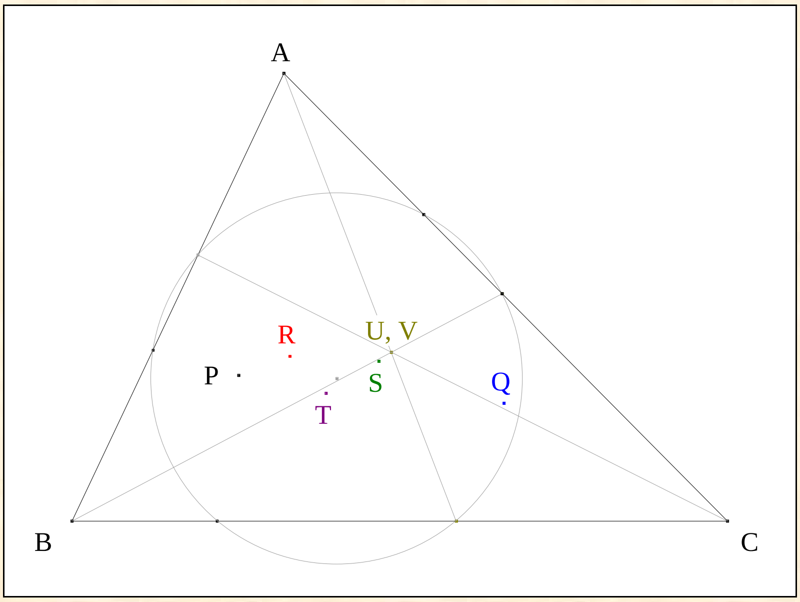
UNE LONGUE PHRASE

PREMIÈRE PREUVE SYNTHÉTIQUE

DU

RÉSULTAT DE BARRY WOLK

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'article présente une preuve synthétique d'un résultat datant de l'an 2000 obtenu par décomposition des coordonnées barycentriques du conjugué cyclocévien d'un point.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The paper presents a synthetic proof of a result from year 2000 obtained by decomposition of the barycentric coordinates of the cyclocevian conjugate of a point.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 12/10/2012 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sommaire

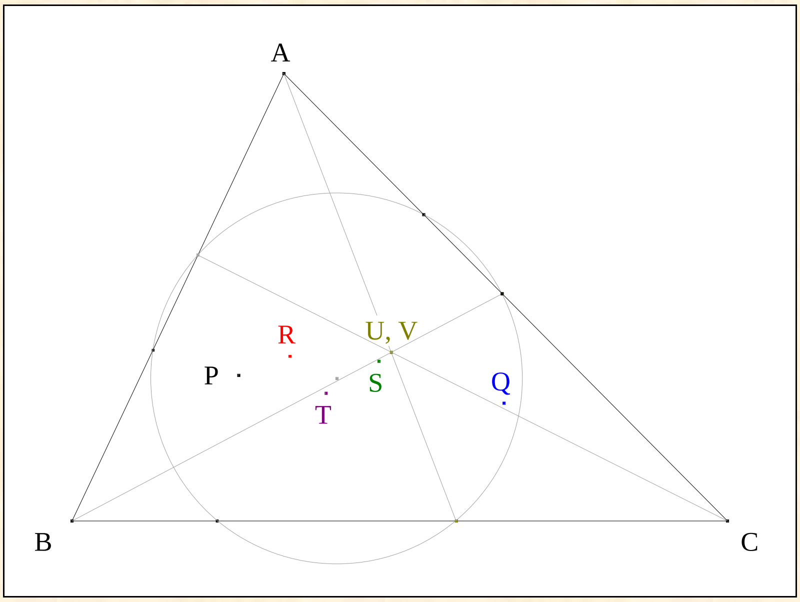
A. LE RÉSULTAT DE BARRY WOLK

ET

LA LONGUE PHRASE

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
P un point,
Q le conjugué isotomique de P,
R le complément de Q,
S le conjugué isogonal de R,
T l'anticomplément de S,
U le conjugué isotomique de T
et V le conjugué cyclocévien de P.

Donné : V et U sont confondus.[2]

Énoncé traditionnel :

le conjugué cyclocévien d'un point est
le conjugué isotomique
de l'anticomplément
du conjugué isogonal
du complément
du conjugué isotomique de ce point.[3]

---

[2] Wolk B., Proofs of Feuerbach theorem, Message *Hyacinthos* # **462** du 03/03/200 ;

[3] Grinberg D., Isotomcomplement Theory, Message *Hyacinthos* # **6423** du 24/01/2003 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

Note historique :

ce résultat obtenu en jouant sur une décomposition des coordonnées barycentriques a été évoqué par Barry Wolk de l'université du Manitoba (Winnipeg, Canada) en 2000.

> I didn't know there was a term "cyclocevian conjugate". So the cyclocevian conjugate of P is iso(super(con(sub(iso(P))))).
> :-)

[4]

Ce résultat a été reformulé par l'élève du Kant-Gymnasium de Karlsruhe (Bade-Wurtemberg, Allemagne) Darij Grinberg en 2003 (théorème 9).

> THEOREM 9: The cyclocevian conjugate of a point is the isotomic conjugate
> of the anticomplement
> of the isogonal conjugate
> of the complement
> of the isotomic conjugate
> of the point.
>
> This is not only a nice description of the cyclocevian conjugate, but it also makes possible an elementary derivation of its barycentric coordinates. In fact, the coordinate formula given in Paul Yiu's Introduction to Triangle Geometry,
>
> http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps
>
> can be easily deduced from Theorem 9.

[5]

Il a été représenté en 2012 par Alexey Zaslavsky sous la forme suivante

> Does anybody know a synthetic proof of the next theorem?
> The centers of two conics inscribed into a given triangle are isogonally conjugated iff six touching points of these conics with the sidelines lie on the circle.

[6]

que Bernard Gibert a reformulé ainsi

> g, t, a, c denote isogonal, isotomic, anticomplement, complement as usual
>
> P, Q the centers of the inconics such that Q = gP
> taP, taQ their perspectors,
>
> the cyclocevian conjugate of M is tagct M
>
> hence the cyclocevian conjugate of taP is tagcttaP = tagcaP = tagP = taQ.

[7]

… et Alexey Zaslavsky confirme

---

[4] Wolk B., Proofs of Feuerbach theorem, Message *Hyacinthos* # **462**   du 03/03/200 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

[5] Grinberg D., Isotomcomplement Theory, Message *Hyacinthos* # **6423** du 24/01/2003 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

Zaslavsky A., Two inconics, Message *Hyacinthos* # **21235** du 04/10/2012 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

Gibert B., Two inconics, Message *Hyacinthos* # **21236** du 04/10/2012 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

the cyclocevian conjugate of M is tagct M

Yes, of course, but I know only analythic proof of this fact.
[8]

Ce résultat réapparaît quelques jours plus tard sur le site *Les-Mathématiques.net* sous la signature de François Rideau

On se donne un triangle ABC du plan euclidien et un point M.
Le triangle $M_AM_BM_C$ est le triangle cévien de M par rapport au triangle ABC.

Son cercle circonscrit Γ recoupe respectivement les droites BC en M'_A, CA en M'_B, AB en M'_C.

Il faut tout d'abord montrer que le triangle $M'_AM'_BM'_C$ est le triangle cévien d'un certain point , appelé conjugué cyclocévien du point M par rapport au triangle ABC.
On étudie ensuite l'application $f : M \mapsto M'$ qui est visiblement involutive et pour cela je vais utiliser les notations plus ou moins tendance de la géométrie du triangle:
On note:
g l'isogonie (comme le "g" de l'isogonie).
t l'isotomie (comme le "t" de l'isotomie).
c le complément (comme le "c" de complément): c'est l'homothétie de centre G, le centre de gravité, transformant ABC en son triangle médial et donc de rapport $-\frac{1}{2}$.
$a = c^{-1}$ l'anticomplément comme le "a" d'anticomplément: c'est l'homothétie de centre G et de rapport -2.
Montrer que $f = (t \circ a) \circ g \circ (t \circ a)^{-1} = t \circ a \circ g \circ c \circ t$
[9]

A propos de Barry Wolk :

Barry Wolk est actuellement professeur de mathématiques à l'université du Manitoba (Winnipeg, Canada).
Il s'est fait remarqué en 1961 comme lycéen participant au William Lowell Putnam Mathematical Competition connue aussi sous le nom de Putnam Competition où il obtint un très haut score, même si cette information n'a pas été rendue publique.

Zaslavsky A., Two inconics, Message *Hyacinthos* # **21237** du 04/10/2012 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

[9] Rideau F., La cyclocévienne, *Les-Mathématiques.net* ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,779038

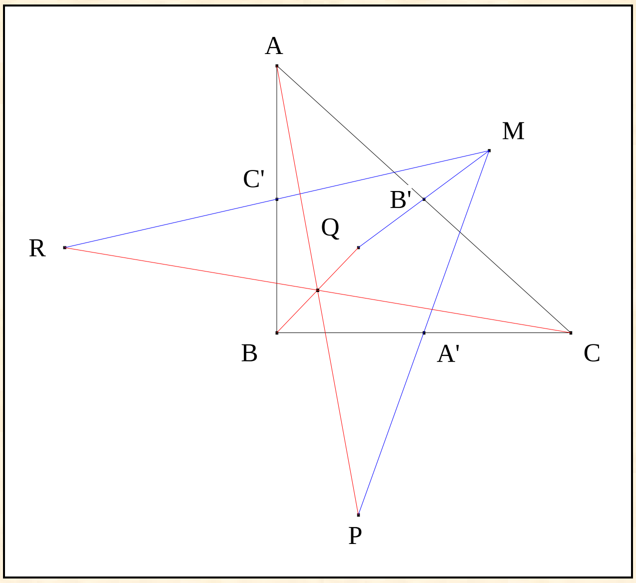
B. RAPPELS

I. COMPLÉMENTARITÉ

1. La construction de Maurice d'Ocagne

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	M	un point,
	A'B'C'	le triangle médian de ABC
et	P, Q, R	les symétriques de M resp. par rapport à A', B', C'.

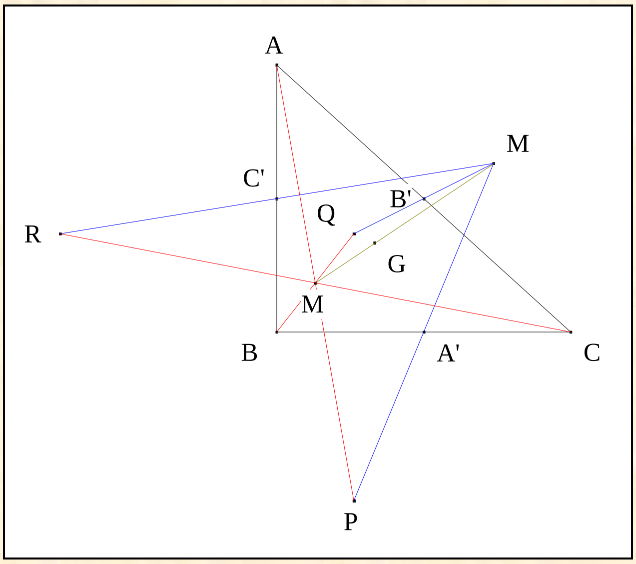
Donné : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes. [10]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [11]

Scolie : **(1)** un alignement et une relation

[10] d'Ocagne M. (1882)

[11] Ayme J.-L., Complémentarité, G.G.G. vol. **5**, p. 6-10 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons M' ce point de concours
  et G le point médian de ABC.

- **Conclusion :** M, G et M' sont alignés dans cet ordre et GM' = ½. GM.

(2) Terminologie

* M' est "le point complémentaire [12] de M relativement à ABC"

ou pour faire court,

M' est "le complément de M relativement à ABC".

* M est "le point anticomplémentaire de M' relativement à ABC"

ou pour faire court,

M est "l'anticomplément de M' relativement à ABC".

2. Note historique Le lecteur pourra consulter cette note dans l'article "Complémentarité" de l'auteur. [13]

[12] En anglais, inferior, subordinate ou medial image i.e. the complement of a point with respect to a triangle is the image of this point in the homothety centered at the centroid of this triangle and having factor -1/2

[13] Ayme J.-L., Complémentarité, G.G.G. vol. **5**, p. 3-5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

On peut consulter sur les points complémentaires et anticomplémentaires :

E. Hain. — *Archiv der Physik und Mathematik von Grünert*, octobre 1885, p. 214-217.

G. de Longchamps. — *J. E.*, 1886, p. 131, 276. — *A. F.*, Nancy. 1886.

E. Lemoine. — *A. F.*, Nancy, 1886.

J. Neuberg. — *J. S.*, décembre 1886, p. 265-269.

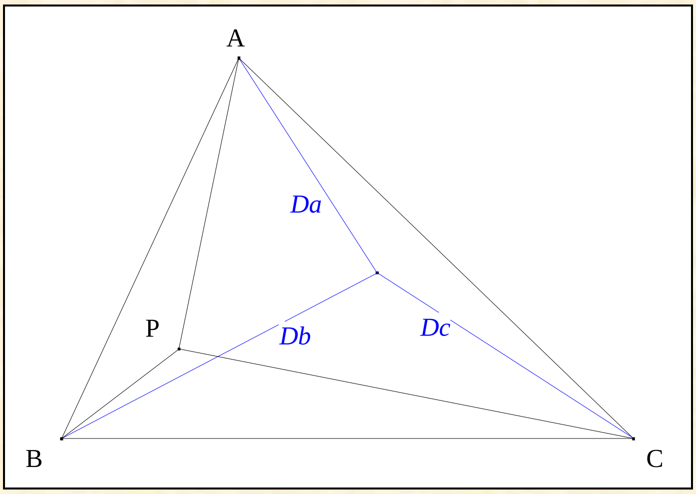
E. Vigarié. — *M.*, 1887; la première partie de cette note est résumée dans le § 18 ci-dessus.

II. ISOGONALITÉ

1. The isogonal theorem [14]

VISION

Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point non situé sur le cercle circonscrit à ABC
et	*Da* , *Db* , *Dc*	les A, B, C-isogonales resp. de (AP), (BP), (CP).

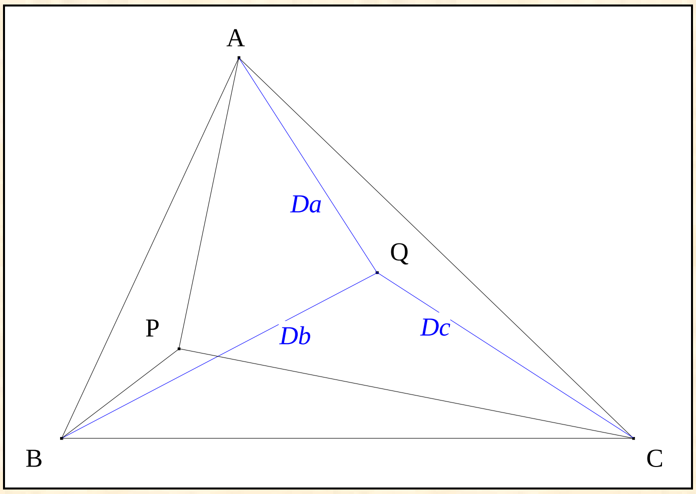
Donné: *Da* , *Db* et *Dc* sont concourantes.

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [15]

Scolie : terminologie

[14] Mathieu J. J. A., *Nouvelles Annales*, tome **4** (1865) 393 ff., 400 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

[15] Ayme J.-L., Mantel*Noyer*Droz-Farny*Goormaghtigh, G.G.G. vol. **12**, p. 27-34 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons Q ce point de concours.
- Nous dirons que Q est "le conjugué isogonal de P relativement à ABC"
- La relation "est l'isogonal de" étant symétrique,

  nous dirons que P et Q sont deux points isogonaux de ABC.

2. Note historique

Connu de l'École pythagoricienne, le point d'intersection I des bissectrices d'un triangle est aujourd'hui considéré comme le premier point remarquable d'un triangle.
Au début du IIIème siècle avant notre ère, Euclide [16] évoque le centre O du cercle circonscrit d'un triangle dans ses *Éléments*. Quelques décennies plus tard, Archimède [17] s'intéresse à deux autres points remarquables d'un triangle, le point médian G qu'il appelle "χεντρον βαρϖν" et à l'orthocentre [18] H qui, durant de nombreux siècles, sera appelé "point d'Archimède".

Au début du XIXème siècle, un nouveau point remarquable du triangle, connu aujourd'hui connu le nom de point de Lemoine K, est observé par Simon L'Huilier [19] sans qu'il lui accorde la moindre importance. Quelques figures ont permises par la suite, d'élucider consciemment ou inconsciemment, des propriétés géométrique de K. Avec réserve, nous pouvons dire qu'un théorème spatial de Michel Chasles datant de 1815, a pu être à l'origine d'une voie figurée.

Le centre du cercle
obtenu par projection centrale d'un cercle d'une sphère,
est
la projection centrale du sommet du cône circonscrit à la sphère, suivant le cercle considéré [20]

En 1847, Ernst Wilhem Grebe [21] le rencontre accidentellement en prolongeant les côtés extérieurs des trois carrés de la figure de Vecten sans pour cela l'identifier.
Ramenant le théorème spatial de Michel Chasles dans le plan sans pour cela être conscient de cette filiation, Émile Lemoine [22] découvre en 1873, la propriété fondamentale de K, à savoir que les symédianes i.e. les symétriques des médianes par rapport aux bissectrices intérieures d'un triangle, sont concourantes en ce point.

---

16 Euclide (vers 325 - vers 265 a. J.-C.), proposition **5**, Livre IV des *Éléments*
17 Archimède, proposition 13, Sobre el equilibrio de los platos, Livre **I** (vers 225 a. J.-C.)
18 Archimède, *Scolies*, lemme **5**
Heath T. L., *Works of Archimedes*, Cambridge (1897) Lemmas **5**
19 L'Huilier S., *Éléments d'Analyse géométrique et d'Analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques* (1809) 296
20 F. G.-M., Exercices de Géométrie, 6-ième éd., (1920), Rééditions Jacques Gabay, Paris (1991) 112
21 Grebe E. W., Das geradlinige Dreieck in Bezug auf die Quadrate der Perpendikel, die man von einem Punkte seiner Ebene auf seine Seiten Fallen kann, *Grünerts Archiv* **9** (1847)

C'est Joseph Neuberg qui, en 1884, donnera à K, le nom de "point de Lemoine".

Quelques années auparavant, plus précisément en 1860, Christian von Nagel [23] présentait un résultat anodin concernant les points H et O :

les rayons qui joignent les sommets d'un triangle non rectangle au centre du cercle circonscrit
sont
respectivement perpendiculaires aux droites qui joignent deux à deux les pieds des hauteurs du triangle

ou autrement dit

les rayons qui joignent les sommets d'un triangle non rectangle au centre du cercle circonscrit
sont
respectivement les symétriques des hauteurs par rapport aux bissectrices intérieures du triangle

En 1865, le capitaine d'artillerie Jean Joseph Auguste Mathieu [24] généralise dans les *Nouvelles Annales*, les résultats précédents en considérant les couples de points (P, P*) relativement à un triangle donné pour lesquels les droites joignant chaque sommet à P et P* sont symétriques par rapport à la bissectrice intérieure passant par celui-ci.

(397)

connu; 2° un faisceau que je nommerai *faisceau d'inversion*, dont la définition sera donnée dans le paragraphe suivant, et qui, soit dit en passant, n'est pas, comme le faisceau harmonique, doué de la propriété projective.

§ II. — *Faisceau d'inversion.*

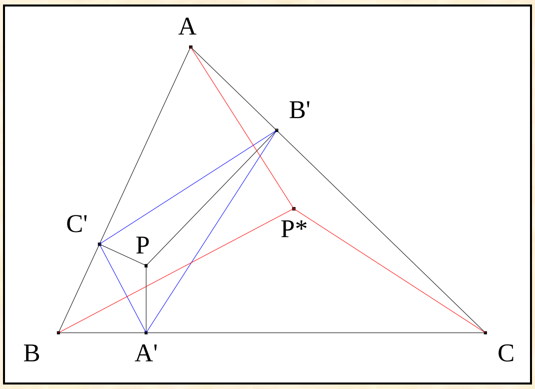
Je nommerai *faisceau d'inversion* un faisceau formé par deux systèmes de droites dont les bissectrices coïncident, et *droites inverses* deux rayons conjugués de ce faisceau. Lorsqu'on prend pour axes deux rayons conjugués, les deux autres ont des coefficients angulaires inverses; de là ces dénominations.

En Géométrie, les deux tangentes menées d'un point à une section conique et les deux droites menées de ce point aux deux foyers forment un faisceau d'inversion. En Physique, deux rayons incidents en un même point d'une surface, et situés dans le plan normal à la surface en ce point, forment avec les rayons réfléchis un faisceau d'inversion dans lequel le rayon incident et le rayon réfléchi sont conjugués.

Pour abréger le discours, parlant d'une droite qui passe par le sommet d'un angle, j'appellerai, sans autre explication, *inverse* de cette droite le quatrième rayon du faisceau d'inversion déterminé par les côtés de l'angle, pris pour rayons conjugués, et par la droite donnée. Je dirai, ainsi, que la bissectrice d'un angle est sa propre inverse.

22 Lemoine E., Sur quelques propriétés d'un point remarquable du triangle, ACFAS, Lyon (1873) 90-91.
23 Nagel (von) C., *Nouvelles Annales* **14** (1860) 440.
24 Mathieu J. J. A., Étude de géométrie comparée, avec applications aux sections coniques p. 393-407, *Nouvelles Annales* (1865) 393 ff., 400.

Noyé pour ainsi dire dans son article, ce nouveau point de vue serait passé inaperçu sans le dynamisme incontestable de Joseph Neuberg. Travaillant sur la relation symétrique de conjugaison qui lie P à P*, il préfère pour éviter toute confusion avec d'autres terminologies en vigueur à cette époque, de donner à cette conjugaison le nom d'isogonalité. Ainsi, les droites joignant chaque sommet à P et P* deviennent des isogonales, et P* l'isogonal de P.



Au passage, Jean Joseph Auguste Mathieu propose une construction des couples (P, P*) en considérant les perpendiculaires issues des sommets du triangle ABC sur les côtés du triangle P-pédal de celui-ci.

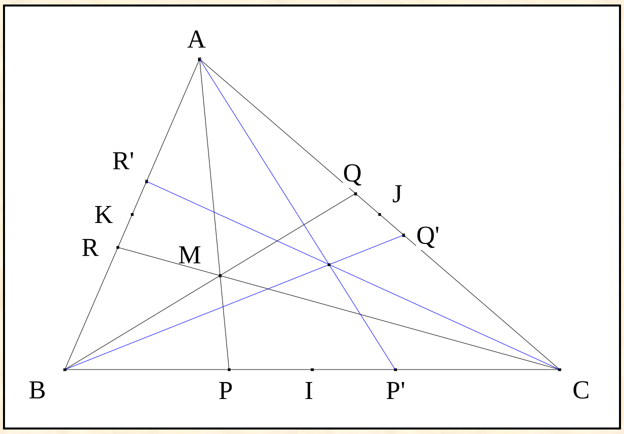
Cette démarche allait donner à la future "géométrie du triangle", le premier moule d'une synthèse d'un ordre plus élevé dont la nature allait être expliquée par ses successeurs.

III. ISOTOMIE

1. La construction de Gohierre de Longchamps

VISION

Figure :



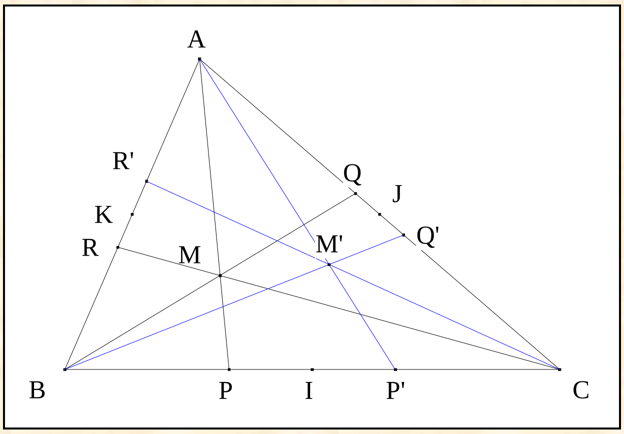
Traits :	ABC	un triangle,
	M	un point,
	PQR	le triangle M-cévien de ABC,
	I, J, K	les milieux resp. de [BC], [CA], [AB]

et P', Q', R' les isotomes de P, Q, R resp. par rapport à [BC], [CA], [AB].

Donné : (AP'), (BQ') et (CR') sont concourantes. [25]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [26]

Scolie : terminologie



- Notons M' ce point de concours

- Nous dirons que

  (1) P' est "l'isotome de P relativement à [BC]"

  (2) (AP') est "la A-cévienne isotomique de (AP) relativement à ABC"

  (3) M' est "le conjugué isotomique de M relativement à ABC"

- La relation "est l'isotomique de" étant symétrique,

  nous dirons que M et M' sont deux points isotomiques de ABC.

Énoncé traditionnel :

les céviennes isotomiques de trois céviennes concourantes,
sont concourantes.

2. Note historique

C'est au début du XIXème siècle que Simon L'Huilier [27] mentionne les trois cercles "exinscrits" associés à un triangle [28] alors que le cercle inscrit de celui-ci était déjà connu de l'École pythagoricienne à partir de l'intersection de ses bissectrices, et considéré dans les *Éléments* d'Euclide datant du IIIème siècle avant notre ère. C'est dans la première *Annale de Gergonne* de 1810-11, que Simon L'Huilier introduit la dénomination de cercle exinscrit à un triangle.

[25] Gohierre de Longchamps G., *Nouvelles Annales*, tome **5** (1866) 124, proposition **4** ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

[26] Ayme J.-L., Gohierre de Longchamps dans les journaux scientifiques, G.G.G. vol. **5**, p. 14-17 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

[27] L'Huilier S., (1750-1840), *Éléments d'Analyse géométrique et d'Analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques*, Paris et Genève (1809) 198, remarque **I**

[28] L'Huilier S.

En 1818, Joseph Diaz Gergonne [29] introduit un nouveau point remarquable [30] dans le triangle qui avait déjà été signalé dès 1678 par le marquis Jean de Ceva [31] comme le mentionne Michel Chasles [32].

Quelques dizaines d'années plus tard, Eugène Catalan [33] précise dans l'un de ses écrits, l'expression "figure inscrite au cercle et non dans le cercle" en s'appuyant sur le sens du mot "inscrit" qui signifie "être à l'intérieur, dans l'objet considéré". En 1852, dans son livre intitulé *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaires* [34], il montre que les points de contact des cercles inscrit et exinscrit à un même côté d'un triangle sont à égale distance du milieu de ce côté.

En 1860, dans les *Annales* de Gergonne, Christian von Nagel [35] introduit à côté du point de Gergonne, un nouveau point remarquable qui sera appelé "point de Nagel" par l'historiographe Émile Vigarié.

En 1866, Gaston Gohierre de Longchamps [36], connu aussi sous le pseudonyme d'Elgé, généralise les résultats de Gergonne et de von Nagel en considérant les couples de points (P, P') relativement à un triangle donné pour lesquels les droites joignant chaque sommet à P et P' déterminent sur le côtés opposé, deux points à égale distance du milieu de ce côté i.e. deux points isotomes. Travaillant sur la relation symétrique de conjugaison qui lie P à P', il préfère donner à cette conjugaison le nom d'isotomie. Ainsi, les droites joignant chaque sommet à P et P' deviennent des céviennes isotomiques, et P' le conjugué isotomique de P.

> 4° Si l'on joint les trois sommets d'un triangle à un point quelconque de son plan, et qu'on prenne, par rapport aux points milieux des côtés du triangle, les symétriques des points où ces droites rencontrent ces côtés ; que l'on joigne enfin les points ainsi obtenus aux sommets du triangle, les trois droites concourent au même point.
>
> On peut constater que les droites des deux premiers théorèmes enveloppent des courbes semblables à celles qui sont fournies par la méthode de déformation que j'expose en ce moment ; le troisième théorème ne fournit rien, car la droite qui joint les deux points inverses passe constamment par le centre du cercle circonscrit et y est partagée en deux parties égales, de telle sorte que les figures sont simplement déplacées et non déformées, comme il
>
> (125)
>
> importe qu'elles le soient. Le dernier de ces théorèmes, qui fait correspondre un point à un point et réciproquement, réalise géométriquement la transformation analytique que M. Magnus a développée en 1831 dans le *Journal de Crelle*. On peut vérifier pour le cas présent

[37]

---

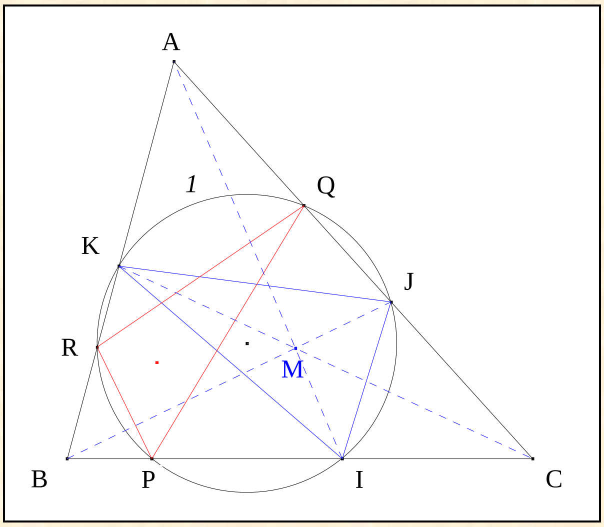
[29] Gergonne J., *Annales* de Gergonne **IX** (1818-19)
[30] Le point de Gergonne
[31] Ceva J., *De lineis rectic se invicem secantibus, statica constructio,* tome II (1678).
[32] Chasles M, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie,* Milan (1837) 296
[33] Catalan E., (1814-1894)
[34] Catalan E., Théorème **20**, *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaires* (1852) 44-46
[35] Nagel (von) C., *Annales* de Gergonne **19** (1860)
[36] Longchamps (de) G. G., *Nouvelles Annales* (1866)
[37] Gohierre de Longchamps G., Étude de géométrie comparée, avec applications aux sections coniques et aux courbes d'ordre supérieur, particulièrement à une famille de courbes du sixième ordre et de la quatrième classe, p. 118-128, *Nouvelles Annales*, tome **5** (1866) 124, proposition **4** ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

IV. CYCLOCÉVIEN

1. Le théorème de Ferriot-Terquem

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
M un point,
IJK le triangle M-cévien de ABC,
1 le cercle circonscrit à IJK
et P, Q, R les second points d'intersection de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB).

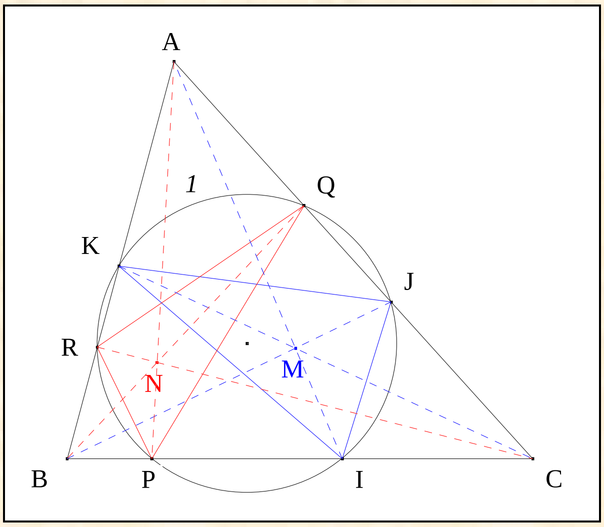
Donné : PQR est un triangle cévien de ABC.[38]

Commentaire : une preuve synthétique de ce résultat peut être vue sur le site de l'auteur. [39]

Scolie : **(1)** *1* est "le cercle cévien de M" ou encore "le cercle M-cévien de IJK".

(2) Terminologie

[38] Terquem O., *Nouvelles Annales* **1** (1842) 403 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0
[39] Ayme J.-L., A new point on Euler line, G.G.G. vol. **5**, p. 3-5 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



- Notons N le point de concours de (P), (BQ) et (CR).

- Nous dirons que "N est le conjugué cyclocévien de M".

Énoncé traditionnel :

le cercle cévien d'un point M
est aussi
le cercle cévien d'un second point N, éventuellement confondu avec M.

Énoncé moderne :

le cercle qui passe par les pieds de trois céviennes concourantes
détermine trois autres points qui sont les pieds de trois céviennes concourantes.

2. Note historique

Suite à Giacome Candido de Pise [40],
M et N sont "les points de Terquem de ABC relativement au cercle considéré".

> Le théorème suivant est bien connu (¹) :
>
> *En joignant un point* T_1 *aux sommets d'un triangle, le cercle qui passe par les trois points* T_{1a}, T_{1b}, T_{1c} *déterminés sur les côtés a, b, c par les droites* AT_1, BT_1, CT_1 *coupe les côtés en trois autres points* T_{2a}, T_{2b}, T_{2c} *tels que les droites qui les joignent aux sommets opposés sont concourantes en un point* T_2.
>
> Nous appellerons *points de Terquem* les points T_1, T_2.

[40] Candido G. (1871-1941), Pour la géométrie récente, *Nouvelles Annales*, tome **19** (1900) 251 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

D'après mes recherches, il semblerait que le résultat de Louis, Antoine-Stanislas Ferriot a été faussement attribué à Olry Terquem qui a tout simplement fait une analyse de l'ouvrage de Ferriot…

ANALYSE D'OUVRAGES.

Application de la méthode des projections à la recherche de certaines propriétés géométriques ; par L. A. S. Ferriot, recteur honoraire de l'Académie de Grenoble, Paris 1838. 1 v. in-8 de 103 pages, 4 pl. (*).

Voici, à cette occasion, un théorème analogue, assez utile à connaître :

Si parmi les six points d'intersection d'une conique avec un triangle, trois sont situés de manière qu'en les joignant par les droites aux sommets du triangle respectivement opposés, les transversales se coupent en un même point, il en sera de même pour les trois autres points et réciproquement, si six points situés deux à deux sur les côtés d'un triangle jouissent de cette propriété, alors les six points sont sur une même conique.

[41]

Aujourd'hui, "les points de Terquem…" sont dits cyclocéviens (cyclocevian conjugate en anglais).
En introduisant la relation "est le point cyclocévien de", les géomètres des vingt dernières années définissent une conjugaison i.e. une transformation

N *est le conjugué cyclocévien de* M.

Pour terminer, rappelons la définition dû à Darij Grinberg

(*) I will use the term of CYCLOCEVIAN CONJUGATES. If A'B'C' is the cevian triangle of a point P with respect to a triangle ABC, then the circumcircle of triangle A'B'C' is called the CEVIAN CIRCLE of P with respect to triangle ABC, and if A", B", C" are the second intersections of this cevian circle with sides BC, CA, AB, then the lines AA", BB", CC" concur (this can be proven by the Ceva theorem), and the point of concurrence is called the CYCLOCEVIAN CONJUGATE of P with respect to triangle ABC.

[42]

---

[41] Terquem O., Analyse d'ouvrages, *Nouvelles annales de mathématiques* 1re série, tome **1** (1842) 401-408 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

[42] Grinberg D., On isotomes and isogonals… ; Cyclocevians, Message *Hyacinthos* # **6380** du 16/01/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

A propos de Louis, Antoine-Stanislas Ferriot

Louis, Antoine-Stanislas Ferriot est né le 19 septembre 1779 à Toul (Meurthe, France).
Après avoir enseigné à Besançon, Baume, Besançon & Limoges, il devient professeur de mathématiques pures et appliquées à la faculté des sciences de Grenoble du 13 octobre 1819 au 26 février 1825.
Rappelons ce commentaire lu dans l'un de ses rapports d'inspection

Nous craignons qu'il n'y ait dans le caractère de M. Ferriot,
un défaut de liant et même un peu de raideur et d'esprit tracassier [43]

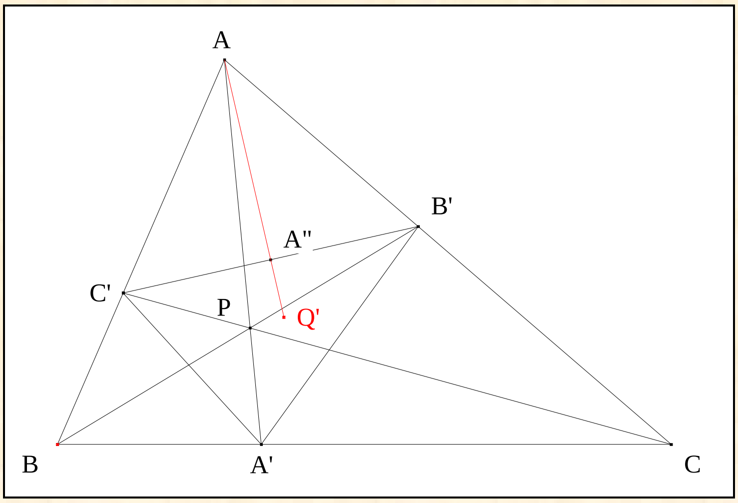
Doyen de la faculté de Grenoble entre 1825 et 1831, puis recteur de l'académie de Grenoble, entre 1831 et 1835, il prend sa retraite en 1835.
Il décède le 9 juillet 1859.

C. ISOTOMCOMPLEMENT

1. Le complément du conjugué isotomique

VISION

Figure :

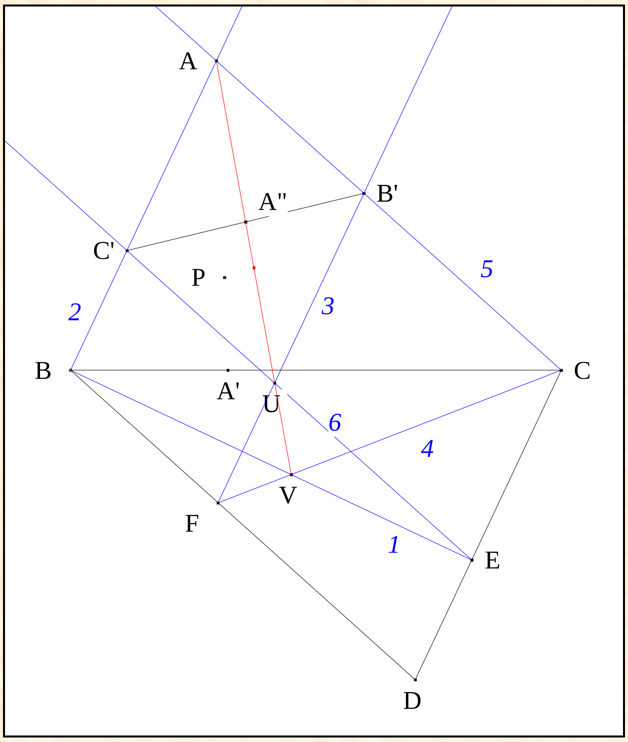


Traits : ABC		un triangle,
P		un point,
Q'		le complément du conjugué isotomique de P,
A'B'C'		le P-triangle cévien de ABC
et A"		le milieu de [B'C'].

Donné : (AA") passe par Q'.

VISUALISATION [44]

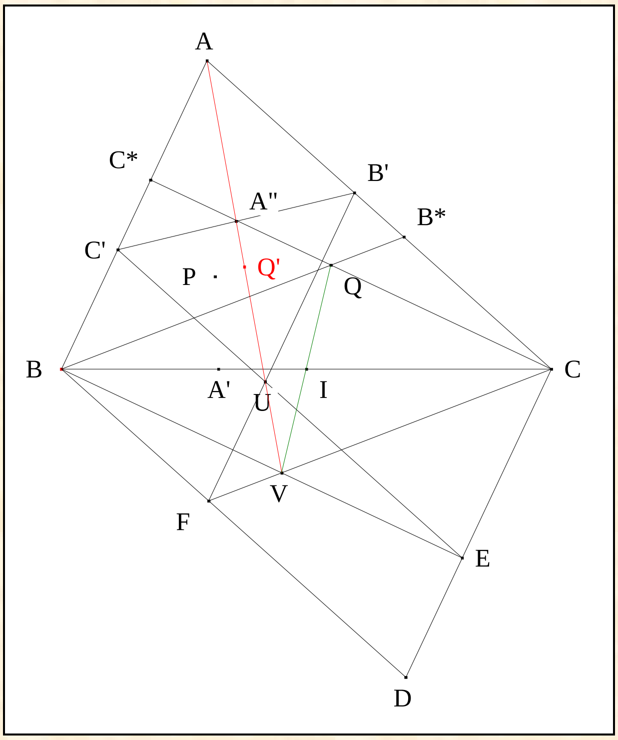
[43] Archives Nationale, F17 6810
[44] De l'auteur



- Notons D le point tel que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme,
  E le point d'intersection de la parallèle à (AC) passant par C' avec (CD),
  F le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par B' avec (BD)
  et U, V le point d'intersection resp. de (C'E) et (B'F), (BE) et (CF).

- D'après Pappus "Deux sommets à l'infini", (VAU) est la pappusienne de l'hexagone dégénéré *123456*.

- Le quadrilatère AC'UB' étant un parallélogramme, A" est sur (VAU).



- Notons B* l'isotome de B' relativement à [AC],

	C*	l'isotome de C' relativement à [AB],
	Q	le conjugué isotomique de P
et	I	le milieu de [BC].

- Par construction, le quadrilatère BVCQ est un parallélogramme;
  en conséquence, Q, I et V sont alignés.

- D'après **B. I. 1**. La construction de Maurice d'Ocagne
  appliqué à ABC et à Q, (AA"UV) passe par le complément de Q
  ou encore
  par le complément du conjugué isotomique de P
  i.e. par Q'.

- **Conclusion :** (AA") passe par Q'.

Scolies : **(1)** Q' est en anglais "the isotomcomplement of P wrt ABC"

que nous traduirons en français par

Q' est "l'isotomcomplément de P relativement à ABC"

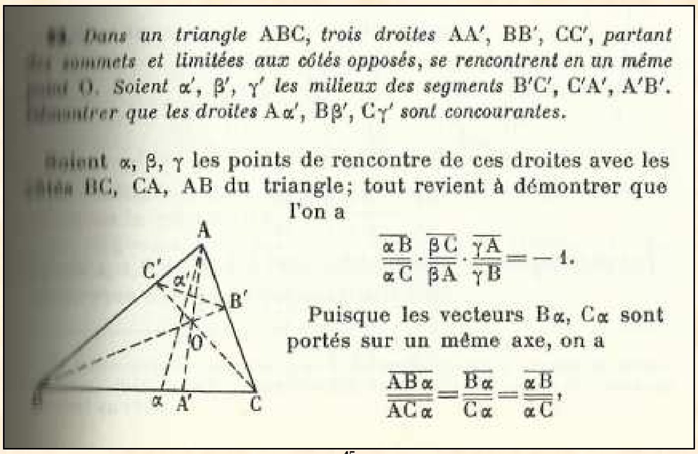
ce qui nous évitera
pour faire court d'utiliser l'expression "complément du conjugué isotomique de P".
Mais attention à l'ordre des mots.

(2) Une formulation équivalente

Q' est le complément du conjugué isotomique de P
si, et seulement si,
P est le conjugué isotomique de l'anticomplément de Q'.

Note historique :

ce résultat que nous pouvons déjà trouver chez Georges Papelier a été démontré en recourant au théorème de Ceva mais sans indiquer la nature géométrique de ce point de concours.


Dans un triangle ABC, *trois droites* AA', BB', CC', *partant des sommets et limitées aux côtés opposés, se rencontrent en un même point* O. *Soient* α', β', γ' *les milieux des segments* B'C', C'A', A'B'. *Démontrer que les droites* Aα', Bβ', Cγ' *sont concourantes.*

Soient α, β, γ les points de rencontre de ces droites avec les côtés BC, CA, AB du triangle; tout revient à démontrer que l'on a

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -1.$$

Puisque les vecteurs Bα, Cα sont portés sur un même axe, on a

$$\frac{\overline{AB\alpha}}{\overline{AC\alpha}} = \frac{\overline{B\alpha}}{\overline{C\alpha}} = \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}},$$

[45]

Nous retrouvons ce résultat dans deux message *Hyacinthos* de Darij Grinberg dans lesquels il indique que le théorème **1** peut être prouvé en en utilisant soit

[45] Papelier G., Transversales, *Exercices de Géométrie Moderne*, Paris (1927), Rééditions J. Gabay, Paris (1996) n°**82** p.72-73

* "the cevian nests theorem" [46] mais qui ne donne pas la nature géométrique du point de concours

* les coordonnées barycentriques qui en donne une indication .

> THEOREM 1: If A'B'C' is the cevian triangle of P, and A1, B1, C1 are the midpoints of its sides B'C', C'A', A'B', then the lines AA1, BB1, CC1 concur at the isotomcomplement Q of P with respect to ABC.
>
> The concurrence (without the fact that the point of concurrence is Q) is easy to prove (it is a special case of cevian nests). A corollary of Theorem 1 is:

[47]

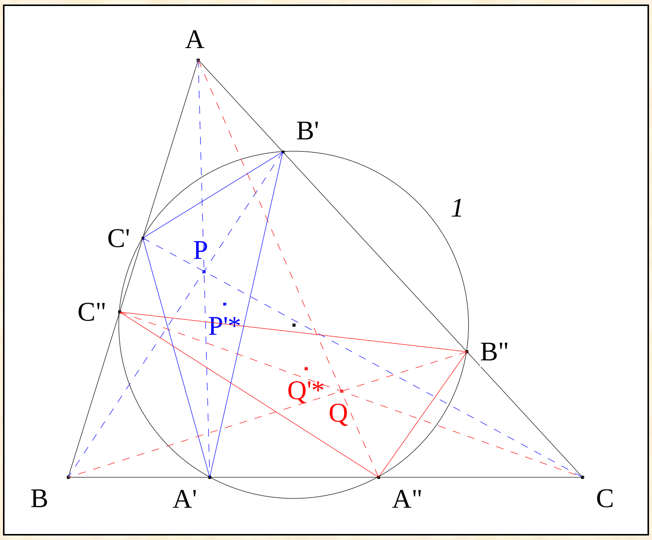
> >> THEOREM 1: If A'B'C' is the cevian triangle of P, and
> >> A1, B1, C1 are the midpoints of its sides B'C',
> >> C'A', A'B', then the lines AA1, BB1, CC1 concur at
> >> the isotomcomplement Q of P with respect to ABC.
>
> And if A2, B2, C2 are the reflections of P in A1, B1, C1, then the lines AA2, BB2, CC2 concur at the complement of P with respect to ABC.
>
> Both of these theorems can be proven by barycentric coordinates.

[48]

2. Les isotomcompléments de deux points cyclocéviens

VISION

Figure :



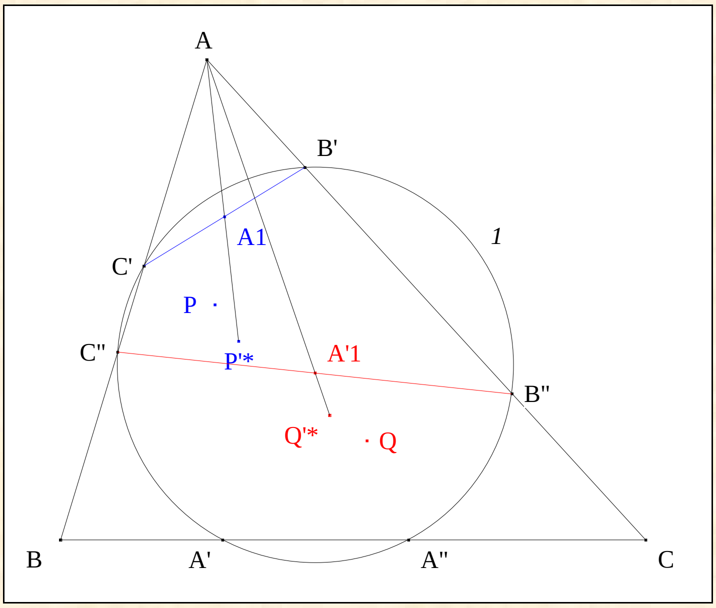
Traits : ABC un triangle,

[46] Ayme J.-L., The cevian nests theorem, G.G.G. vol. **3** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme
[47] Grinberg D., Istomcomplement theory, theorem **1**, Message *Hyacinthos* # **6423** du 24/01/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/
[48] Grinberg D., Istomcomplement theory, theorem **1**, Message *Hyacinthos* # **6437** du 27/01/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

	P	un point,
	P'*	l'isotomcomplément de P,
	A'B'C'	le triangle P-cévien de ABC,
	1	le cercle circonscrit à A'B'C',
	Q	le conjugué cyclocévien de P
et	Q'*	l'isotomcomplément de Q.

Donné : Q'* est le conjugué isogonal de P'*****. [49]

VISUALISATION



- Notons A1, A'1 les milieux resp. de [B'C'], [B"C"].
- D'après **C. 1.** Le complément du conjugué isotomique de P, (AA1) passe par P'*
  (AA'1) passe par Q'*.
- **Scolie :** (AA'1Q'*) est la A-médiane du triangle AC"B".
- D'après "D'une médiane à une symédiane" (Cf. Appendice **1**),

  la A-médiane (AA1P'*) du triangle AC'B' est la A-symédiane du triangle AC"B"
- **Conclusion partielle :** (AA1P'*) et (AA'1Q'*) sont deux A-isogonales de ABC.
- Notons B1, B'1 les milieux resp. de [C'A'], [C"B"]
  et C1, C'1 les milieux resp. de [A'B'], [A"B"].
- Mutatis mutandis,
  nous montrerions que **(1)** (BB1P'*) et (BB'1Q'*) sont deux B-isogonales de ABC

  (2) (CC1P'*) et (CC'1Q'*) sont deux C-isogonales de ABC.
- **Conclusion :** d'après **B. II. 1.** scolie, Q'* est le conjugué isogonal de P'*.

---

[49] Ehrmann J.-P., Proofs of Feuerbach theorem, Message *Hyacinthos* # **455** du 03/03/2000 ;
Wolk B., Proofs of Feuerbach theorem, Message *Hyacinthos* # **462** du 03/03/2000 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

Commentaire : Darij Grinberg dit que ce résultat est

A real hit of the theory

dans la mesure où les points cyclocéviens prennent un sens particulier.

Énoncé traditionnel :

si, deux points sont cyclocéviens
alors, leurs isotomcompléments sont conjugués isogonaux.

Note historique :

ce résultat a déjà été suggéré par Jean-Pierre Ehrmann en 2000, puis précisé par Barry Wolk sans en donner une preuve synthétique.

> May be, it would be interesting to study the group G generated by isogonal conjugaison and cyclocevian conjugaison and to try to find the points M such as the set of W(s(M)) - with s in G - is a finite subset of the NPC.

[50]

> Now a few results:
> The 9PC is the cevian circumcircle of G, and also that of the orthocenter H. Does this generalize? Well, it is easy to show that, for any two points P and Q, the cevian points of P and the cevian points of Q all lie on a conic. And I have just proved that P and Q have the same cevian circumcircle iff sub(iso(P)) and sub(iso(Q)) are isogonal conjugates. The hardest part of this was finding the result which was to be proved -- the proof itself wasn't that bad, just some fiddling with the equations.

[51]

Ce résultat a été reformulé et démontré par Darij Grinberg en 2003

> THEOREM 8: If two points are cyclocevian conjugates, then their isotomcomplements are isogonal conjugates.
>
> This can be proven synthetically by Theorem 1. Note that a restatement of Theorem 8 gives a direct construction of the cyclocevian conjugates (see also Hyacinthos #462):

[52]

---

[50] Ehrmann J.-P., Proofs of Feuerbach theorem, Message *Hyacinthos* # **455** du 03/03/2000 ;
[51] Wolk B., Proofs of Feuerbach theorem, Message *Hyacinthos* # **462** du 03/03/2000 ;
[52] Grinberg D., Isotomcomplement theory, theorem **8**, Message *Hyacinthos* # **6423** du 24/01/2003 ;
http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

PROOF OF THEOREM 8: Let A'B'C' and A"B"C" be the cevian triangles of the points P and P', that are cyclocevian conjugate. Let Q and Q' be the isotomcomplements of P and P', and let $A_1B_1C_1$ and $A_1'B_1'C_1'$ be the medial triangles of triangles A'B'C' and A"B"C". Since after Theorem 1, Q lies on BB_1, and Q' lies on BB_1', we simply have to show that

(1) angle ABB'_1 = angle CBB_1.

We have

angle C"BA" = angle C'BA' (obvious);
angle BC"A" = angle C'C"A"
= angle C'A'A" (cyclic)
= angle BA'C'.

Therefore, triangles BC"A" and BA'C' are similar. But from the similarity of two triangles, we can conclude the similarity of respective triangles enclosed by two sides and one median; thus from the similarity of BC"A" and BA'C', we get the similarity of $BC"B_1'$ and $BA'B_1$. Therefore, angle $C"BB_1'$ = angle $A'BB_1$, what yields (1). [53]

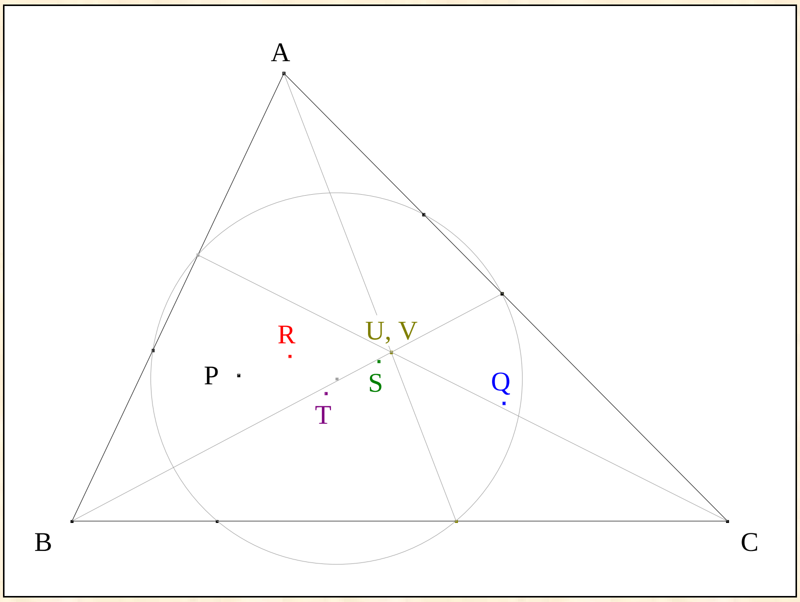
D. PREUVE SYNTHÉTIQUE

DE

LA LONGUE PHRASE

VISION

Figure :

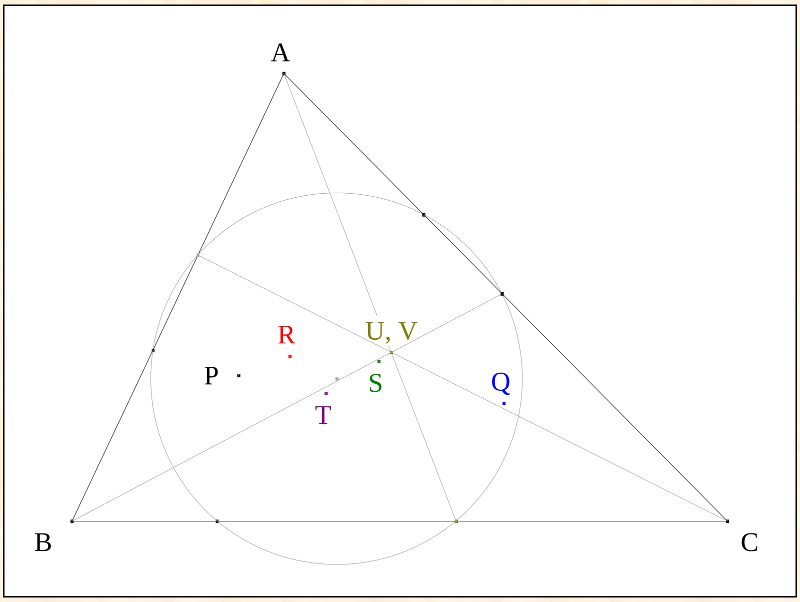


[53] Grinberg D., Isotomcomplement theory, theorem **8**, Message *Hyacinthos* # **6427** du 25/01/2003 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

Traits : ABC un triangle,
P un point,
Q le conjugué isotomique de P,
R le complément de Q,
S le conjugué isogonal de R,
T l'anticomplément de S,
U le conjugué isotomique de T
et V le conjugué cyclocévien de P.

Donné : V et U sont confondus.

VISUALISATION



- D'après **C. 2.** Les isotomcompléments de deux points cyclocéviens, appliqué à P et V

  nous avons : **(1)** R est le complément du conjugué isotomique de P

  (2) S est le conjugué isogonal de R

  (3) S est le complément du conjugué isogonal de V.

- D'après **C. 1.** Le complément du conjugué isotomique

  nous pouvons dire que V est le conjugué isotomique de l'anticomplément de S ;

  par hypothèse, U est le conjugué isotomique de l'anticomplément de S.

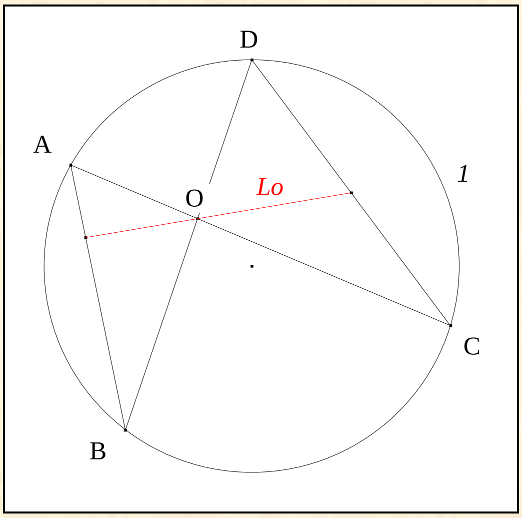
- **Conclusion :** V et U sont confondus.

E. APPENDICE

1. D'une médiane à une symédiane

VISION

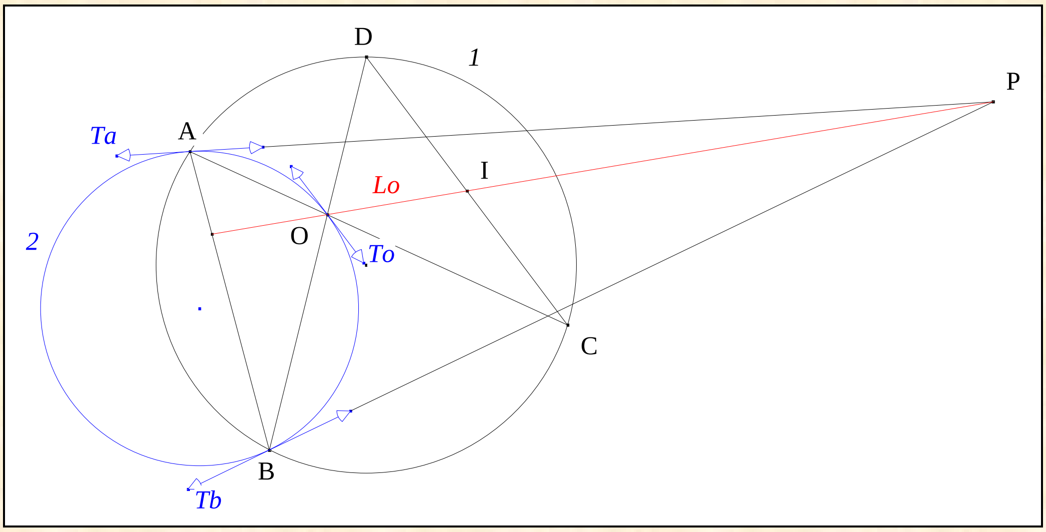
Figure :



Features :	*1*	a circle,
	ABDC	a crossed quadrilateral of *1*,
	O	the point of intersection of the segments AC and BD
and	*Lo*	a line through O.

Given : *Lo* is the O-symmedian of OAB *if, and only if,* *Lo* is the O-median of OCD.

NECESSARY VISUALIZATION



- Note *2* the circumcircle of OAB,
  Ta, *Tb*, *To* the tangents to *2* at A, B, O resp.,
  P the point of intersection of *Ta* and *Tb*,

and I the midpoint of CD.

- **Scolie :** OP is the O-symmedian of OAB.

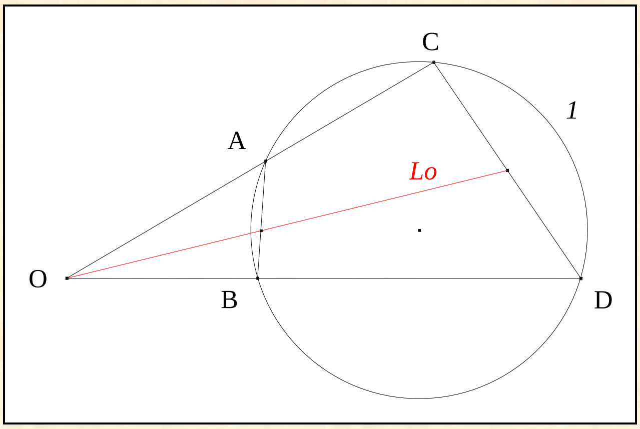
- The circles *2* and *1*, the basic points A and B, the monians OAC and OBD, lead to the Reim's theorem **1** ; consequently, *To* // CD.

- **Scolie :** OP goes through I.

- **Conclusion :** *Lo* is the O-median of OCD.

Commentaire : the sufficient visualization is immediat.

Remark : another vision [54]



- **Conclusion :** *Lo* is the O-symmedian of OAB *if, and only if,* *Lo* is the O-median of OCD.

[54] Round de sélection, O. M. de la ville de St-Petersburg, Russie, (1997).