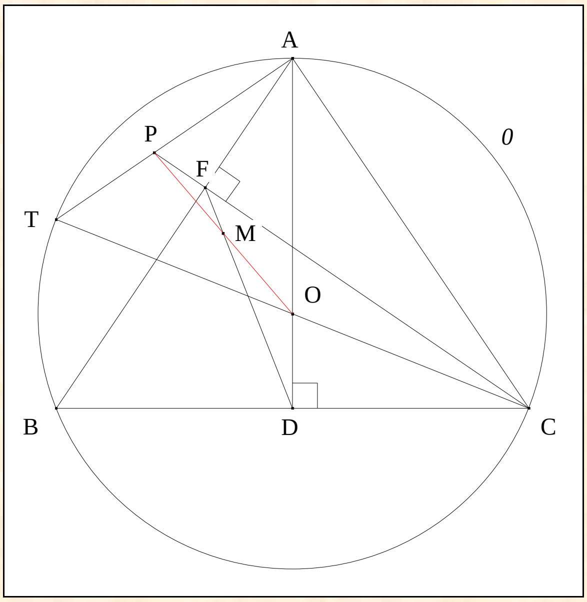
A. LE PROBLÈME

OU

UN POINT MILIEU

VISION

Figure :

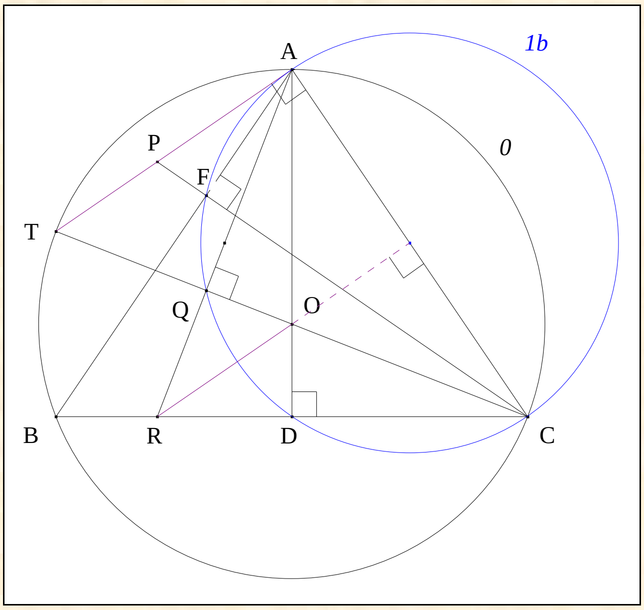


Traits :	ABC	un triangle A-isocèle,
	D, F	les pieds de A, C-hauteur de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	T	le second point d'intersection de (CO) avec *0*,
	P	le point d'intersection de (AT) et (CF),
et	M	le point d'intersection de (OP) et (DF).

Donné : M est le milieu de [OP]. [2]

VISUALISATION

[2] hard geometry, AoPS du 01/12/2015 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1169144_hard_geometry

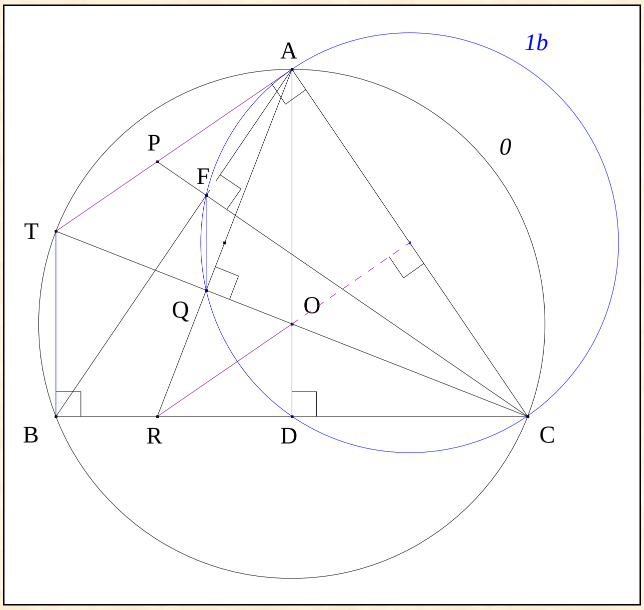


- Notons 1b le cercle de diamètre [AC] ; il passe par D et F ;
  Q le second point d'intersection de (CO) avec *1b*
  et R le point d'intersection de (AQ) et (BC).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (APT) ⊥ (AC).

- D'après Archimède "Orthocentre", O étant l'orthocentre du triangle ARC, (AC) ⊥ (RO).

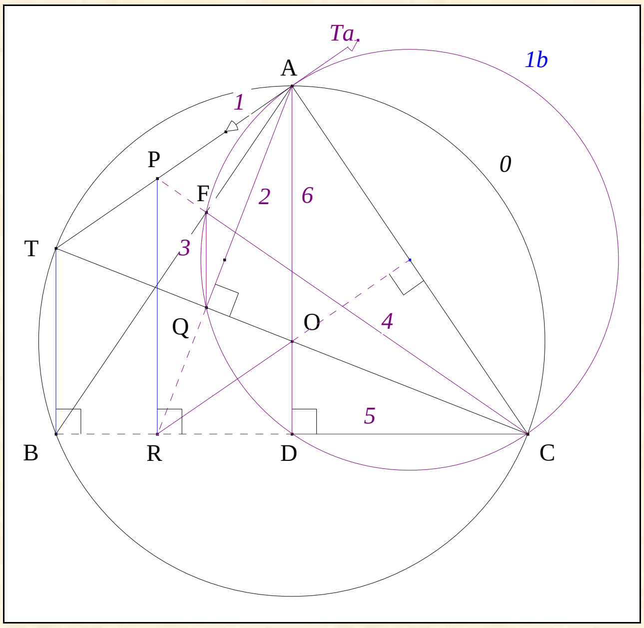
- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaires, (AP) // (RO).



- Les cercles *1b* et *0*, les points de base A et C, les moniennes (FAB) et (QCT), conduisent au théorème **1** de Reim ; en conséquence, (FQ) // (BT).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (BT) ⊥ (BC) ; en conséquence, (FQ) ⊥ (BC).

- **Conclusion partielle :** (FQ), (BT) et (AD) sont parallèles entre elles.



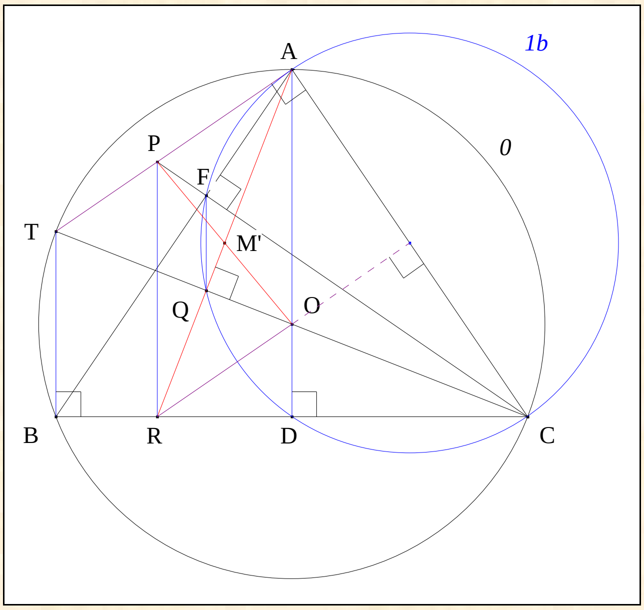
- Notons *Ta* la tangente à *1b* en A i.e. (AP).

- ABC étant A-isocèle, A, O et D sont alignés.

- D'après Pascal-Aubert "Hexagramma mysticum" [3]
  appliqué à l'hexagone cyclique *Ta* QFCDA **(1)** (PR) en est la pascale

  (2) (PR) // (AOD).

- **Conclusion partielle :** le quadrilatère APRO est un parallélogramme. [4]



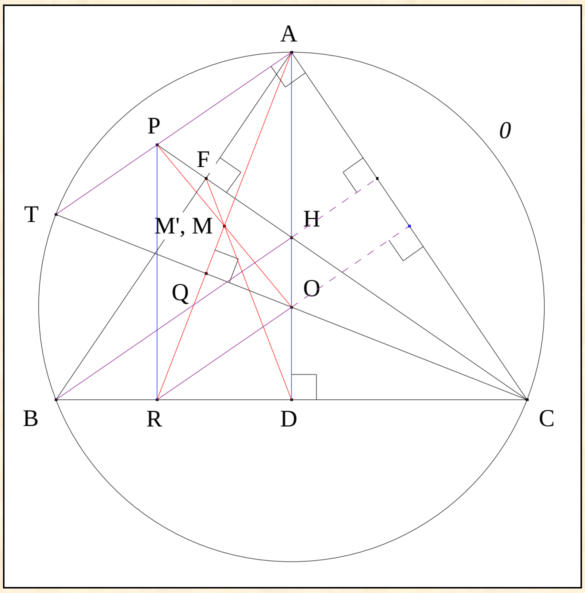
- Notons M' le point d'intersection de (PO) et (AR).

- **Conclusion partielle :** APRO étant un parallélogramme, M' est le milieu de [OP].

---

[3] Ayme J.-L., Hexagramma mysticum, G.G.G. vol. **12** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[4] Ayme J.-L., A parallelogramm, AoPS du 29/08/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1297945_a_parallelogramm



- Notons H l'orthocentre de ABC.

- **Scolie :** (AP), (BH) et (RO) sont parallèles entre elles.

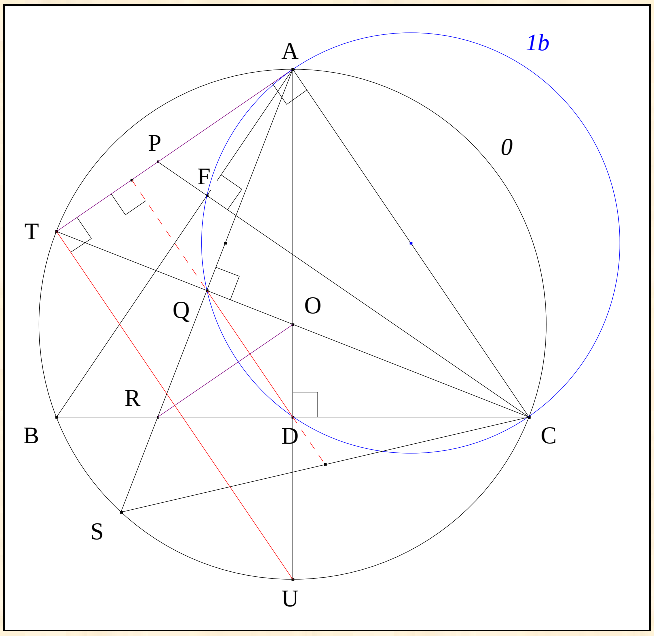
- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [5]
(BH) étant l'arguésienne des triangles APF et ROD, (AR), (PO) et (FD) sont concourantes ;
en conséquence, M' et M sont confondus.

- **Conclusion :** M est le milieu de [OP].

[5] Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 40 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

B. DEUX RÉSULTATS ANNEXES

1. Un milieu [6]



- Notons S, U le second point d'intersection de (AQ) avec *0*.

- Les cercles *1b* et *0*, les points de base A et C, les moniennes (DAU) et (QCT), conduisent au théorème **0** de Reim ; en conséquence, (DQ) // (UT).

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi-cercle", (UT) ⊥ (AT) ; en conséquence, (DQ) ⊥ (AT).

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de Brahmagupta" [7], (DQ) passe par le milieu de [CS].

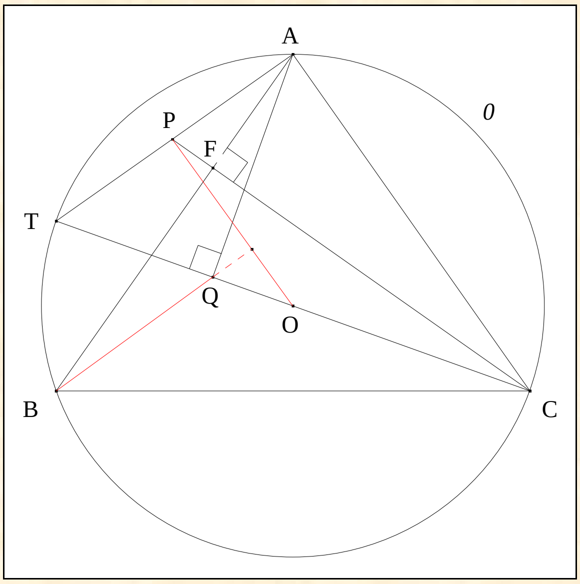
[6] Ayme J.-L., A midpoint, AoPS du 29/08/2016 ; http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1297912_a_midpoint

[7] Ayme J.-L., Le théorème de brahmagupta, G.G.G. vol. **7** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

2. Deux perpendiculaires [8]

VISION

Figure :



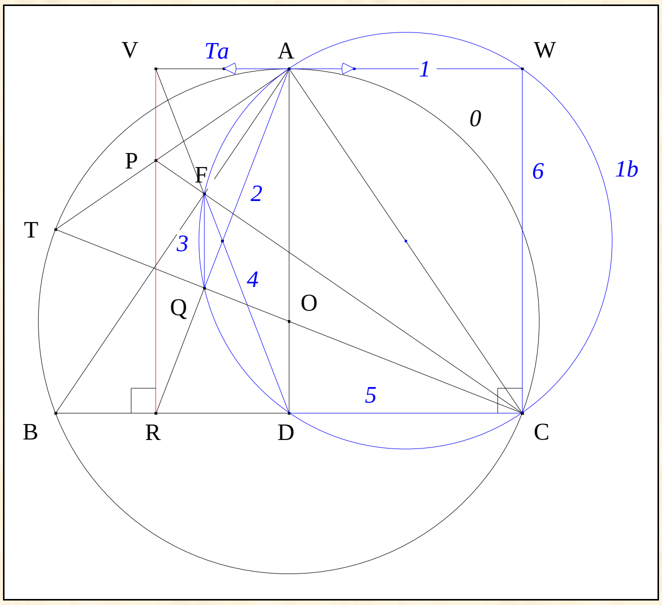
Traits :	ABC	un triangle A-isocèle,
	F	le pied de la C-hauteur de ABC,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	O	le centre de *0*,
	T	le second point d'intersection de (CO) avec *0*,
	P	le point d'intersection de (AT) et (CF),
et	Q	le pied de la perpendiculaire à (CO) issue de A.

Donné : (BQ) est perpendiculaire à (OP).

VISUALISATION

- Reconsidérons la figure précédente…

[8] Ayme J.-L., Two perpendicular, AoPS du 29/08/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1297916_two_perpendiculars
Deux perpendiculaires, *Les-Mathematiques.net* ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1318868



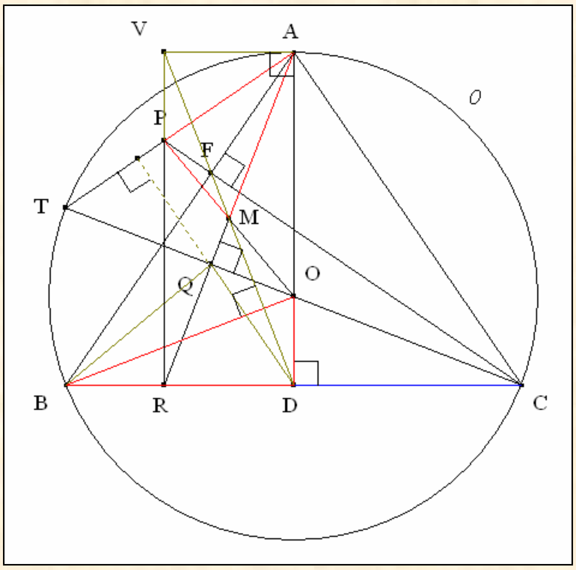
- Notons *Ta* la tangente à *0* en A
  V le point d'intersection de *Ta* et (DF),
  et W le second point d'intersection de *Ta* avec *1b*.

- **Scolie :** (CW) ⊥ *Ta*

- D'après Aubert-Pascal "Hexagramma mysticum"
  appliqué à l'hexagone cyclique WQFDCW **(1)** (VR) en est la pascale

  (2) (VR) // (QF)

- **Conclusion partielle :** (VR), (QF) et (CW) étant parallèles entre elles, V, P et R sont alignés.



- D'après von Nagel "Un rayon" [9], (BO) ⊥ (DF).

- **Scolie :** V est le pôle d'orthologie [10] du triangle AMP par rapport au triangle BDO.

- D'après Jacob Steiner, Q est le pôle d'orthologie du triangle BDO par rapport au triangle AMP.

---

[9] Ayme J.-L., Cinq théorèmes de Christian von Nagel, G.G.G. vol. **3**, p. 21-22 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

[10] Ayme J.-L., A propos de deux triangles orthologiques, G.G.G. vol.**6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

- **Conclusion :** (BQ) est perpendiculaire à (OP).