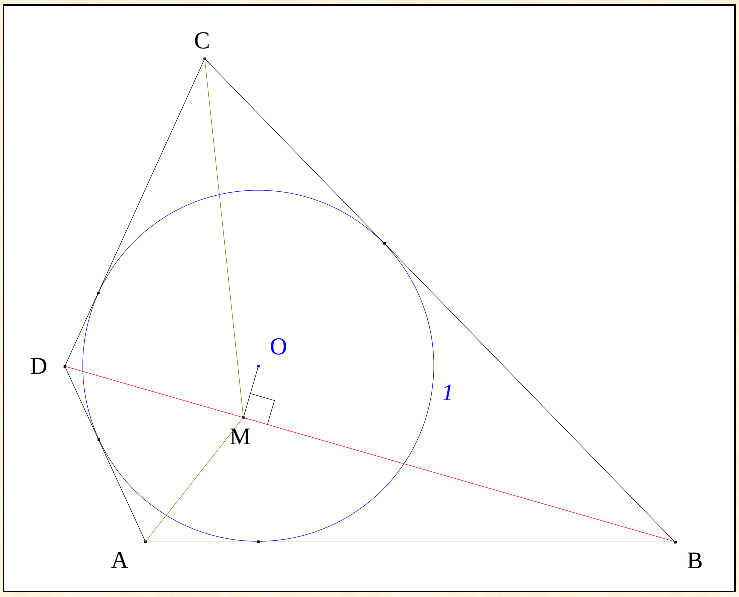
CULTURE GÉOMÉTRIQUE 3

UNE DIAGONALE - BISSECTRICE

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente un exercice qui a été proposé en 1996 en Roumanie lors d'un stage de préparation aux Olympiades Internationales de Mathématiques.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents an exercise that was proposed in 1996 in Romania during a stage of preparation at the International Mathematical Olympiad.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

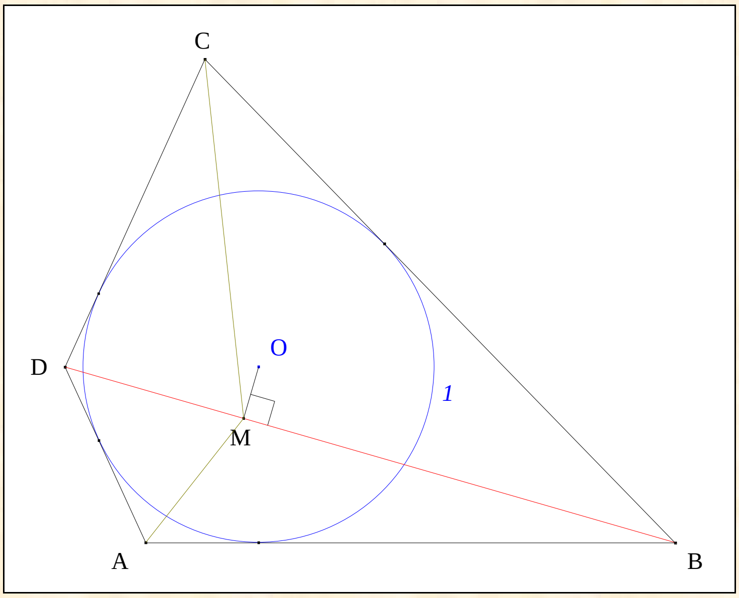
Sommaire

[1] Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/09/2016 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

A. UNE DIAGONALE - BISSECTRICE

VISION

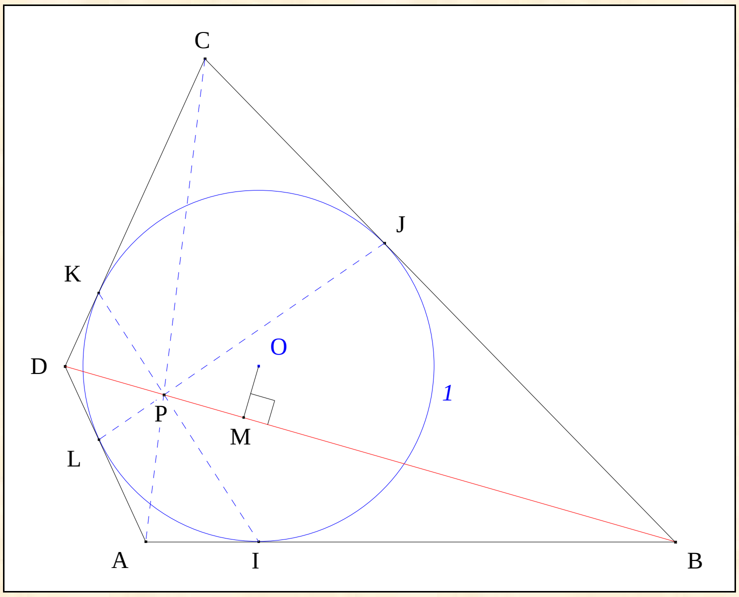
Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe circonscriptible,
1 le cercle inscrit à ABCD,
O le centre de *1*,
et M le pied de la perpendiculaire à (BD) issue de O.

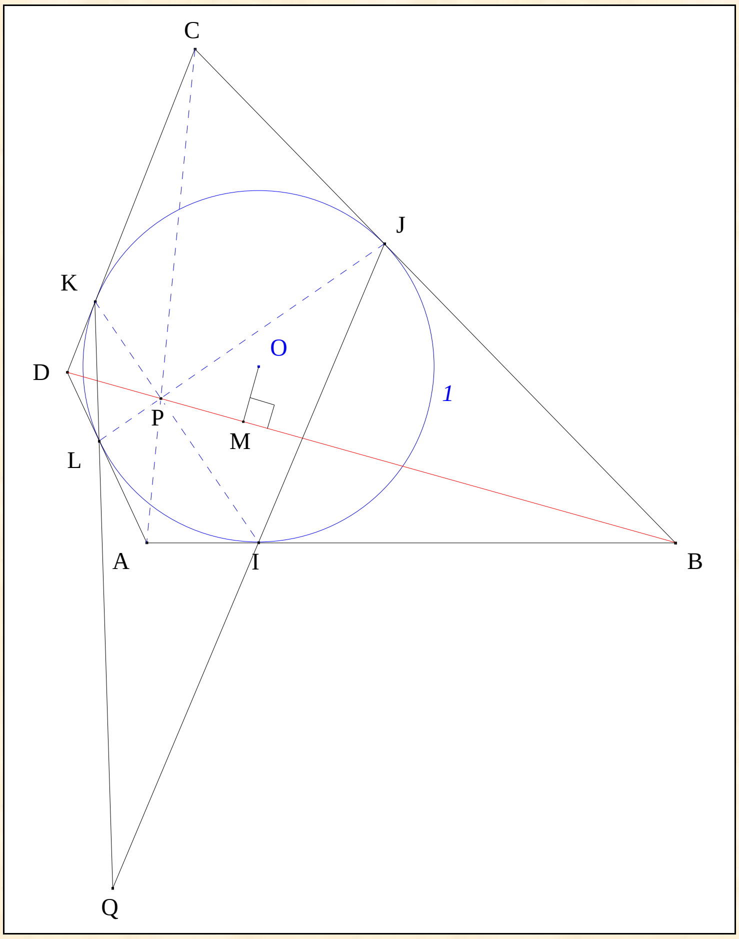
Donné : (MD) est la M-bissectrice intérieure du triangle MAC. [2]

VISUALISATION



[2] stage de préparation aux OIM, Roumanie (août 1996)

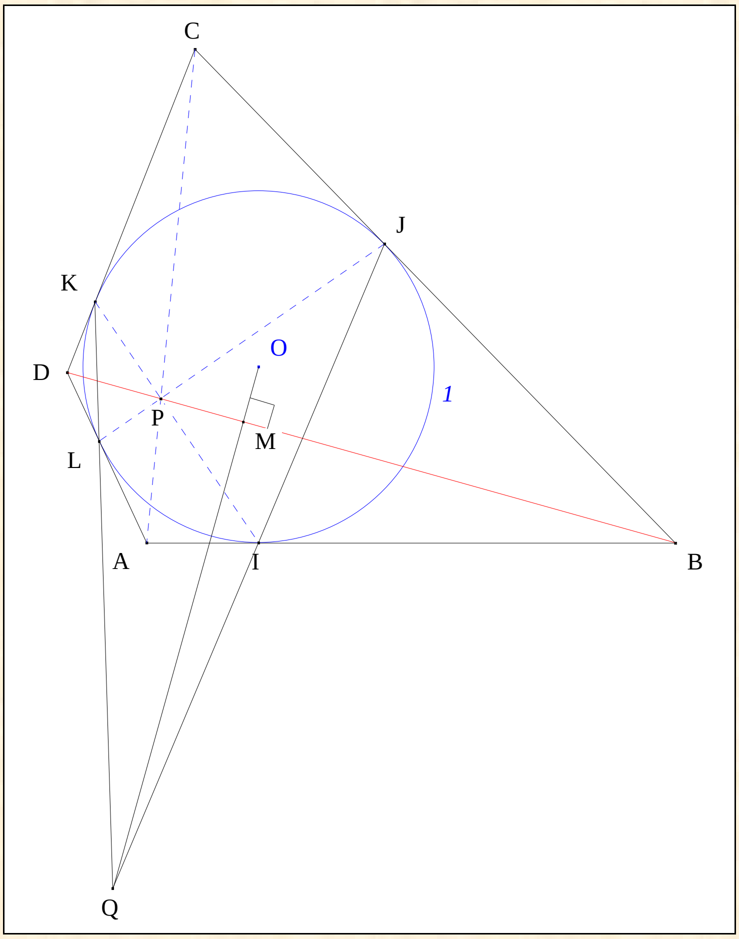
- Notons I, J, K, L les points de contact de *1* resp. avec (AB), (BC), (CD), (DA).
- D'après "Le théorème de Newton" [3], (AC), (BD), (LN) et (MP) sont concourantes.
- Notons P ce point de concours.



- Notons Q le point d'intersection de (IJ) et (KL).
- D'après de La Hire "Des croisillons" [4], Q est sur la polaire de P relativement à *1*.
- D'après de La Hire "La corde pivotante, scolie", P est sur la polaire de Q relativement à *1* i.e. sur (BD).

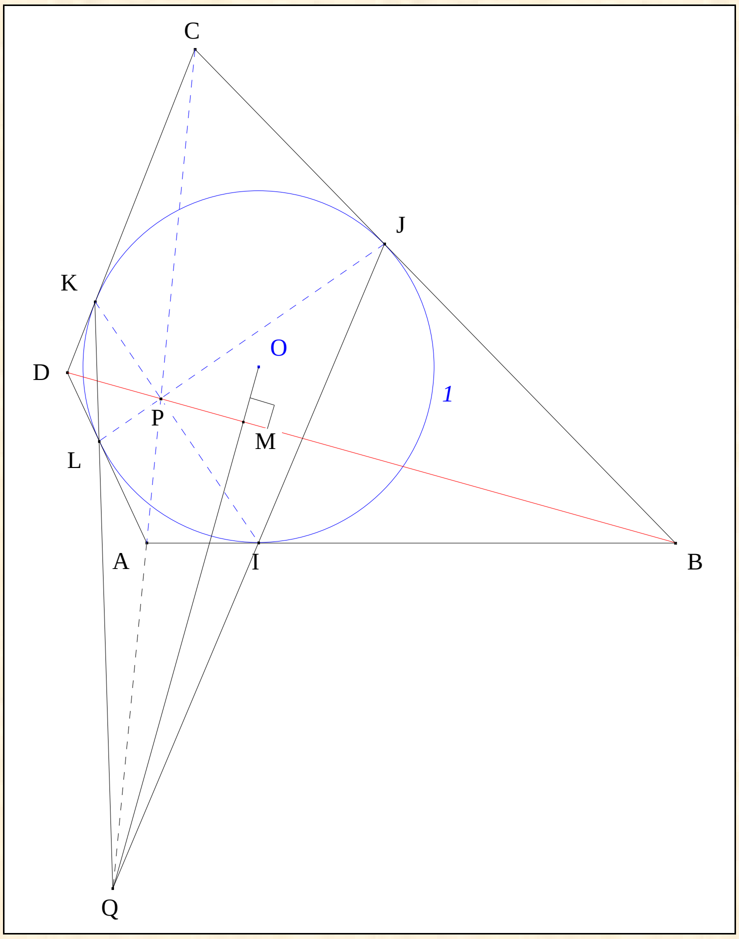
---

[3] Newton I., *Principes* 1686, corollaire **II** du lemme **XXIV** ; il est aussi appelé théorème faible de Brianchon.
[4] Ayme J.-L., La réciprocité polaire de Philippe de La Hire, G.G.G. vol. **13**, p. 7 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Par définition, (QO) ⊥ (BD) ;
  par hypothèse (BD) ⊥ (OM) ;
  d'après l'axiome **IVa** des perpendiculaire, (QO) // (OM) ;
  d'après le postulat d'Euclide, (PO) = (OM).

- **Conclusion partielle :** Q, M et O sont alignés.

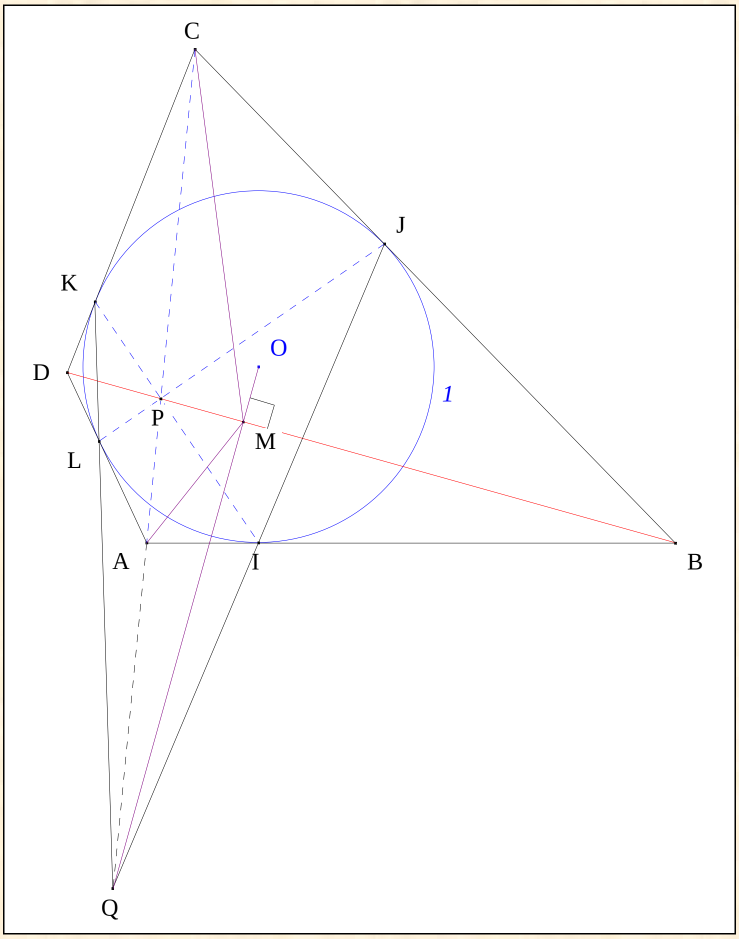


- D'après Desargues "Le théorème des deux triangles" [5]
  (AQC) est l'arguésienne des triangles perspectifs BIJ et DKL de centre P.

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome d'incidence **Ia**, (AC) passe par Q.

---

5 Ayme J.-L., Une rêverie de Pappus d'Alexandrie, G.G.G. vol. **6**, p. 40 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Q étant sur la polaire de P, le quaterne (A, C, P, Q) est harmonique ;
  en conséquence, le pinceau (M ; A, C, P, Q) est harmonique.

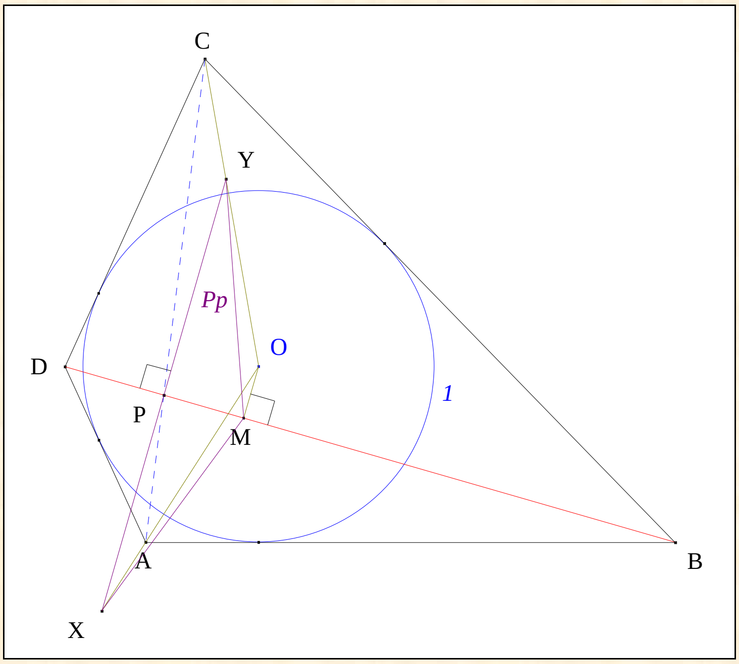
- Le pinceau harmonique (M ; A, C, P, Q) ayant deux rayons (MP) et (MQ) perpendiculaires, (MP) est la M-bissectrice intérieure du triangle MAC.

- **Conclusion :** (MD) est la M-bissectrice intérieure du triangle MAC.

B. UN TRIANGLE ISOCÈLE

VISION

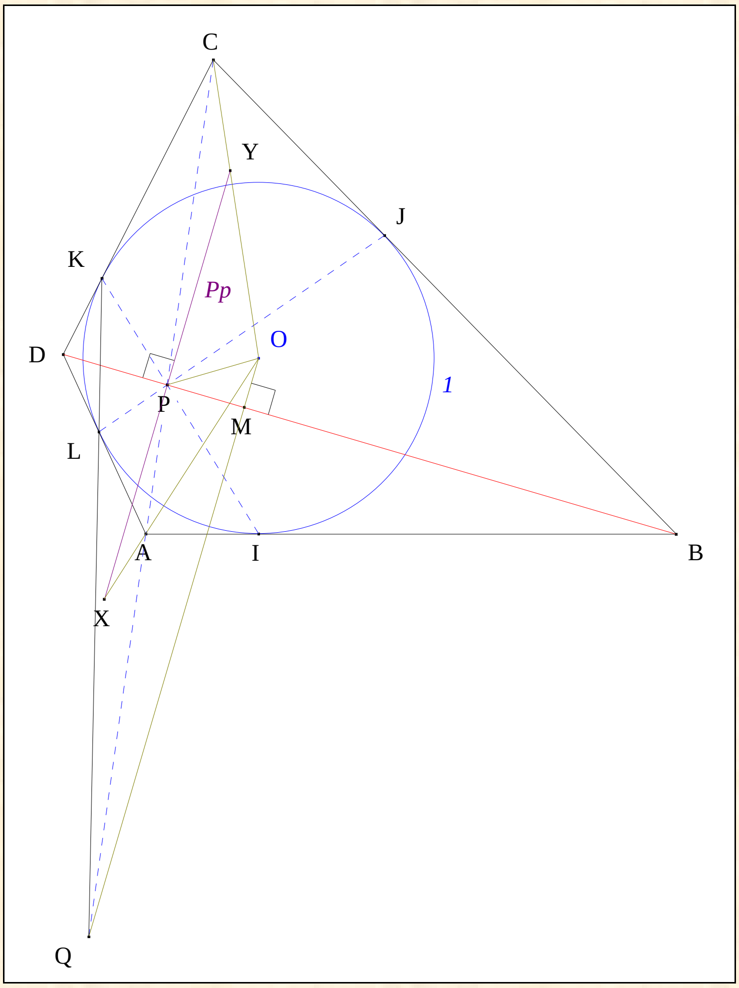
Figure :



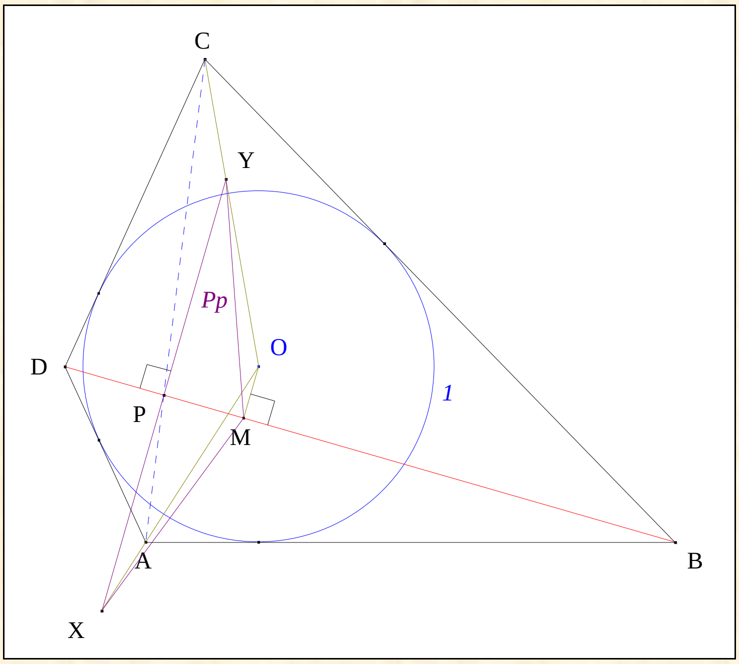
Traits :	ABCD	un quadrilatère convexe circonscriptible,
	1	le cercle inscrit de ABCD,
	O	le centre de *1*,
	P	le point d'intersection de (AC) et (BD),
	Pp	la perpendiculaire à (BD) issue de P,
	X, Y	les points d'intersection de *Pp* resp. avec (OA), (OC)
et	M	le pied de la perpendiculaire à (BD) issue de O.

Donné : le triangle MXY est M-isocèle.

VISUALISATION



- Notons Q le point d'intersection de (OM) et (KL).
- D'après **A.**, le pinceau (M ; A, C, P, Q) est harmonique.
- Par changement d'origine, le pinceau (O ; A, C, P, Q) est harmonique.
- **Scolie :** (OM) // *Pp*.
- D'après Pappus "Parallèle à un rayon", P est le milieu de [XY].



- **Conclusion :** le triangle MXY est M-isocèle.