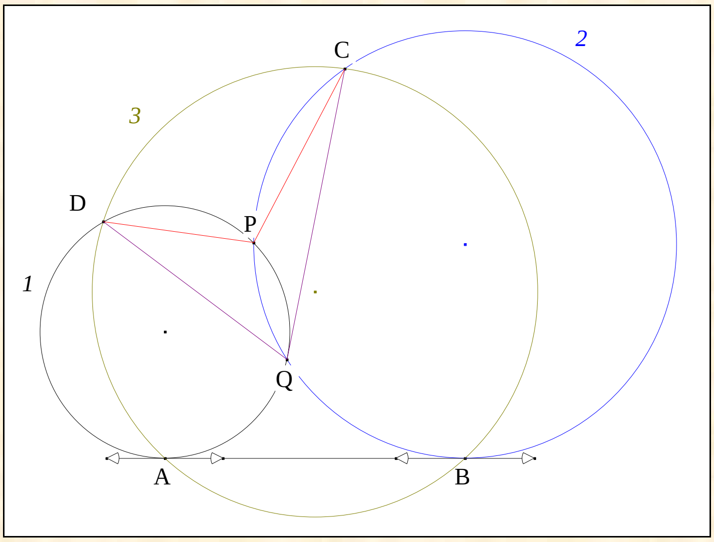
CULTURE GÉOMÉTRIQUE 9

UNE PROPORTION REMARQUABLE

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente une résolution originale d'une proportion basée sur un cercle passant par cinq points et sur deux droites parallèles.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Remerciements. Ils vont tout particulièrement au professeur Ercole Suppa de Teramo (Italie) qui a relu et corrigé nombre de mes articles ainsi que pour la traduction en italien de cette note. Sa passion pour la Géométrie du Triangle mérite d'être remarquée par les Géomètres contemporains.

Abstract. The author presents an original proof of a proportion based a circle that goes through five points and two parallel lines.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

Aknowledgment. They go to the Professor Ercole Suppa of Teramo (Italy) who has reviewed and corrected many of my articles as well as for the translation into Italian of this note. His passion for the Geometry of the Triangle deserves to be noticed by the contemporary Geometers.

1 St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 30/09/2016 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Sunto. L'autore presenta una risoluzione originale basata su un cerchio passante per cinque punti e su due rette parallele.
Le figure sono tutte in posizione generale e tutti i teoremi citati possono essere dimostrati sinteticamente.

Ringraziamenti. Vanno particolarmente al Professor Ercole Suppa di Teramo (Italia) per aver riletto e corretto diversi miei articoli nonchè per la traduzione in italiano di questa nota. La sua passione per la Geometria del Triangolo merita di essere notata dai Geometri contemporanei.

Sommaire

Une courte biographie d'Ercole Suppa

Ercole Suppa was born February 25, 1958 in Teramo (Italy). He graduated in Mathematics in 1981 at the University of Aquila. Taught applied mathematics in a I.T.C. for programmers. He is currently a mathematics and physics teacher at the high school A.Einstein of Teramo. Since 1997 he has dedicated himself to the preparation of young participants in the Math Olympiads and has developed along with his wife, also a professor of mathematics, a website entirely dedicated to math competitions [2].
In 2001 he published the book The *geometrical problem from compass to Cabri* [3] in collaboration with his colleague and friend Italo D'Ignazio who transmitted him a great passion for synthetic geometry.
Enthusiast of problem solving, sent numerous several solutions to geometric problems to various magazines and has set up a website devoted to elementary geometry [4].

---

2 http://www.rotupitti.it
3 D'Ignazio I, Suppa E., *Il problema geometrico, dal compasso al Cabri*, Interlinea Editrice, Teramos, 2001 ; ISBN 88-85426-16-1
4 http://www.esuppa.it

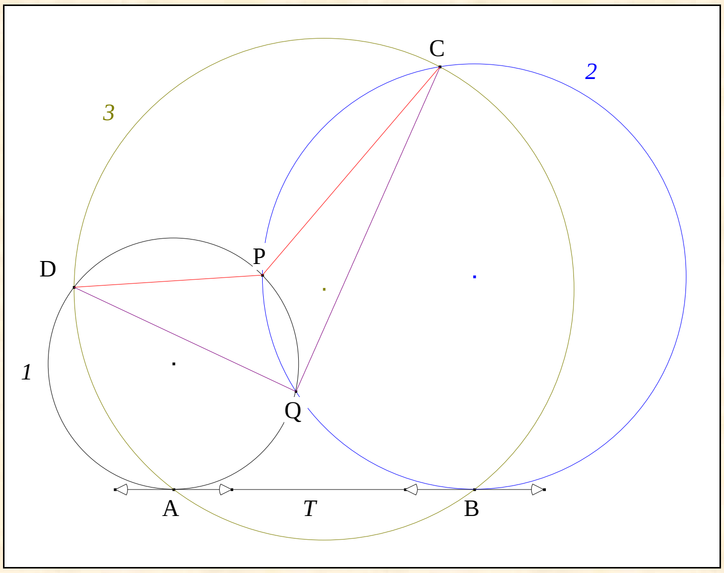
A. LE PROBLÈME

China Western Mathematical Olympiad 2016

Day **1** - Problem **2**

VISION

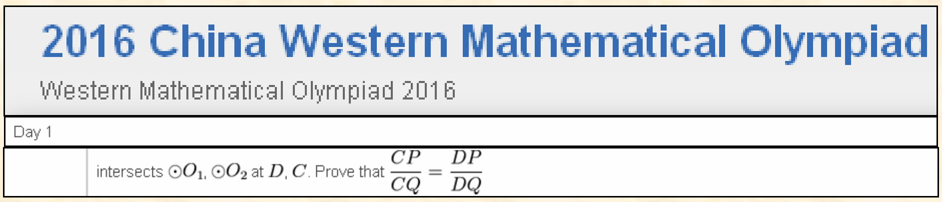
Figure :



Traits : *1*, *2* deux cercles sécants,
P, Q les points d'intersection de *1* et *2*,
T la tangente commune extérieure à *1* et *2* comme indiqués sur la figure,
A, B les points de contact de *T* resp. avec *1*, *2*,
3 un cercle passant par A et B,
et C, D les seconds points d'intersection de *3* resp. avec *2*, *1*.

Donné : QC/QD = PC/PD. [5]

Archive



2016 China Western Mathematical Olympiad

Western Mathematical Olympiad 2016

Day 1

intersects $\odot O_1$, $\odot O_2$ at D, C. Prove that $\frac{CP}{CQ} = \frac{DP}{DQ}$

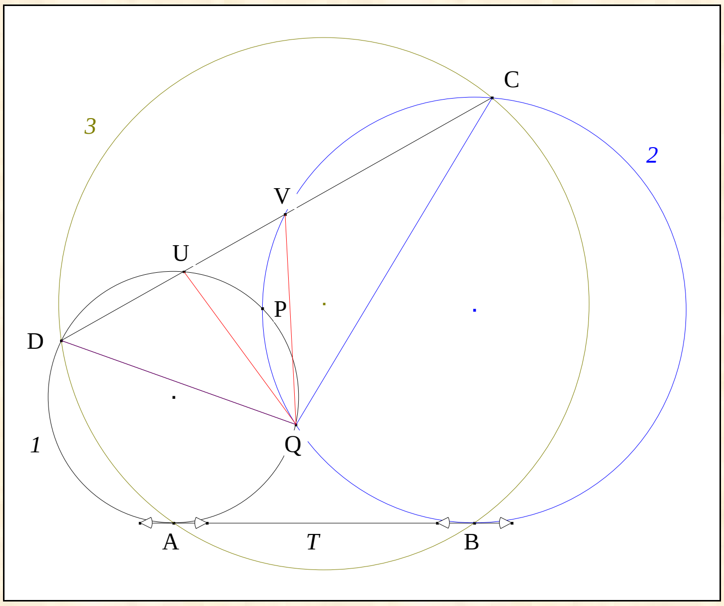
[5] a new geometry, AoPS du 16/08/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1290739_a_new_geometry
Ayme J.-L., Une conjecture, *Les-Mathematiques.net* ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1332318
http://www.esuppa.it/articoli.html

B. TROIS LEMMES

1. Deux isogonales

VISION

Figure :

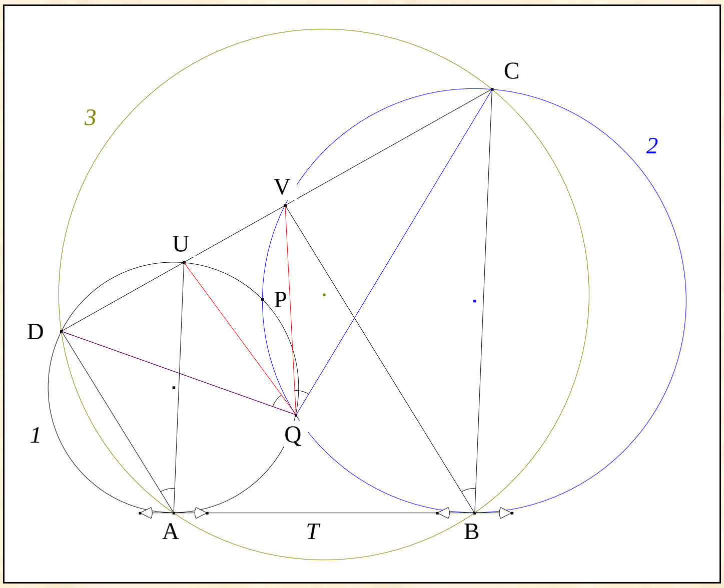


Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
U, V les seconds points d'intersection de (CD) resp. avec *1*, *2*.

Donné : (QU) et (QV) sont deux Q-isogonales du triangle QCD. [6]

VISUALISATION

[6] Ayme J.-L., Two isogonal, AoPS du 22/09/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1309269_two_isogonals



- Les cercles *1* et *3*, les points de base A et D, les moniennes (AAB) et (UDC), conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (AU) // (BC).

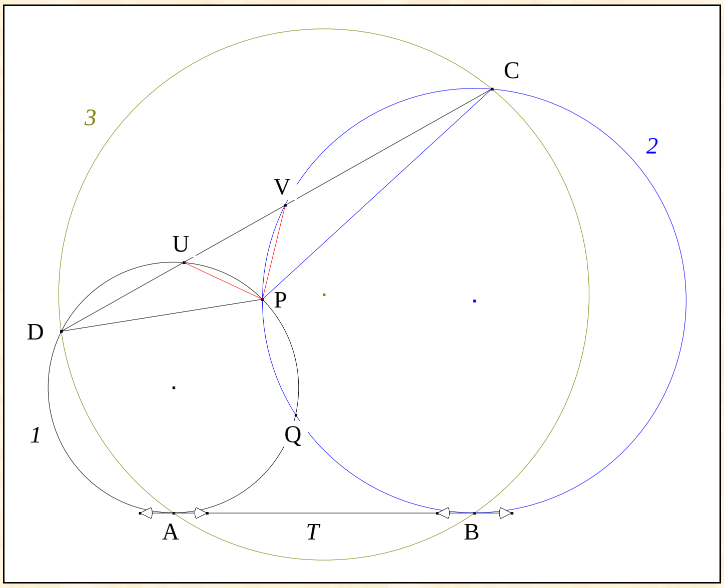
- Les cercles *2* et *3*, les points de base B et C, les moniennes (BBA) et (VCD), conduisent au théorème **3** de Reim ; il s'en suit que (BV) // (AD).

- Une chasse angulaire :

  * par "Angles à côtés parallèles", <UAD = <CBV
  * par "Angles inscrits", <UAD = <UQD et <CBV = <CQV
  * par substitution, <UQD = <CQV.

- **Conclusion :** (QU) et (QV) sont deux Q-isogonales du triangle QCD.

Scolie : vision gémellaire

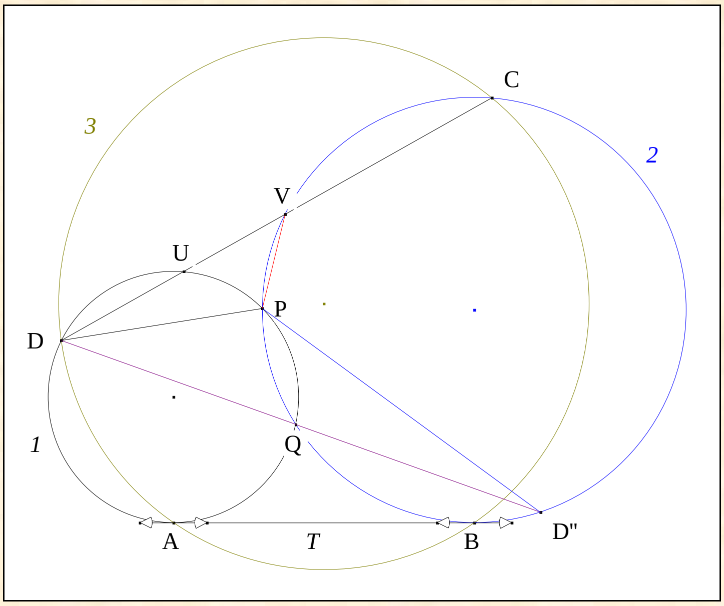


- **Conclusion :** (PU) et (PV) sont deux P-isogonales du triangle PCD.

2. Huit bissectrices intérieures

VISION

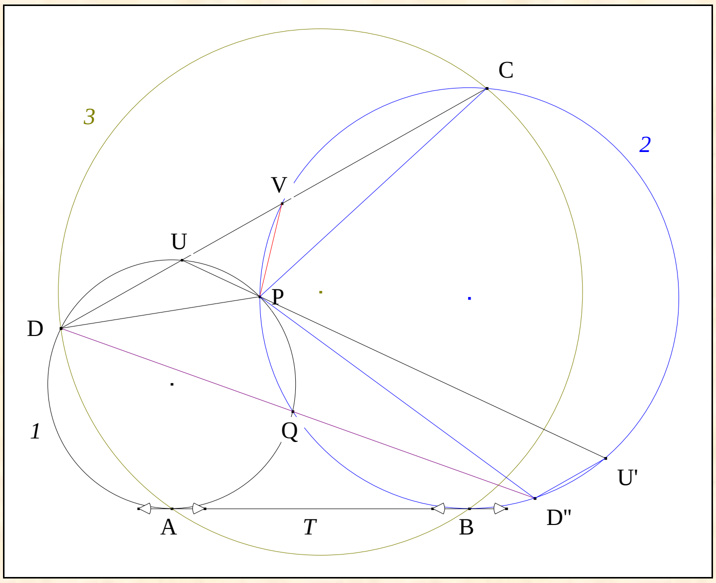
Figure :



Traits : aux hypothèses et notations précédentes, nous ajoutons
D" le second point d'intersection de (DQ) avec *2*.

Donné : (PV) est la P-bissectrice intérieure du triangle PDD".[7]

VISUALISATION



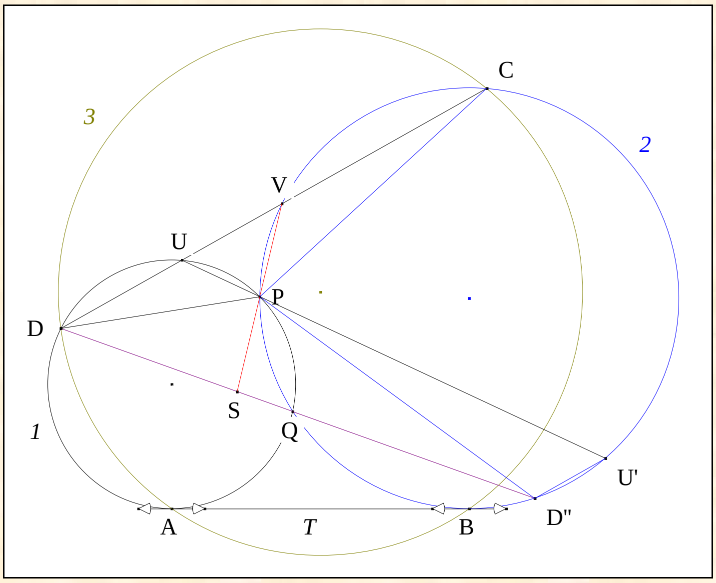
---

[7] Ayme J.-L., A bisector, AoPS du 21/09/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1308859_a_bisector
Ayme J.-L., Une bissectrice, Les-Mathematiques.net ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1330510

- Notons U' le second point d'intersection de (UP) avec *2*.

- Les cercles *2* et *1*, les points de base Q et P, les moniennes (D"QD) et (U'PU), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (D"U') // (DU) ;
  par hypothèse, (DU) // (VC) ;
  par transitivité de //, (D"U') // (VC).

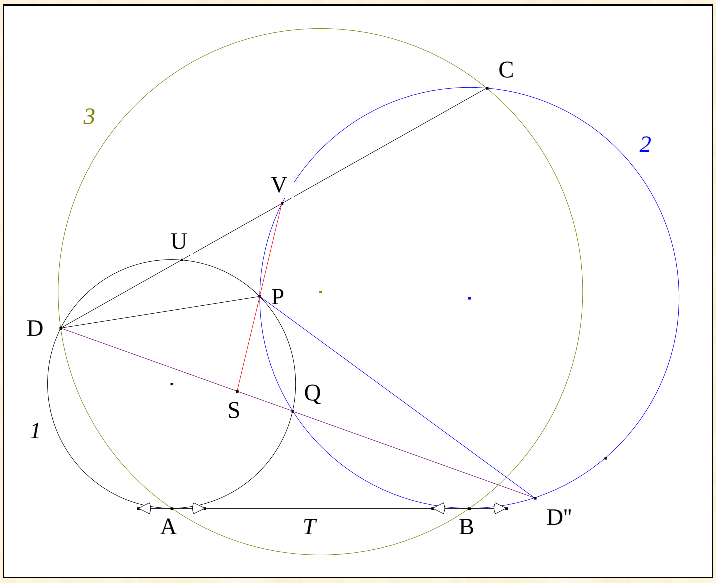
- **Conclusion partielle :** (PD") et (PU') sont deux P-isogonales du triangle PVC.



- Une chasse angulaire à **Π** près :

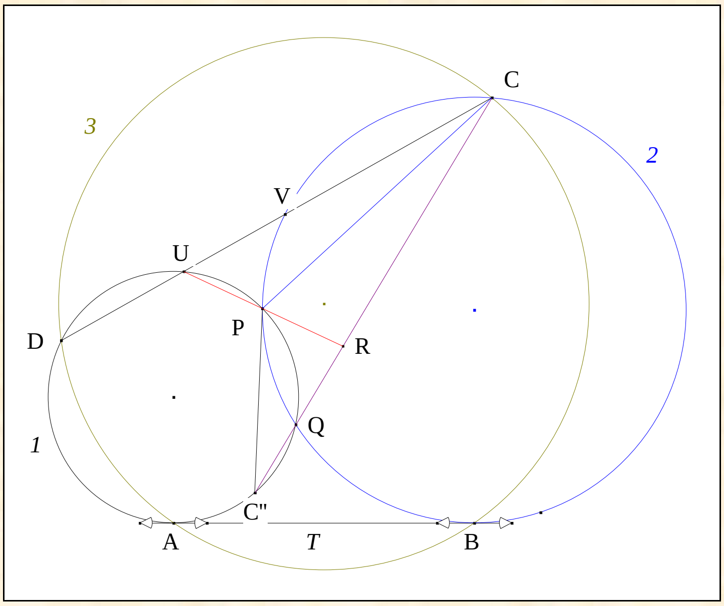
  * par isogonalité, <D"PV = <U'PC
  * par une autre écriture, <U'PC = <UPC
  * par **B.1**. Deux isogonales, <UPC = <VPD
  * par transitivité de //, <D"PV = <VPD.

- **Conclusion :** (PV) est la P-bissectrice intérieure du triangle PDD".



- Notons S le point d'intersection de (PV) et (QD),

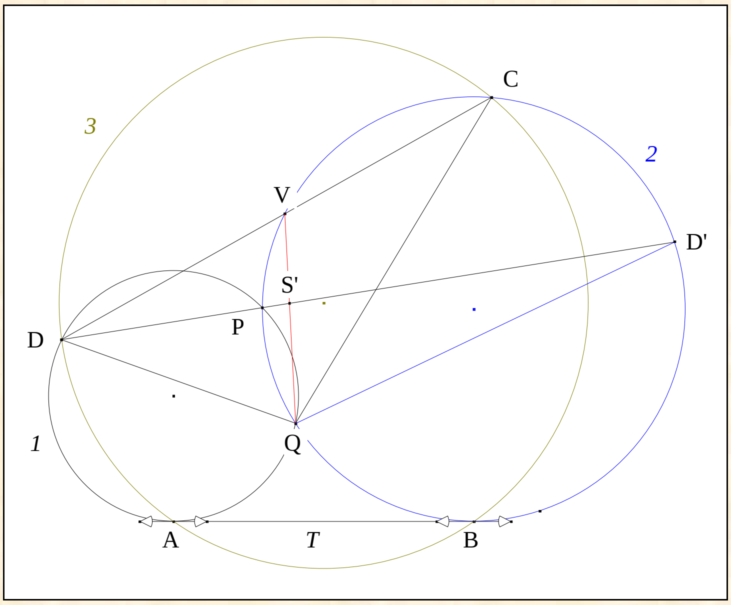
Scolies : **(1)** La bissectrice (PU)



- Notons C" le second point d'intersection de (CQ) avec *1*.
  et R le point d'intersection de (PU) et (QC).

- **Conclusion :** (PU) est la P-bissectrice intérieure du triangle PCC".

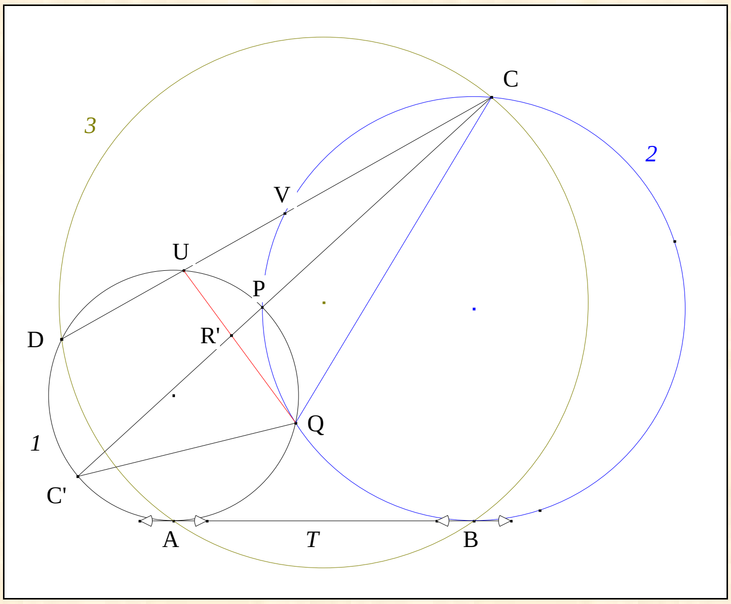
(2) La bissectrice (QV)



- Notons S' le point d'intersection de (QV) et (PD),
  et D' le second point d'intersection de (DP) avec *2*.

- **Conclusion :** (QV) est la Q-bissectrice intérieure du triangle QDD'.

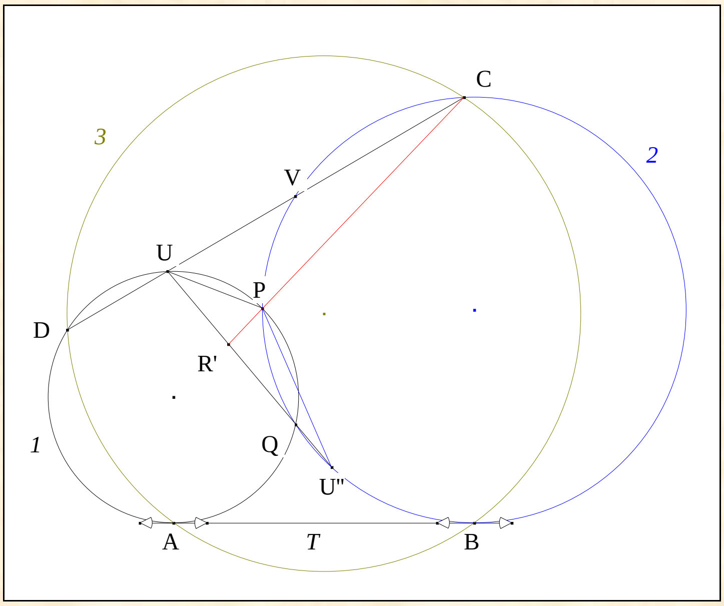
(3) La bissectrice (QU)



- Notons R' le point d'intersection de (QU) et (PC)
  et C' le second point d'intersection de (CP) avec *1*.

- **Conclusion :** (QU) est la Q-bissectrice intérieure du triangle QCC'.

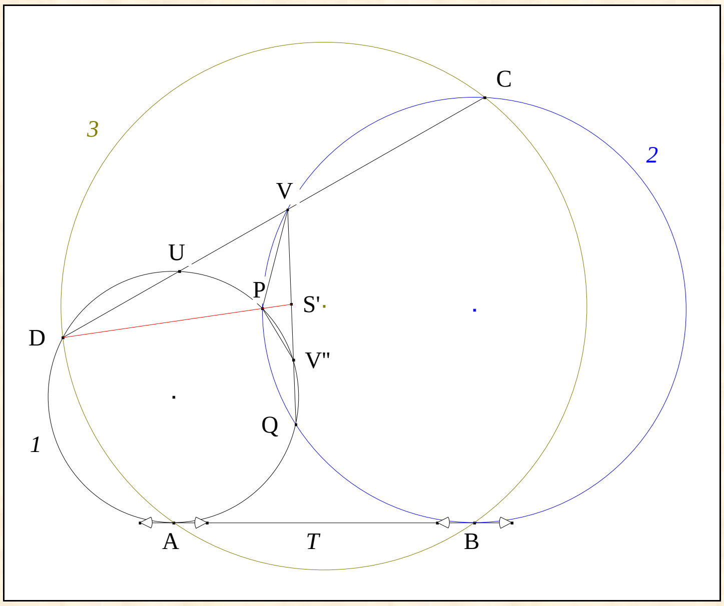
(4) La bissectrice (PC)



- Notons U" le second point d'intersection de (UQ) avec *2*.

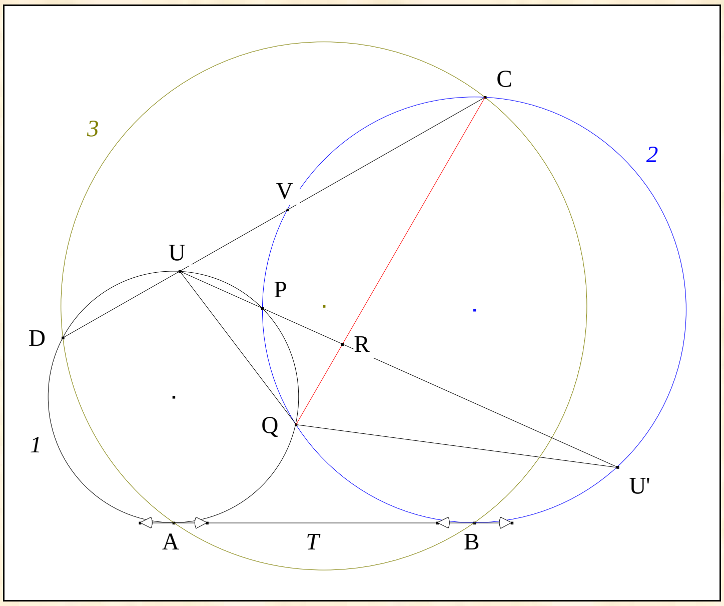
- **Conclusion :** (PC) est la P-bissectrice intérieure du triangle PUU".

(5) La bissectrice (PD)



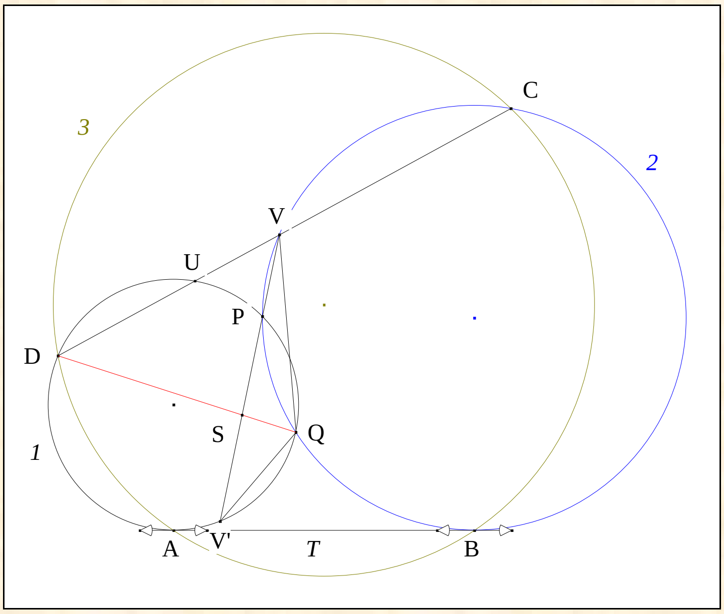
- Notons V" le second point d'intersection de (VQ) avec *1*.
- **Conclusion :** (PD) est la P-bissectrice intérieure du triangle PVV"

(6) La bissectrice (QC)



- Notons U' le second point d'intersection de (UP) avec *2*.
- **Conclusion :** (QC) est la Q-bissectrice intérieure du triangle QUU'

(7) La bissectrice (QD)

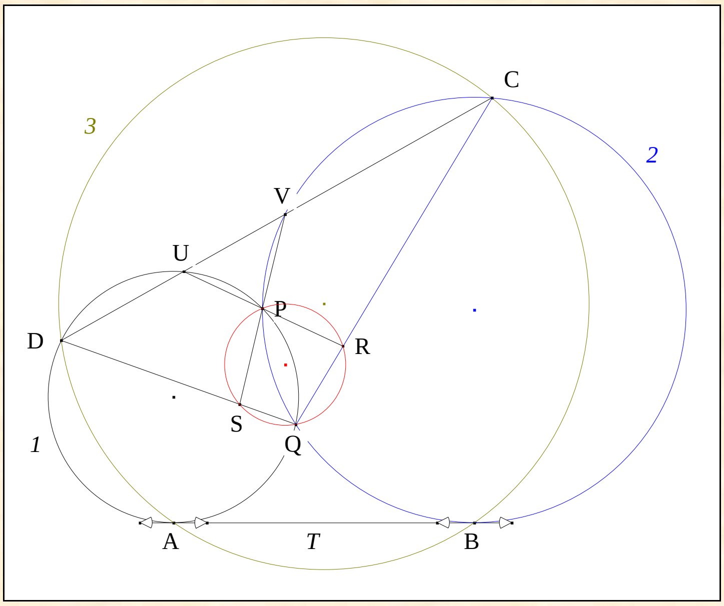


- Notons V' le second point d'intersection de (VP) avec *1*.
- **Conclusion :** (QD) est la P-bissectrice intérieure du triangle QVV'

3. Six points cocycliques et trois parallèles entre elles

VISION

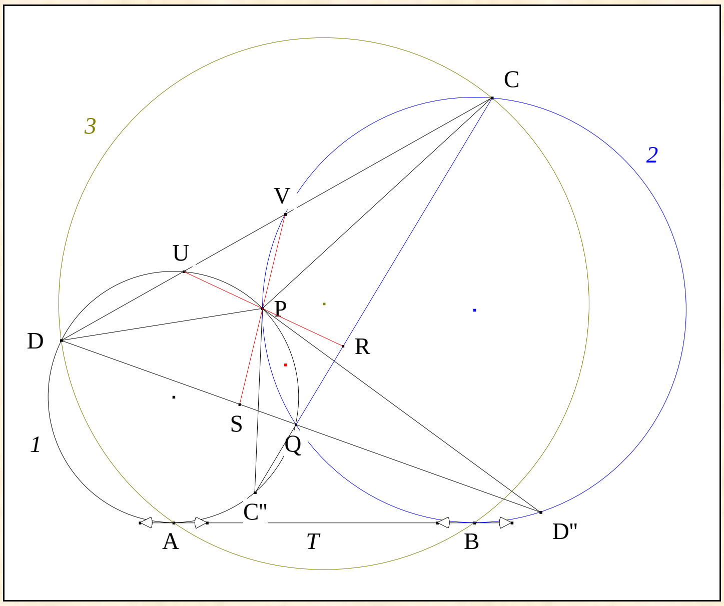
Figure :



Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : P, Q, R et S sont cocycliques. [8]

VISUALISATION



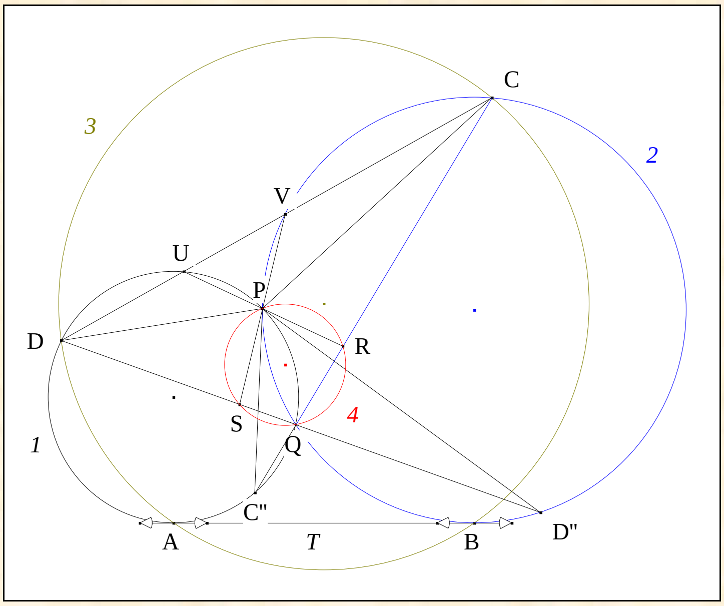
- D'après **B. 2.** Huit bissectrices, **(1)** (PV) est la P-bissectrice intérieure du triangle PDD"

  (2) (PU) est la P-bissectrice intérieure du triangle PCC".

[8] Ayme J.-L., Suppa E. ; http://www.esuppa.it/problemirisolti.html

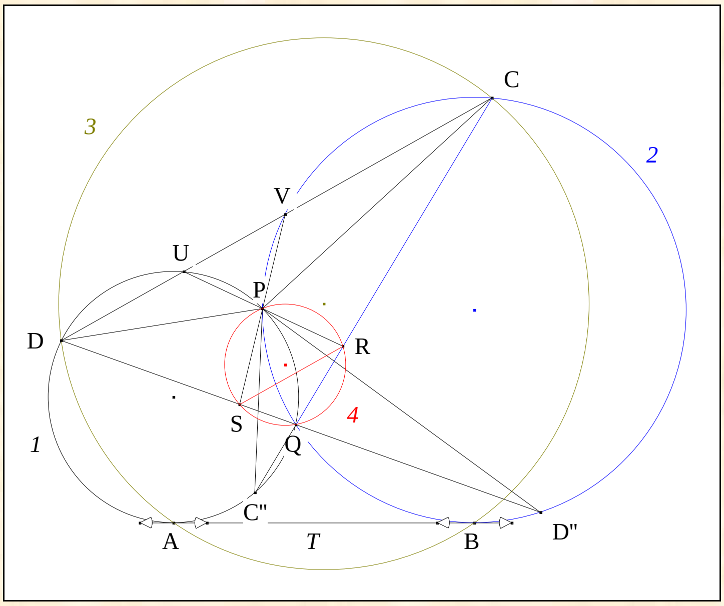
- D'après "Le théorème de la bissectrice", **(1)** PD/PD" = SD/SD"

  (2) PC"/PC = RC"/RC.



- Les triangles PDD" et PCC" étant semblables, PD/PD" = PC"/PC ;
- Par substitution, SD/SD" = RC"/RC.
- **Conclusion :** d'après "The mid-circle theorem" [9], P, Q, R et S sont cocycliques.
- Notons *4* ce cercle.

Scolies : **(1)** deux parallèles

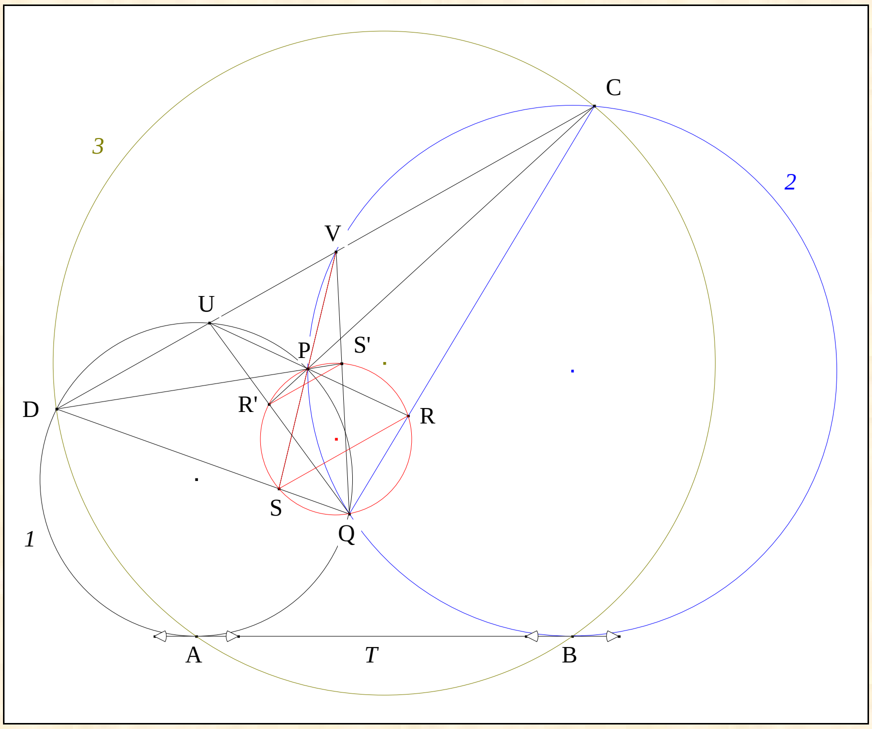


[9] Ayme J.L., The midcircle theorem, G.G.G. vol. **25**, p. 25-26 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/

- Les cercles *4* et *1*, les points de base P et Q, les moniennes (RPU) et (SQD), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (RS) // (UD).

- **Conclusion :** (RS) est parallèle à (CD).

(2) Vision gémellaire



- **Conclusion :** P, Q, R, S, R' et S' sont cocycliques [10]
et
(RS, (R'S') et (CD) sont parallèles entre elles.

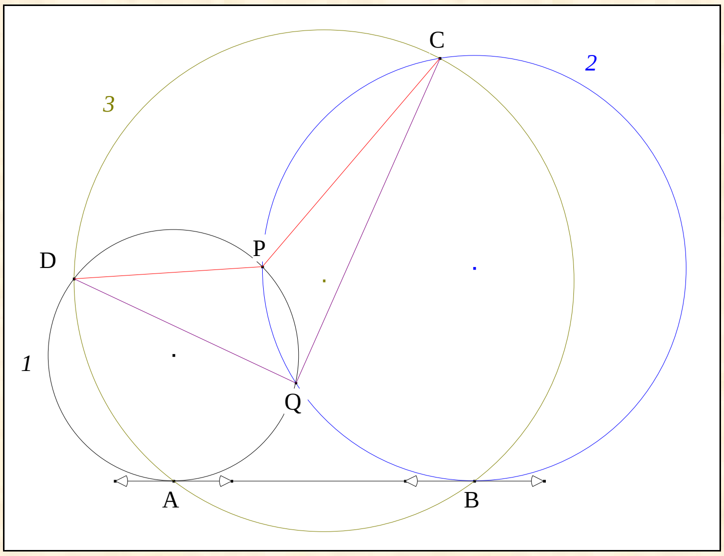
---

10 Ayme J.-L., Six concyclic points, AoPS du 03/10/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1314020_six_concyclics_points
Ayme J.-L., Six points cocycliques, *Les-Mathematiques.net* ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1336574

C. LA PREUVE DE L'AUTEUR

VISION

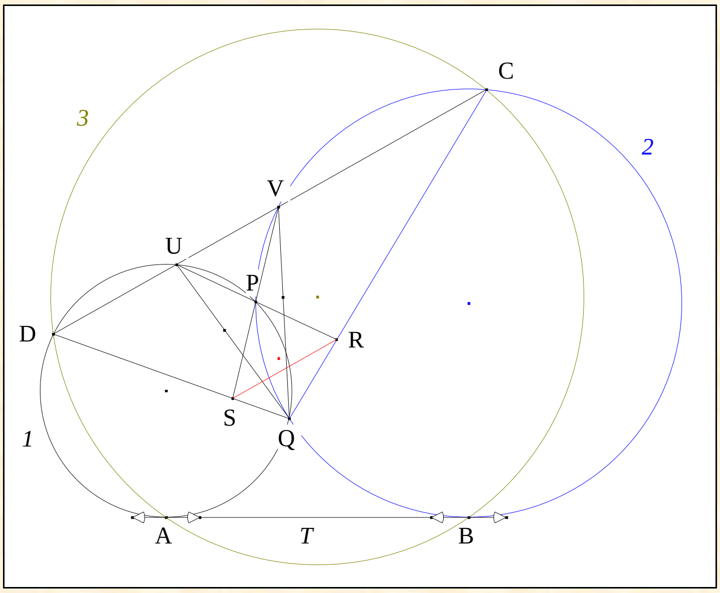
Figure :



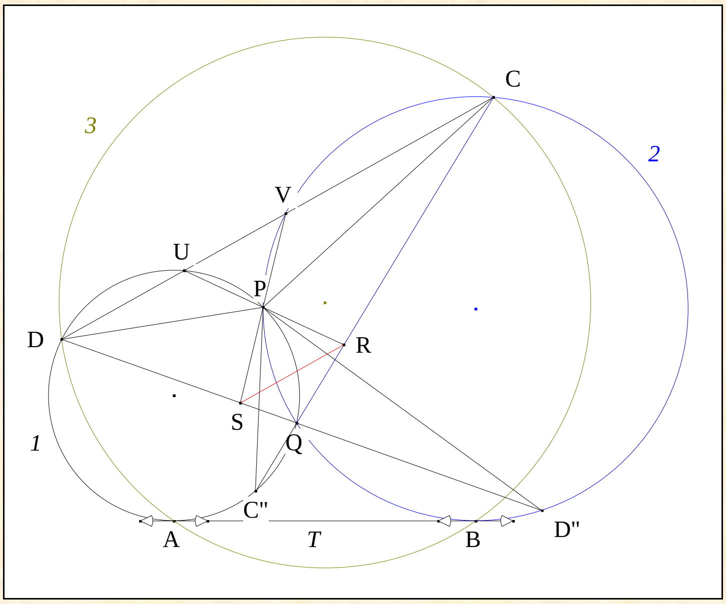
Traits : les hypothèses et notations sont les mêmes que précédemment.

Donné : QC/QD = PC/PD.

VISUALISATION



- D'après Thalès "Rapports", QC/QD = CR/DS.



- Les triangles PCR et PDS étant semblables, CR/DS = PC/PD.

- **Conclusion :** par transitivité de =, QC/QD = PC/PD.