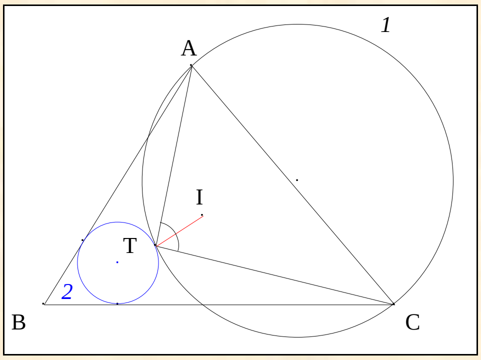
UN REMARQUABLE RÉSULTAT

DE

VLADIMIR PROTASSOV

†

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. Nous présentons une preuve originale et purement synthétique d'un problème de Vladimir Protassov publié en 1994 dans la rubrique des problèmes à résoudre de la revue française *APMEP*. Cet article commence par un lemme "catalytique", se poursuit par la preuve en question et se termine par deux illustrations.

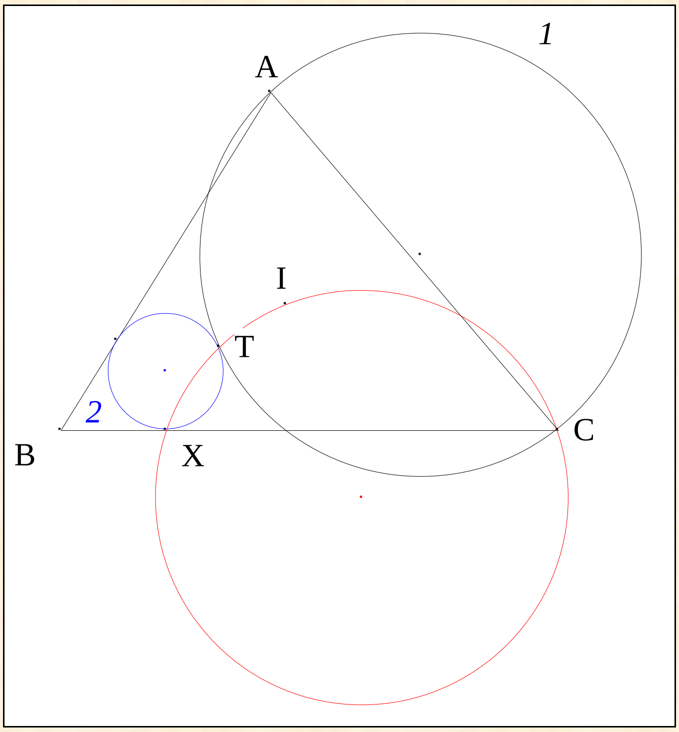
Sommaire

[1] St.-Denis, Île de la Réunion (France).

A. UN LEMME "CATALYTIQUE" [2]

VISION

Figure :

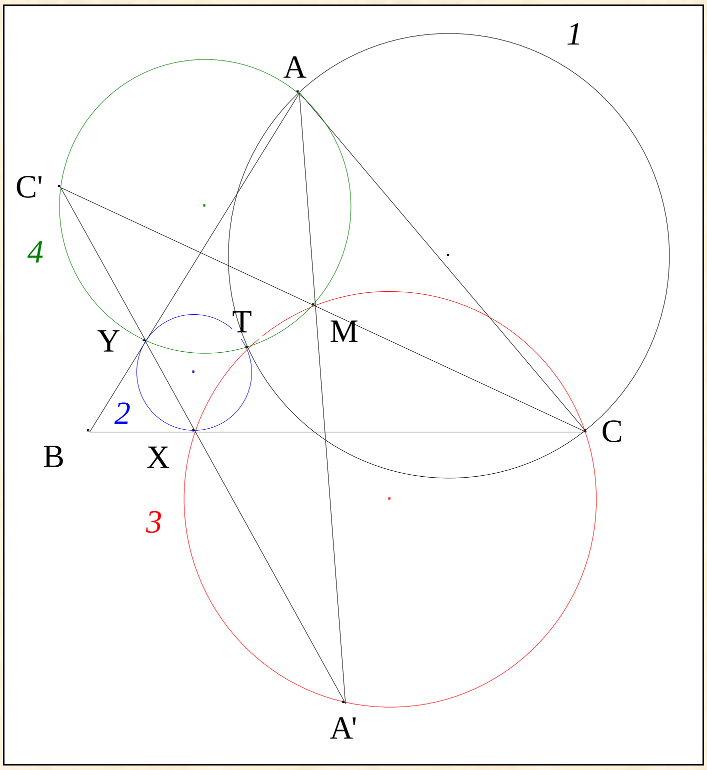


Traits : ABC un triangle,
I le centre de ABC,
1 un cercle passant par A, C et rencontrant [BC] et [BA],
2 le cercle tangent à (BC), (BA) et extérieurement à *1*,
T le point de contact de *2* et *1*,
et X le point de contact de *2* avec (BC).

Donné : X, T, I et C sont cocycliques.

VISUALISATION

[2] O.M. Inde (2001) problème 2.



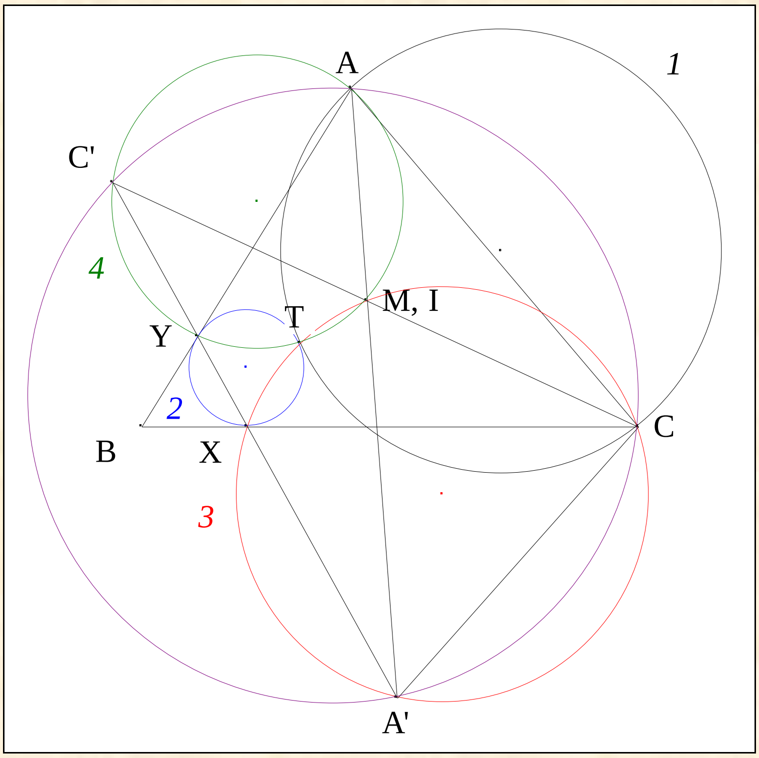
- Notons Y le point de contact de *2* avec (AB),
  3 le cercle passant par C, T, X,
  4 le cercle passant par A, T, Y,
  M le second point d'intersection de *3* et *4*
  A' le second point d'intersection de (AM) avec *3*,
  et C' le second point d'intersection de (CM) avec *4*.

- D'après "Le théorème des trois cercles"[3] (Cf. Annexe 1) appliqué à *2*, *3* et *4* concourants en T, A', X et Y sont alignés.

- D'après "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 1) appliqué à *2*, *3* et *4* concourants en T, C', Y et X sont alignés.

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome d'incidence Ia, A', C', X et Y sont alignés.

[3] Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, G.G.G. volume 2 (2008).



- **Conclusion partielle :** d'après Lebesgues "Le théorème des cinq cercles"[4] (Cf. Annexe 2) appliqué à *1*, *2*, *3* et *4*, A, C, A' et C' sont cocycliques.

- D'après le théorème de l'angle inscrit, <CAA' = <CC'A' (= <MC'Y) ; <MC'Y = <MAY (= <A'AB) ;

  par transitivité de la relation =, <CAA' = <A'AB .

- **Conclusion partielle :** (AMA') est la A-bissectrice intérieure de ABC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (CMC') est la C-bissectrice intérieure de ABC ;
  en conséquence, M et I sont confondus.

- **Conclusion :** X, T, I et C sont cocycliques.

Scolies : **(1)** Y, T, I et A sont cocycliques

(2) le résultat reste vrai lorsque *1* est tangent à (BA) en A.

Note historique : ce résultat[5] a été reproposé sur le site *Mathlinks* en 2005.
Les solutions ont recours soit à l'inversion, soit à un calcul de rapports.

---

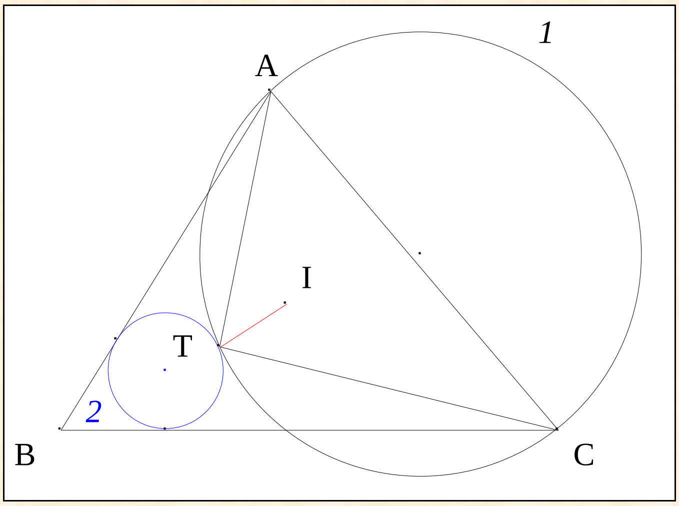
[4] Ayme J.-L., Du théorème de Reim au théorème des six cercles, G.G.G. volume 2 (2008).

[5] Yetti, Concyclic points with triangle incenter, *Mathlinks* (20/06/2005).
http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=41667.

B. LE RÉSULTAT DE VLADIMIR PROTASSOV [6]

VISION

Figure :

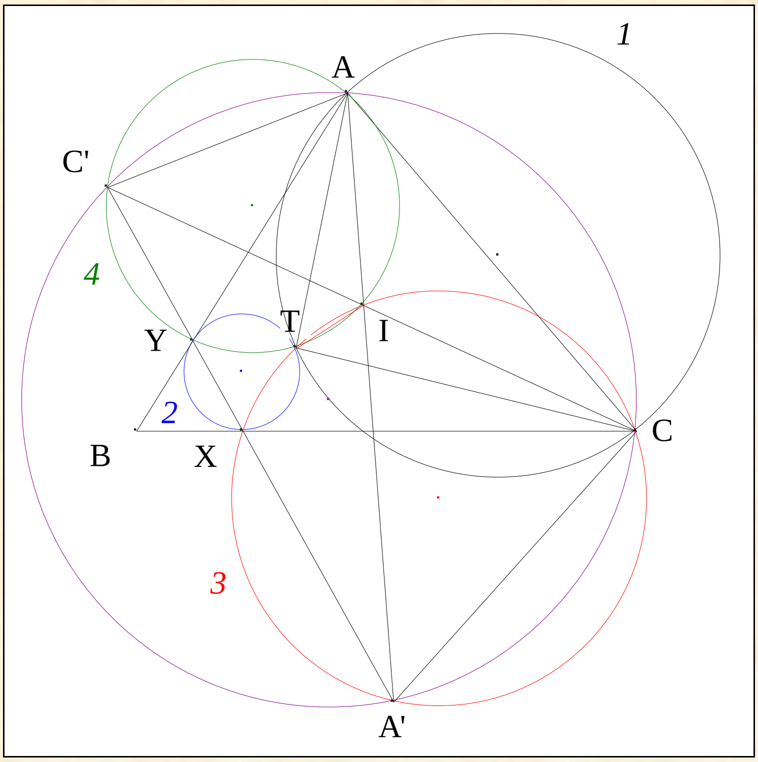


Traits :	ABC	un triangle,
	I	le centre de ABC,
	1	un cercle passant par A, C, et rencontrant [BC] et [BA],
	2	le cercle tangent à (BC), (BA) et extérieurement à *1*
et	T	le point de contact de *2* et *1*.

Donné : (TI) est la T-bissectrice intérieure du triangle TAC.

VISUALISATION

[6] Protassov V., problème n° 162, *APMEP* (1995?) 510-512.



- Notons X, Y les points de contact de *2* resp. avec (BC), (AB),
  3 le cercle passant par C, T, X,
  4 le cercle passant par A, T, Y
  et A', C' les seconds points d'intersection de (AI) avec *3*, de (CI) avec *4*.

- D'après I., **(1)** I est le second point d'intersection de *3* et *4*
  (2) A, C, A' et C' sont cocycliques.

- D'après le théorème de l'angle inscrit, <ITA = <IC'A (= <CC'A) ;
  <CC'A = <CA'A (= <CA'I)
  <CA'I = <CTI ;

  par transitivité de la relation =, <ITA = <CTI.

- **Conclusion :** (TI) est la T-bissectrice intérieure du triangle TAC.

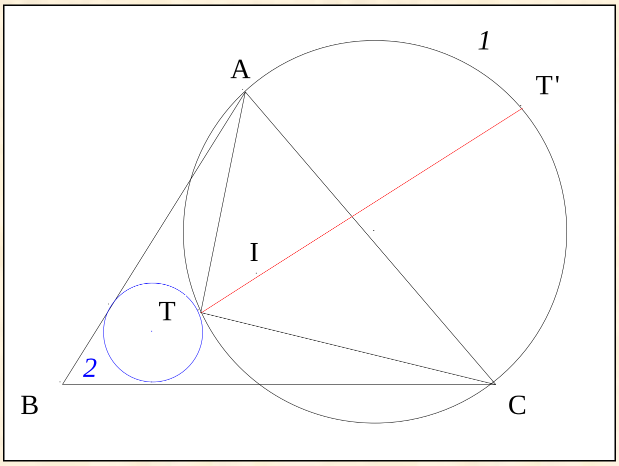
Commentaire : ce résultat a été proposé par le russe Vladimir Protassov de Moscou dans la revue française *APMEP* en ces termes :

"une circonférence passant par les points A et B rencontre les segments AB et BC en des points K et L respectivement. Une autre circonférence tangente aux segments CK et CL est tangente aussi à l'arc KL en un point M.
Montrer que la bissectrice de l'angle AMB passe le centre du cercle inscrit au triangle ABC".

Une solution basée sur une courbe isoptique conduisant à une cubique, plus précisément à une strophoïde[7], a été présentée dans la même revue par l'Inspecteur Général Dominique Roux de Limoges (France).

Scolies : **(1)** position de T ou une construction rapide de T

[7] Lemaire J., *Hyperbole Équilatère et Courbes Dérivées*, Vuibert (1927) 87.



- Notons T' le second T-perpoint du triangle TCA.

- **Conclusion :** T, I et T' sont alignés.

(2) *2* est "l'un des deux cercles extérieurs de Protassov de ABC relativement à *1*".

Une photo de Vladimir Protassov

Sur le tableau de droite, la figure correspond à un cercle de Thébault[8].

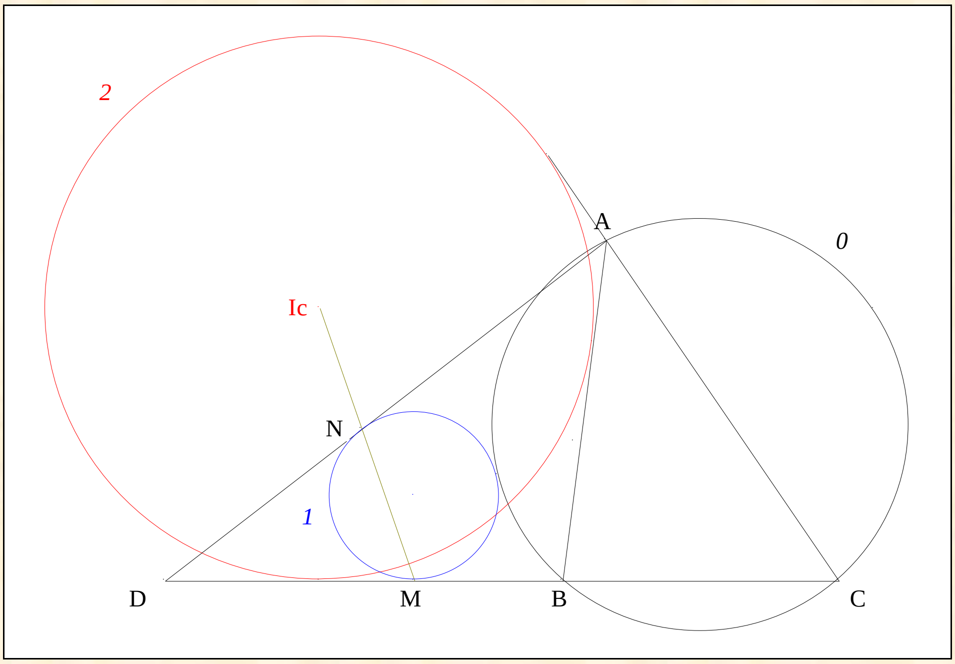
[8] Ayme J.-L., Sawayama or Thébault's theorem, G.G.G. vol. 10 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme ; *Forum Geometricorum* (2003) 225-229 ; http://forumgeom.fau.edu/.

C. TROIS ILLUSTRATIONS

1. Une équivalence

VISION

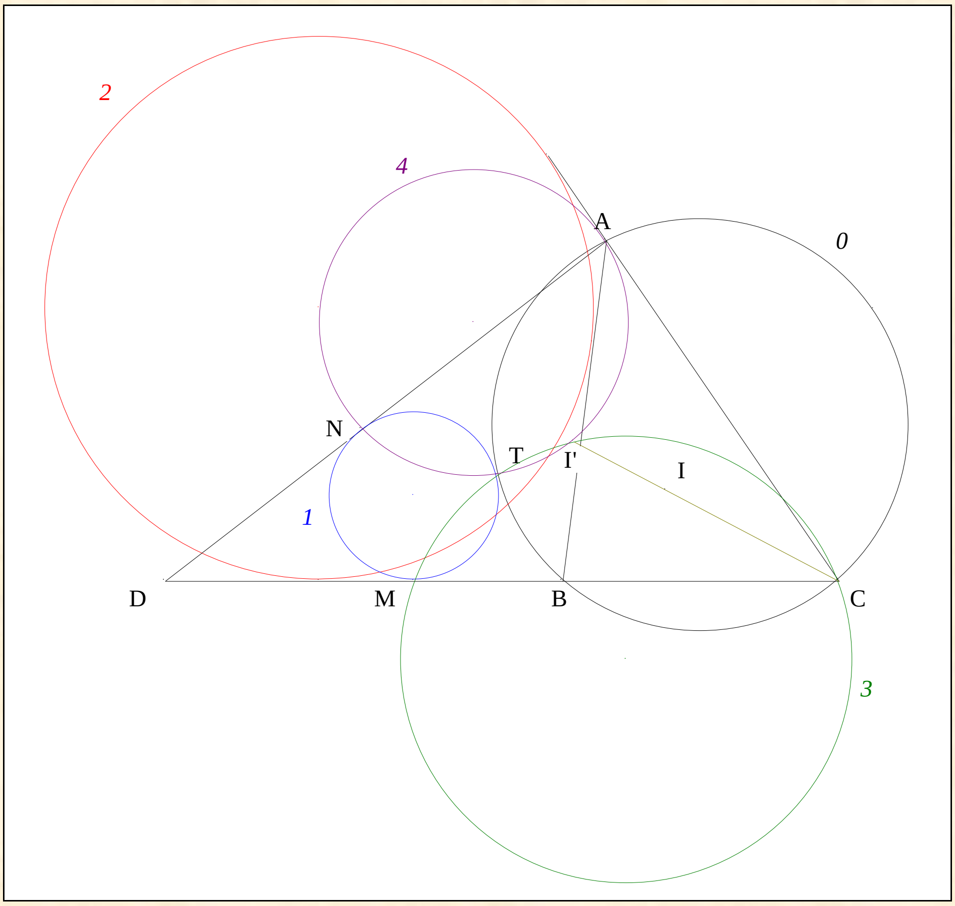
Figure :



Traits : ABC un triangle,
0 le cercle circonscrit à ABC,
D un point de (BC),
1 le cercle tangent resp. à (DB), (DA) comme indiqué sur la figure,
M, N les points de contact de *1* resp. avec (DB), (DA),
2 le C-excercle de ABC
et Ic le centre de *2*.

Donné : *1* est tangent extérieurement à *0* *si, et seulement si,* (MN) passe par Ic.

VISUALISATION NÉCESSAIRE

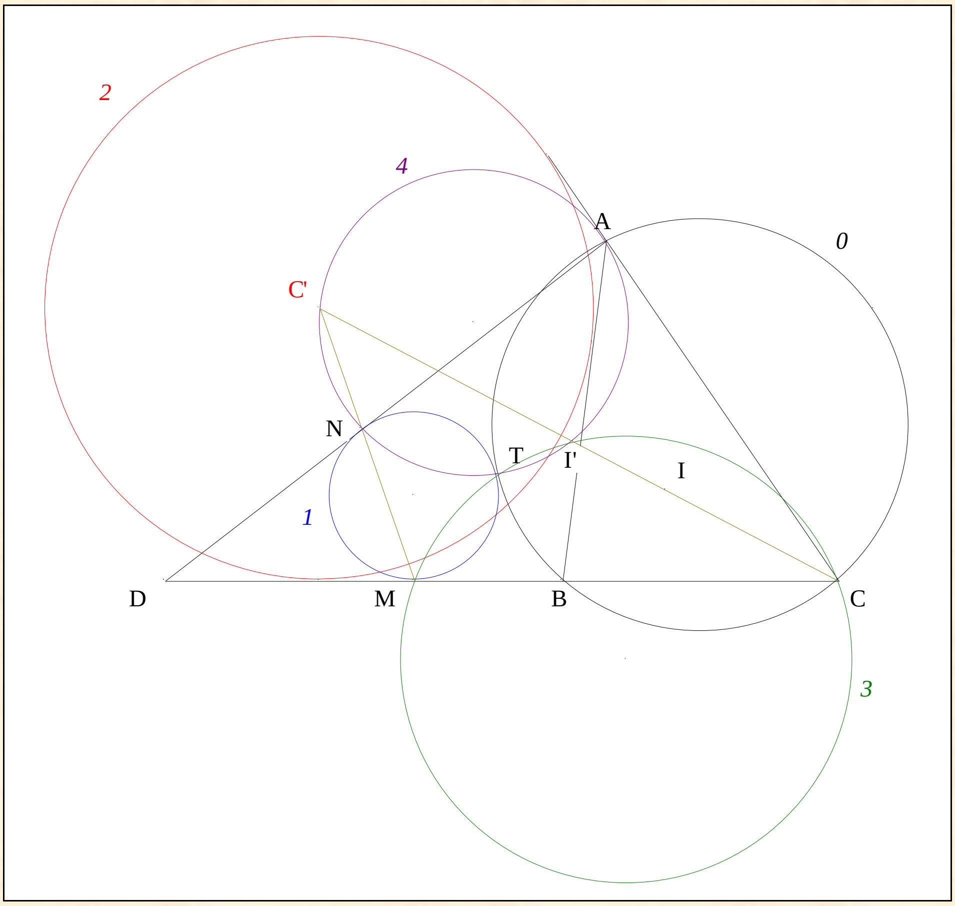


- *1* est tangent extérieurement à *0*.

- Notons T le point de contact de *1* et *0*
  I' le centre du triangle ADC,
  3 le cercle passant par C, T, M,
  4 le cercle passant par A, T, N
  et I le centre de ABC.

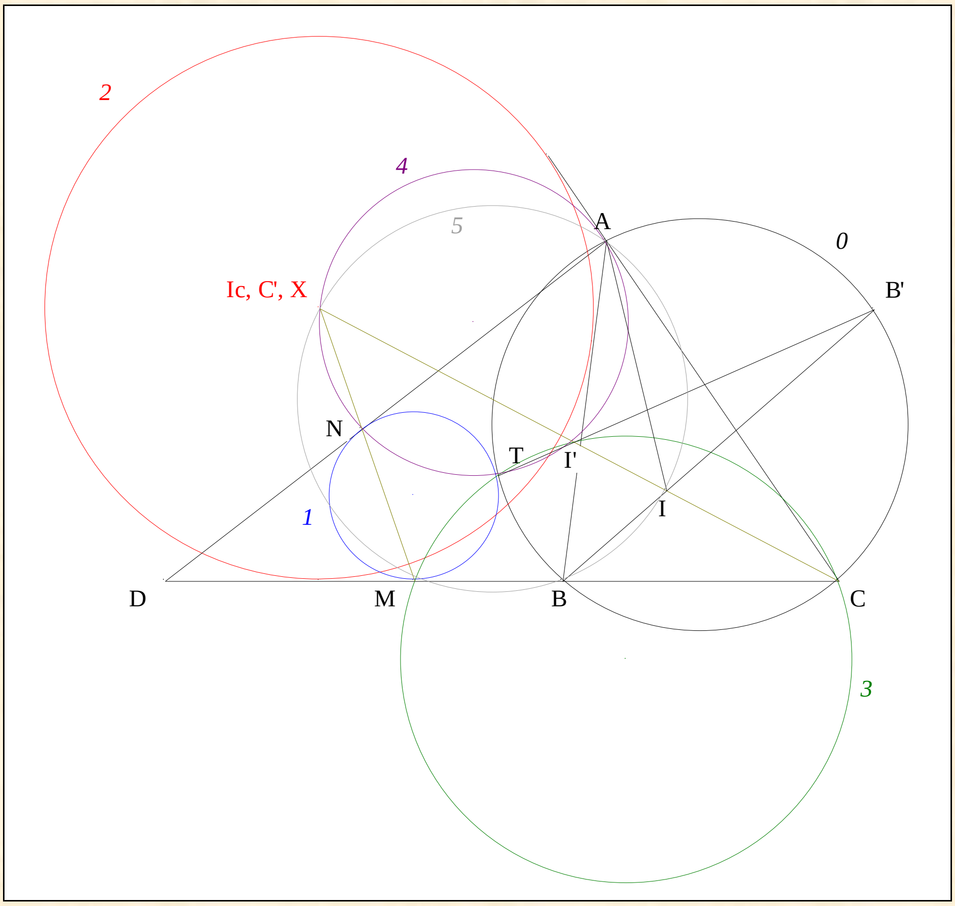
- **Scolies :** **(1)** d'après II 2. Le résultat de Protassov, *3* et *4* passent par I' [9]
  (2) C, I et I' sont alignés.

[9] Ayme J.-L., Un remarquable résultat de Vladimir Protassov, G.G.G. vol. 2, p. 1-4 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/vol2.html.



- Notons C' le second point d'intersection de (CII') avec *4*.

- D'après "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 2)
  appliqué à *1*, *3* et *4* concourants en T, C', M et N sont alignés.



- Notons B' la circumtrace de la B-bissectrice (BI) de ABC.

- D'après II. 2. Le résultat de Protassov, T, I' et B' sont alignés. [10]

- Notons *5* le cercle passant par A, B, I
  et X le second point d'intersection de *4* et *5*.

- **Scolies :** **(1)** *5* est le C-cercle de Mention de ABC
  (2) *5* passe par Ic.

- D'après "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 2)
  appliqué à *4*, *5* et *0* concourants en A, X, I et I' sont alignés ;
  d'après l'axiome d'incidence Ia, X, I, I' et C sont alignés ;
  en conséquence, X et Ic sont confondus.

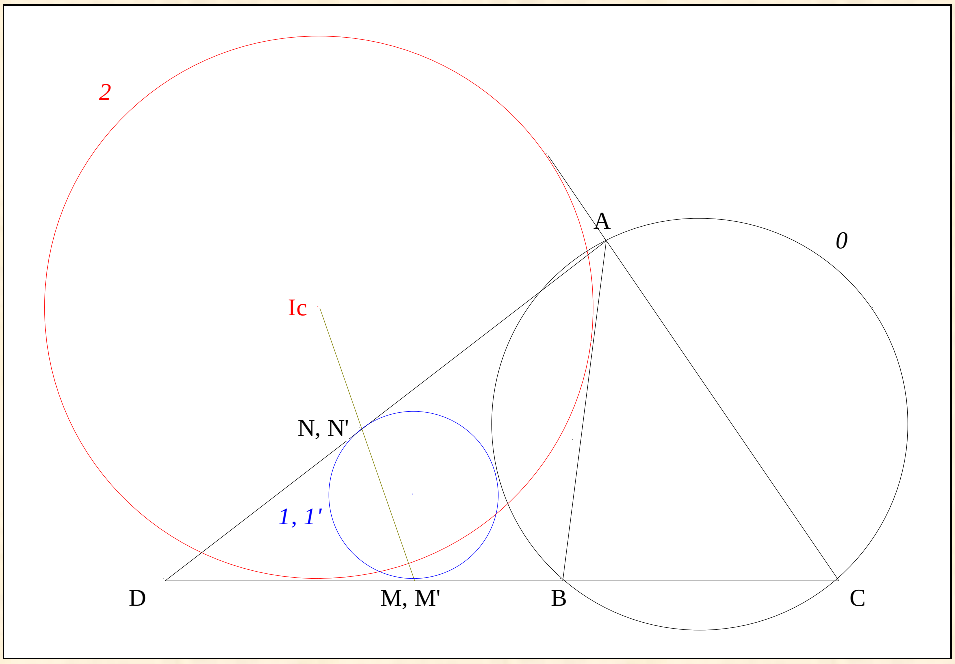
- C' étant sur *4* et étant le point d'intersection de (MN) et (CI'), C' et Ic sont confondus.

- **Conclusion :** (MN) passe par Ic.

Scolie : *1* est "un cercle extérieur de Protassov du triangle ADB relativement à *0*".

VISUALISATION SUFFISANTE

[10] Ayme J.-L., Un remarquable résultat de Vladimir Protassov, G.G.G. vol. 2, p. 4-6 ; http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/vol2.html.



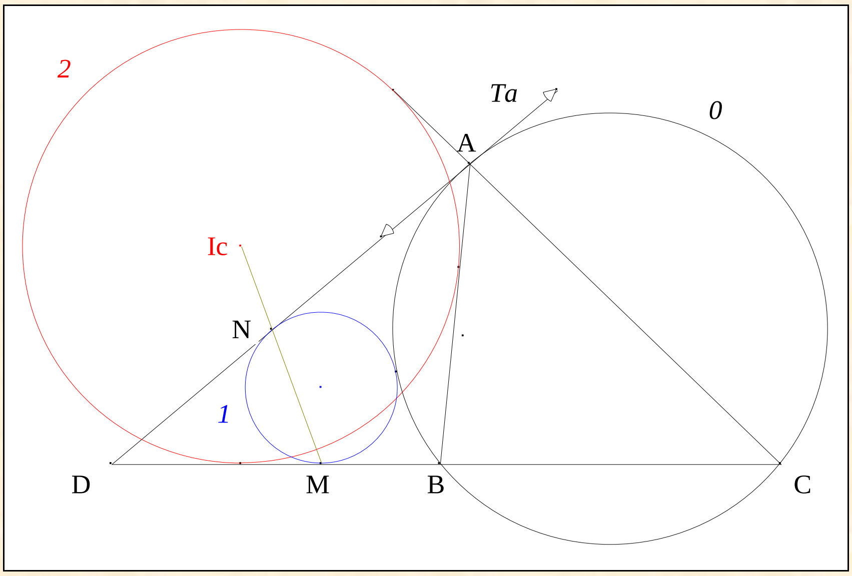
- (MN) passe par Ic.
- Raisonnons par l'absurde en affirmant que *1* est n'est pas tangent à *0*.
- D'après "Deux tangentes égales" (Cf. Annexe 6), DM = DN.
- Notons *1'* le cercle tangent resp. à (DC), (DA) et extérieurement tangent à *0*,
  et M', N' les points de contact de *1'* resp. avec (DC), (DA).
- D'après la condition nécessaire, (M'N') passe par Ic.
- D'après "Deux tangentes égales" (Cf. Annexe 6), DM' = DN' ;
  en conséquence,
  (1) M et M' sont confondus
  (2) N et N' sont confondus
  (3) *1* et *1'* sont confondus.
- **Conclusion partielle :** *1* est tangent extérieurement à *0*, ce qui est contradictoire.
- **Conclusion :** *1* est tangent extérieurement à *0*.

Scolie : le résultat reste vrai lorsque (AD) est la tangente à *0* en A.

2. Un alignement

VISION

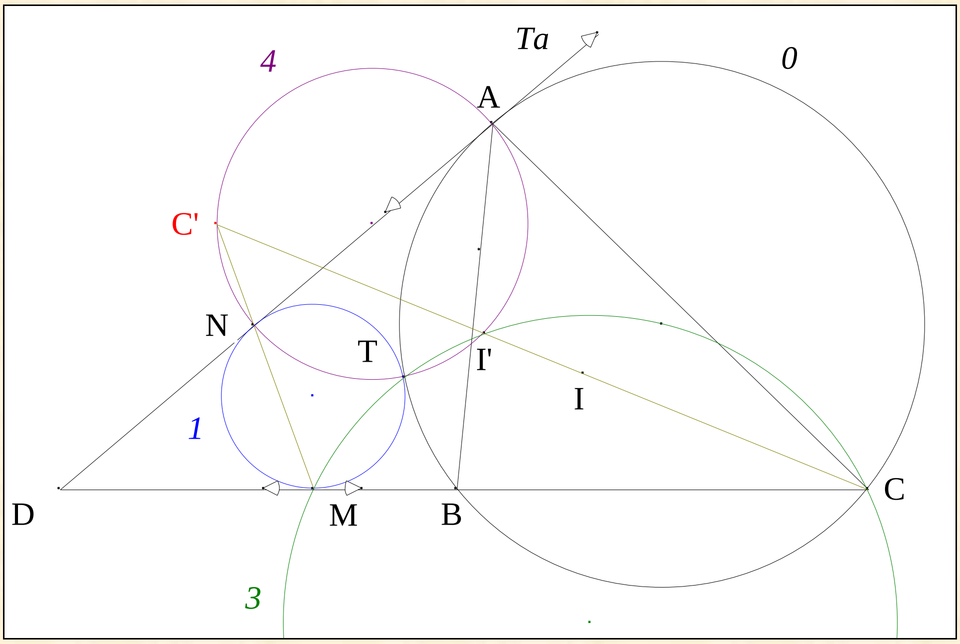
Figure :



Traits : ABC un triangle tel que AB < AC,
0 le cercle circonscrit à ABC,
Ta la tangente à *1* en A,
D le point d'intersection de Ta avec (BC),
1 le cercle tangent à (DB), (DA) et extérieurement à *0*,
M, N les points de contact de *1* resp. avec (DB), (DA),
2 le C-excercle de ABC
et Ic le centre de *2*.

Donné : Ic, M et N sont alignés [11].

VISUALISATION



- Notons T le point de contact de *1* et *0*
  I' le centre du triangle ADC,
  3 le cercle passant par C, T, M,

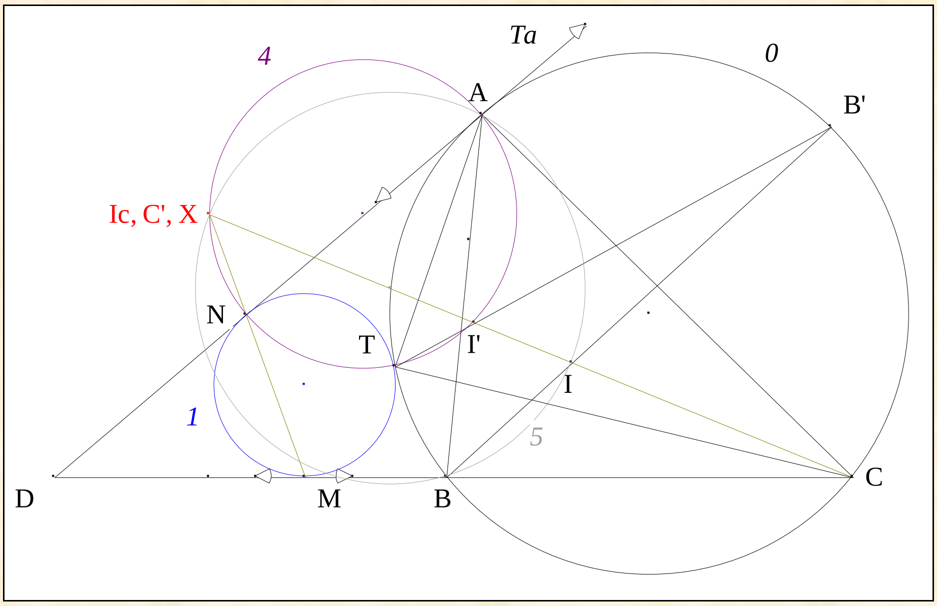
[11] TST Thaïlande.

	4	le cercle passant par A, T, N
et	I	le centre de ABC.

- **Scolies :** **(1)** d'après I., *3* et *4* passent par I'
  (2) par définition, C, I et I' sont alignés.

- Notons C' le second point d'intersection de (CI') avec *4*.

- **Conclusion partielle :** d'après I., M, N et C' sont alignés.



- Notons B' la circumtrace de la B-bissectrice (BI) de ABC.

- D'après II., T, I' et B' sont alignés.

- Notons *5* le cercle passant par A, B, I
  et X le second point d'intersection de *4* et *5*.

- **Scolie :** *5* passant par I, passe par Ic.

- D'après "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 1)
  appliqué à *4*, *5* et *0* concourants en A, X, I et I' sont alignés ;
  d'après l'axiome d'incidence Ia, X, I, I' et C sont alignés ;
  en conséquence, X et Ic sont confondus.

- C' étant sur *4* et étant le point d'intersection de (MN) et (CI'), C' et Ic sont confondus.

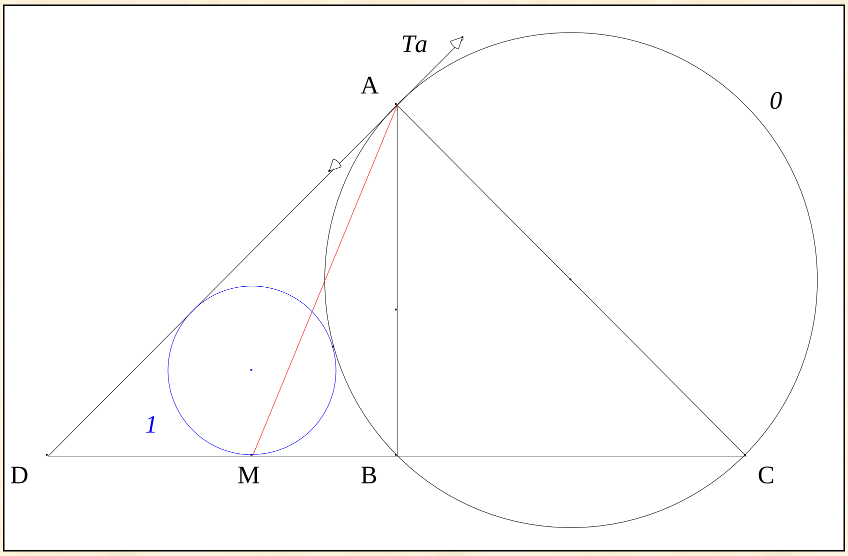
- **Conclusion :** Ic, M et N sont alignés.

3. Une équivalence entre bissectrice et triangle isocèle[12]

VISION

Figure :

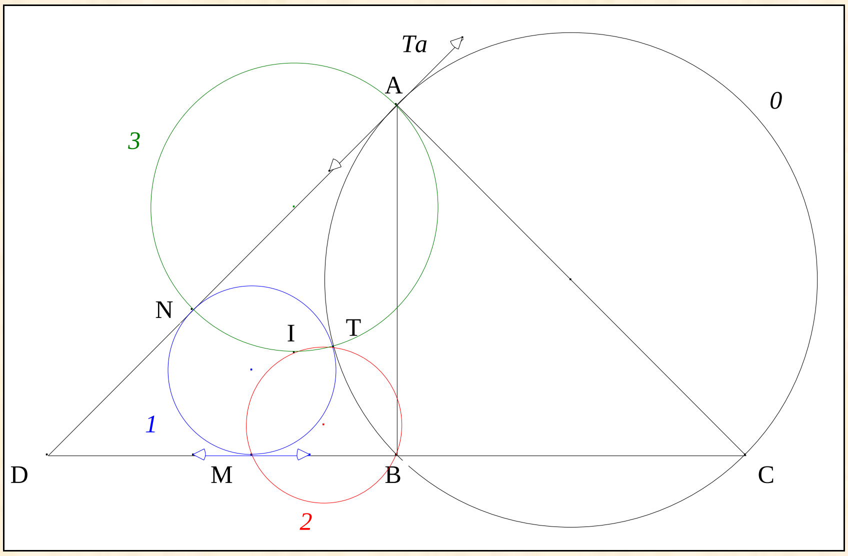
[12] TST Roumanie (2002).



Traits :	ABC	un triangle tel que AB $\leq$ AC,
	1	le cercle circonscrit à ABC,
	Ta	la tangente à *1* en A,
	D	le point d'intersection de Ta et (BC),
	1	le cercle resp. tangent à (DB), (DA) et extérieurement à *0*
et	M	le point de contact de *1* avec (DB).

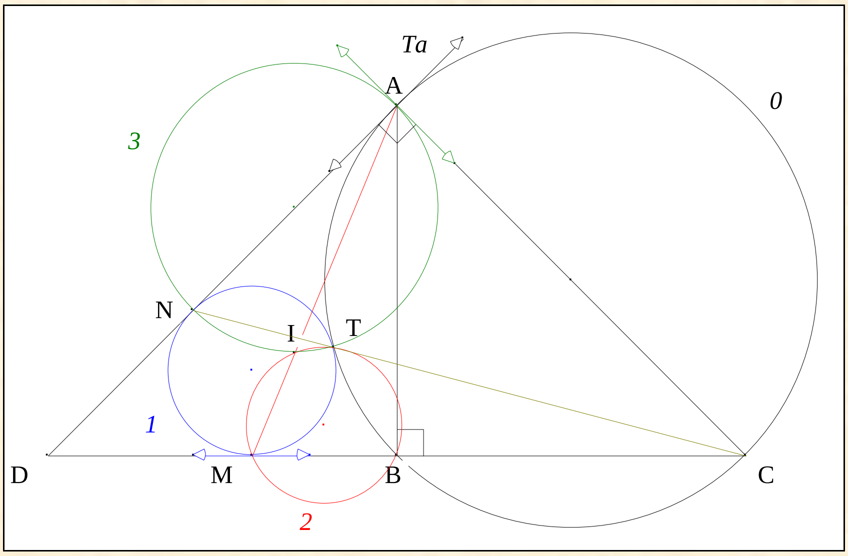
Donné : (AM) est la A-bissectrice intérieure du triangle ADB
si, et seulement si,
CAM est C-isocèle.

VISUALISATION



- Notons
  T le point de contact de *0* et *1*,
  M, N les points de contact de *2* resp. avec (BC), (AD),
  I le centre du triangle ADB
  et *2*, 3 les cercles circonscrits resp. aux triangles TMB, TNA.

- **Conclusion partielle :** d'après I., *2* et *3* passent par I.



- (AM) est la A-bissectrice intérieure de ADB   i.e.   A, I et M sont alignés.

- Raisonnons par équivalence logique.

- D'après "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 1)
  appliqué à *0*, *2* et *3* concourants en T,   (AC) est la tangente à *3* en A.

- D'après "Le théorème des trois cercles" (Cf. Annexe 1)
  appliqué à *1*, *3* et *0* concourants en T,   N, T et C sont alignés.

- (NTC) étant l'axe radical de *1* et *3*,   CA = CM   i.e.   CAM est C-isocèle.

- **Conclusion :** (AM) est la A-bissectrice intérieure du triangle ADB
  si, et seulement si,
  CAM est C-isocèle.

Note historique : ce problème a été communiqué au groupe *Hyacinthos* en 2004 par Orlando Doehring[13], étudiant à Postdam (Allemagne). Dans un autre message à ce groupe, Ben_grosso[14] signale

"This was used in Roumanian TST in 2002. Only one student solved it. Some of you might hear of him: Valentin Vornicu, the administrator of *Mathlinks*.
The problem got me really depressed and I haven't though about it since 2002"

puis, présente sa solution par condition nécessaire et suffisante basée sur l'inversion.

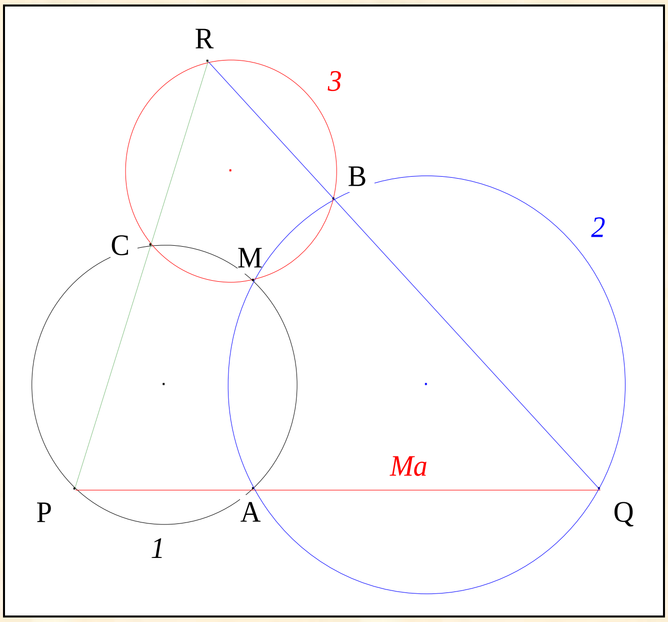
Commentaire : la solution de l'auteur trouvée en 2004, est dédicacée à Monica[15].

---

13 Doehring O., Tangents, Message *Hyacinthos* # 9541 du 12-03-04
14 Ben_gross_ro, Tangents, Message *Hyacinthos* # 9657 du 11/04/2004.
15 Le 08/12/2004.

D. ANNEXE

1. Le théorème des trois cercles



Traits : *1*, *2*, *3* trois cercles concourants,
M le point de concours de *1*, *2*, *3*,
A le second point d'intersection de *1* et *2*,
*M*a une A-monienne de *1* et *2*,
P, Q les seconds points d'intersection de *M*a resp. avec *1*, *2*,
B, C les seconds points d'intersection de *3* resp. avec *2*, *1*
et R un point de *3*.

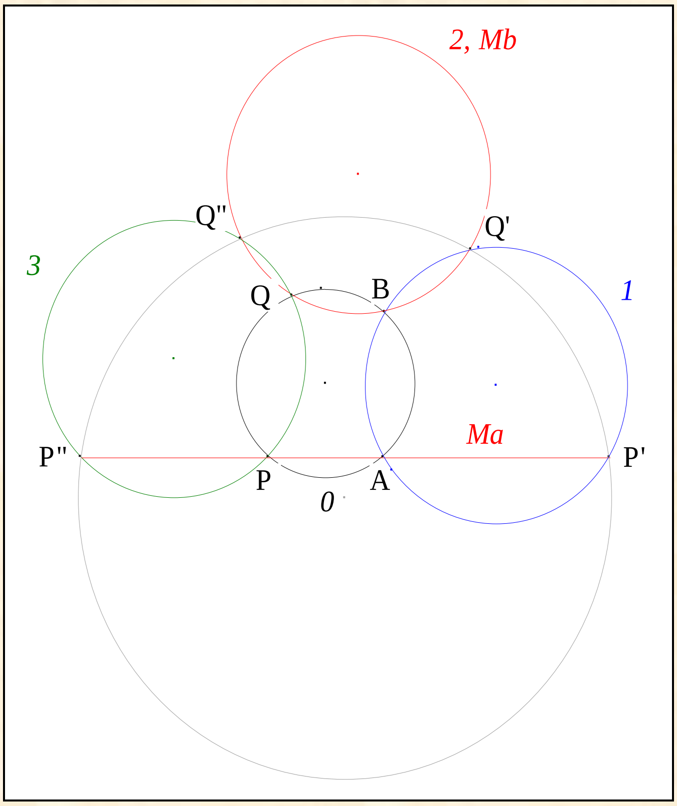
Donné : (QBR) est une monienne de *2* et *3*
si, et seulement si,
(PCR) est une C-monienne de *1* et *3*.

Commentaire : ce résultat est une réciproque du pivot de Miquel[16].
Il reste vraie dans les cas de tangence des droites ou de deux cercles.

2. Le théorème des cinq cercles[17]

---

16 Miquel, Théorèmes de Géométrie, *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville vol. 1, 3 (1838) 485-487.
17 Lebesgue H. L., Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1916).



Traits : *0*, *1* deux cercles sécants,
A, B les points d'intersection de *0* et *1*,
*M*a une droite passant par A,
P, P' les seconds points d'intersection de *M*a avec *0* et *1*,
2 un cercle passant par B,
Q, Q' les seconds points d'intersection de *2* resp. avec *0* et *1*,
3 un cercle passant par P et Q,
et P", Q" les seconds points d'intersection de *3* resp. avec *M*a et *2*.

Donné : P', Q', P" et Q" sont cocycliques.

Commentaire : le résultat reste vraie dans les cas de tangence des droites ou de deux cercles.