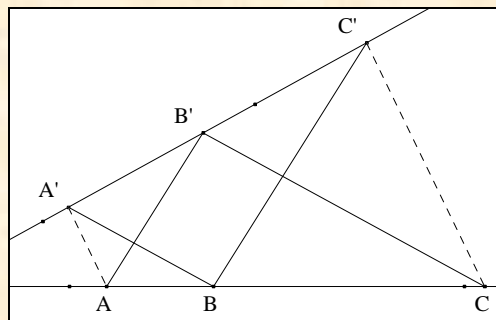


UNE RÊVERIE
DE
PAPPUS D'ALEXANDRIE

A PAPPUS REVERIE

†

Jean - Louis AYME ¹



Résumé. L'article présente une approche non classique du théorème de Pappus et de ses cas particuliers, et propose une série de miniatures concernant ce résultat non démontré par Pappus, mais seulement "rêvé" par celui-ci, d'où le titre de l'article. Le dual de ce théorème conduit à l'hexagone de Brianchon. L'auteur présente ensuite une preuve non classique du théorème de Desargues et donne enfin des exemples. Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The article presents an unconventional approach to the Pappus's theorem and its special cases, and offers a series of miniatures about this result not shown by Pappus, but only "dreamed" by it, hence the title of the article. The dual of this theorem leads to the Brianchon's hexagon. The author then presents a non-classic proof of Desargues theorem and finally gives examples. The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

¹ Saint-Denis, Île de La Réunion (Océan Indien, France) ; jeanlouisayme@yahoo.fr

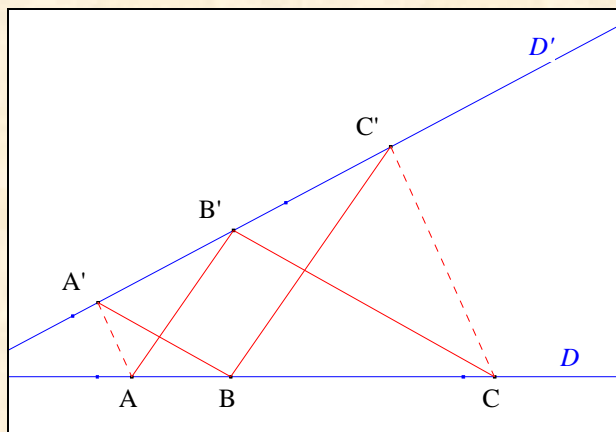
Sommaire	
A. Pappus d'Alexandrie	2
1. Le petit théorème	2
2. Un résultat de Thalès	5
3. La proposition 139	9
4. Une courte biographie de Pappus	16
B. Hexagones particuliers de Pappus	17
1. Premier cas : un sommet à l'infini	17
2. Deuxième cas : deux sommets à l'infini	19
3. Troisième cas : trois sommets à l'infini	22
C. Miniatures pappusiennes	23
1. Un carré et deux triangles équilatéraux	23
2. Un joli résultat	24
3. Pappus et Brahmagupta	25
4. Un triangle, une ménélienne et trois parallélogrammes	28
5. Un triangle et une ménélienne	29
6. Un triangle et deux ménéliennes	31
7. Un quadrilatère complet	31
8. Un pentagone	33
D. Le dual de Pappus	34
1. Principe intuitif de dualité	34
2. L'hexagone de Brianchon ou le dual de celui de Pappus	34
3. Une miniature brianchonienne	38
E. L'architecte Girard Desargues	39
1. Le théorème des deux triangles ou de la perspective conique	39
2. Une courte biographie de Girard Desargues	44
F. Miniatures arguésiennes	45
1. Un résultat de Descartes	45
2. Un quadrilatère complet	47
G. Annexe	48
1. Le théorème de Brahmagupta	48

A. PAPPUS D'ALEXANDRIE

1. Le petit théorème ²

VISION DOUBLE

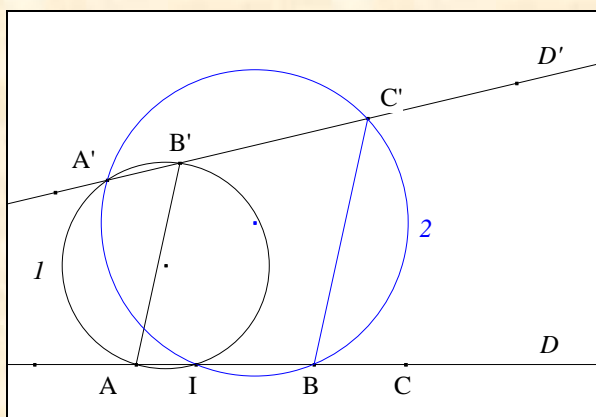
Figure :



Traits : D, D' deux droites,
 A, B, C trois points pris dans cet ordre sur D ,
 A', C' deux points de D' tels que $(AB') \parallel (BC')$ et $(A'B) \parallel (B'C)$,
 et B' un point.

Donné : B' est sur D' si, et seulement si, (AA') est parallèle à (CC') .

VISUALISATION NÉCESSAIRE

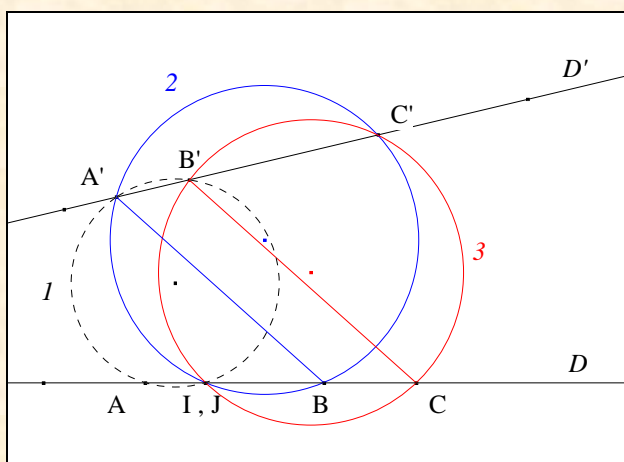


- Notons 1 le cercle passant par A, B', A' ,
- 2 le cercle passant par A', B, C'
- et I le second point d'intersection de 1 et 2 .

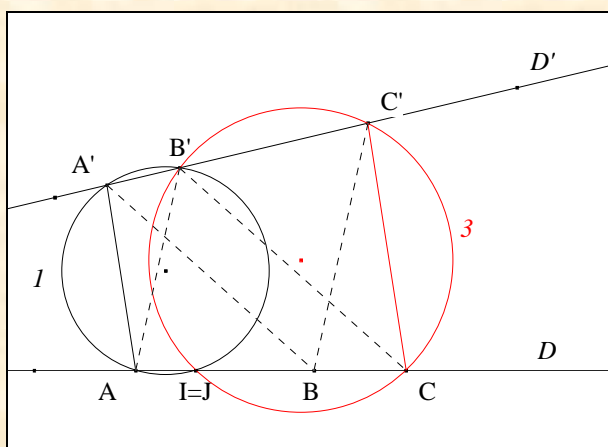
- Les cercles 1 et 2 , les points de base I et A' , la monienne $(B'A'C')$, les parallèles $(B'A)$ et $(C'B)$, conduisent au théorème **0'** de Reim ; en conséquence, A, I et B sont alignés.

² Pappus, *Collections* $\nu\nu\alpha\gamma\omega\gamma'\eta$, Livre VII

- **Conclusion partielle :** I est sur (ABC).

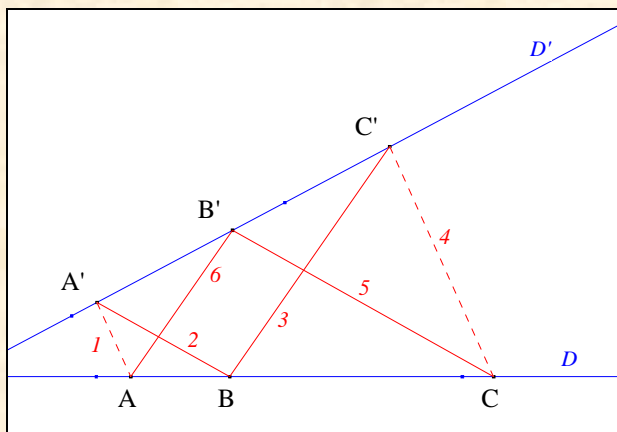


- Notons ω_2 le cercle passant par C, C', B'
et ω_3 le second point d'intersection de 2 et 3.
- Les cercles 2 et 3, les points de base J et C', la monienne $(A'C'B')$, les parallèles $(A'B)$ et $(B'C)$, conduisent au théorème θ' de Reim ; en conséquence, B, J et C sont alignés.
- **Conclusion partielle :** I et J sont confondus.

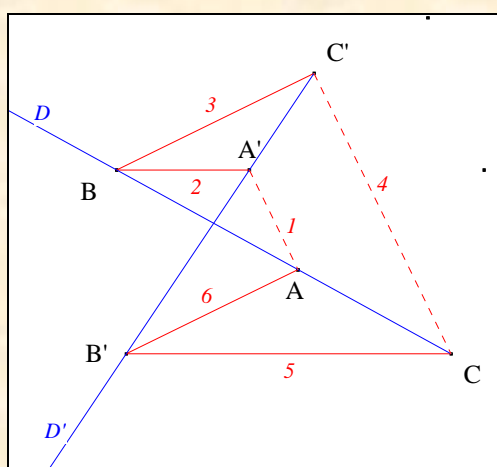


- **Conclusion :** les cercles ω_1 et ω_3 , les points de base I et B', les moniennes (AIC) et $(A'B'C')$, conduisent au théorème θ de Reim ; il s'en suit que $(AA') \parallel (CC')$.

- Scolie :**
- (1) $AA'BC'CB'A$ ayant ses sommets situés alternativement sur D et D' , est un "hexagone de Pappus".
 - (2) Une notation

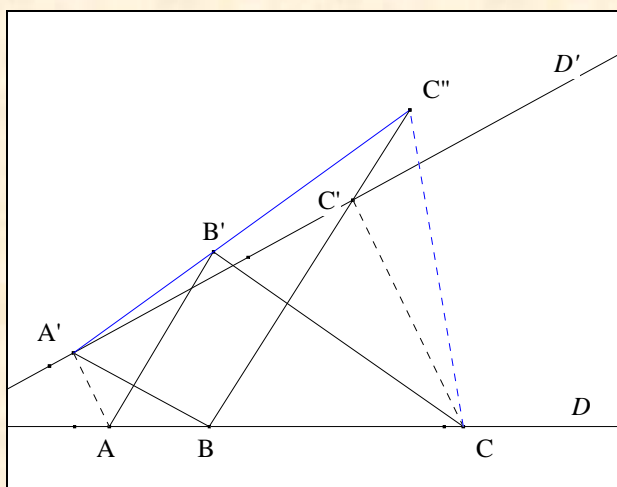


(2) Une figure équivalente à celle de Pappus



Énoncé traditionnel : *si,* un hexagone est de Pappus a deux paires de côtés opposés parallèles
alors, les deux derniers côtés sont parallèles.

VISUALISATION SUFFISANTE



- Raisonons par l'absurde en affirmant que B' n'est pas sur D' .

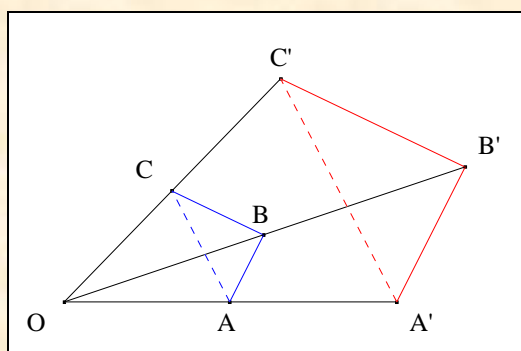
- Notons C'' le point d'intersection de $(A'B')$ et (BC') ;
- **Scolie :** C'' est distinct de C' sinon, B' serait sur D' .
- D'après la visualisation nécessaire, $(AA') // (CC'')$;
ayant pu mener à partir de C , deux parallèles distinctes à (AA') ,
nous sommes en contradiction avec le postulat d'Euclide ;
en conséquence, notre affirmation est fausse.
- **Conclusion :** B' est sur D' .

Énoncé : *si*, cinq des sommets d'un hexagone ayant trois paires de côtés opposés parallèles,
sont sur deux droites
alors, le dernier sommet est sur l'une de ces droites.

2. Un résultat de Thalès

VISION DOUBLE

Figure :



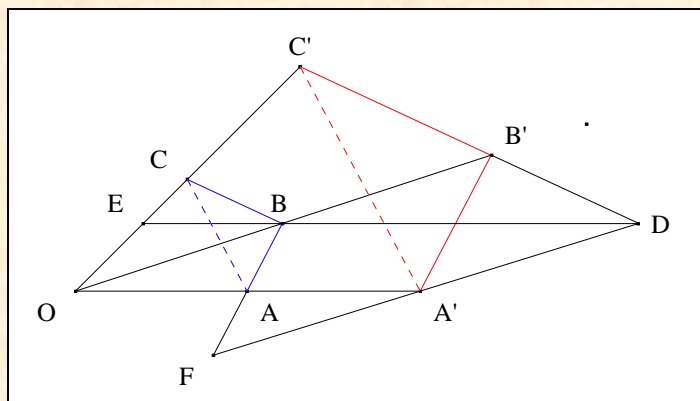
Traits : ABC un triangle,
et $A'B'C'$ un triangle tel que

- (1) (AA') et (BB') soient concourantes en O
- (2) (AB) soit parallèle à $(A'B')$
- (3) (BC) soit parallèle à $(B'C')$.

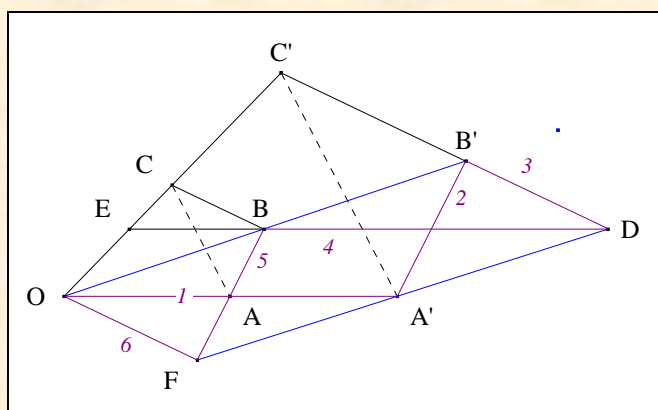
Donné : (CC') passe par O *si, et seulement si,* (AC) est parallèle à $(A'C')$.

VISUALISATION NÉCESSAIRE ³

³ Cette visualisation est de B. I. Argunov et de L. A. Skorniakov

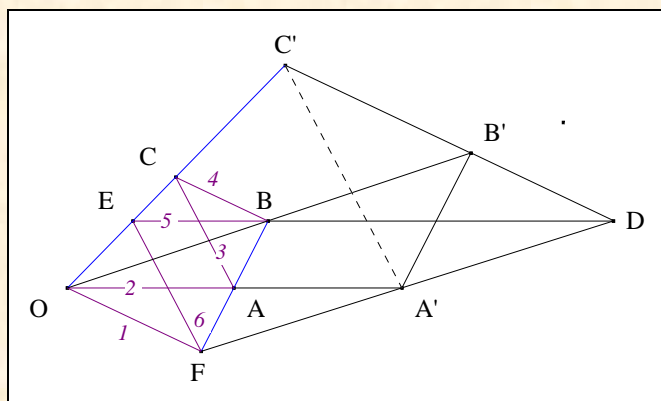


- Notons D, E le point d'intersection la parallèle à (OA) , passant par B , resp. avec $(B'C')$, (OCC')
 et F le point d'intersection de (DA') et (AB) .

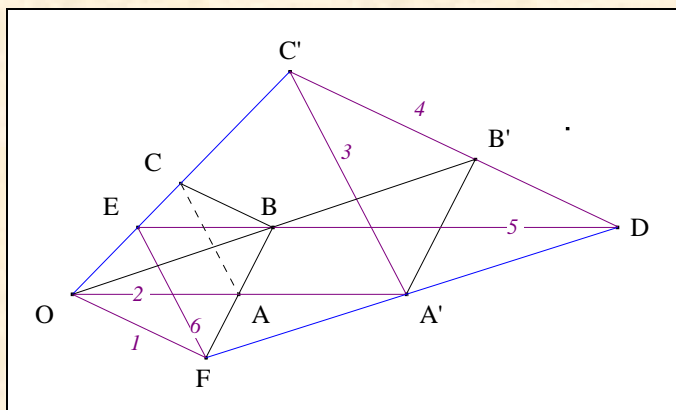


- D'après **A. 1**. Le petit théorème, appliqué à l'hexagone de Pappus $OA'B'DBFO$,
 par hypothèse,
 par transitivité de la relation $//$,

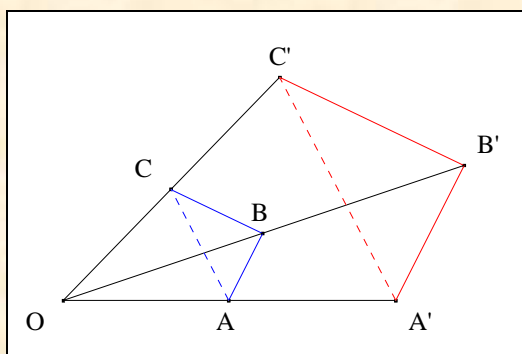
 $(OF) // (B'DC')$;
 $(B'C') // (BC)$;
 $(OF) // (BC)$.



- D'après **A. 1**. Le petit théorème, appliqué à l'hexagone de Pappus $FOACBEF$, $(AC) // (FE)$.



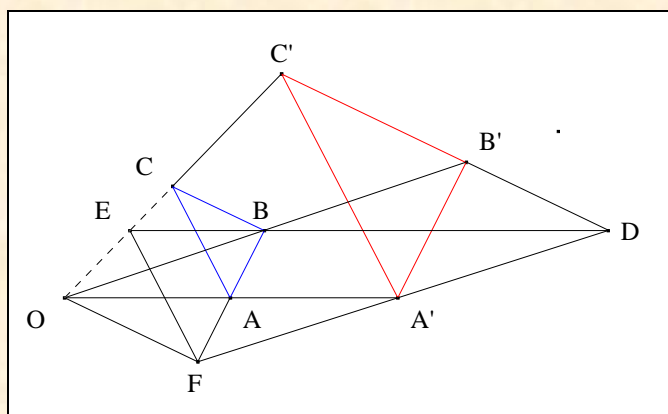
- D'après A. 1. Le petit théorème, appliqué à l'hexagone de Pappus FOA'C'DEF, $(FE) \parallel (A'C')$.



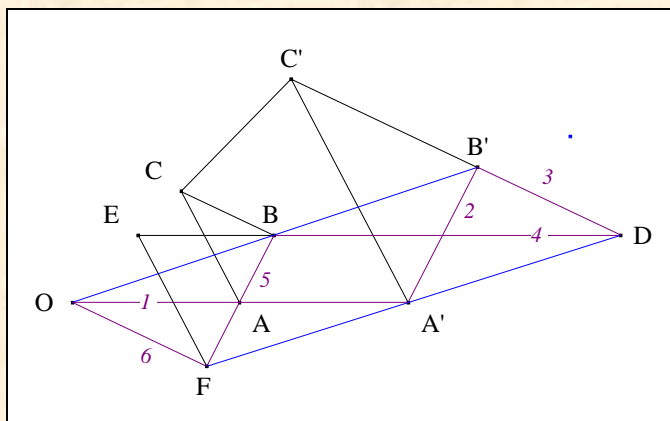
- **Conclusion** : par transitivité de la relation \parallel , $(AC) \parallel (A'C')$.

Énoncé traditionnel : si, deux triangles sont en perspective à partir d'un point,
et que deux paires de côtés correspondants sont parallèles
alors, les deux côtés restants sont parallèles.

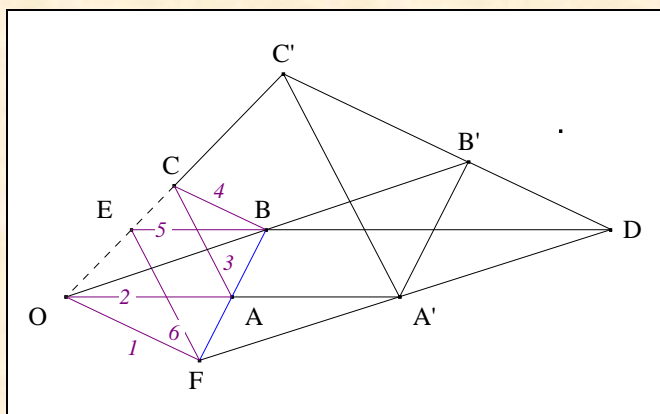
VISUALISATION SUFFISANTE



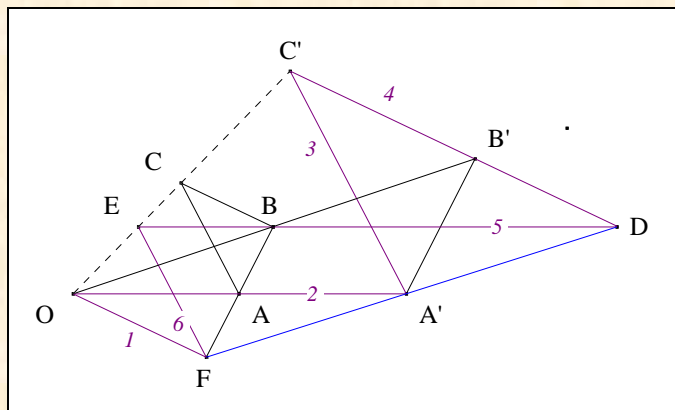
- Notons D le point d'intersection de la parallèle à (OA) , passant par B , avec $(B'C')$,
- E le point d'intersection de la parallèle à (AC) , passant par F avec (BD)
- et F le point d'intersection de (DA') et (AB) .



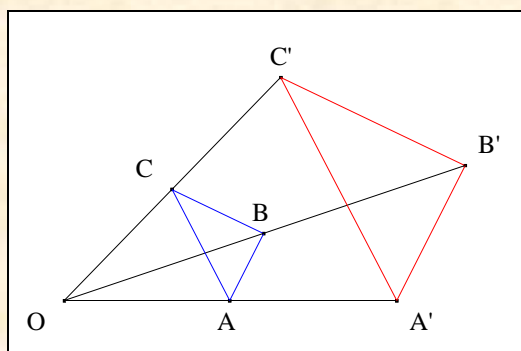
- D'après **A. 1**. Le petit théorème, appliqué à l'hexagone de Pappus $OA'B'DBFO$, par hypothèse, par transitivité de la relation $//$, $(OF) // (B'DC')$; $(B'C') // (BC)$; $(OF) // (BC)$.



- D'après **A. 1**. Le petit théorème, appliqué à l'hexagone de Pappus $FOACBEF$, E est sur (OC) .



- D'après **A. 1**. Le petit théorème, appliqué à l'hexagone de Pappus $FOA'C'DEF$, E est sur (OC') .
- D'après l'axiome d'incidence **Ia**, E, O, C et C' sont alignés.



- **Conclusion :** (CC') passe par O.

Énoncé traditionnel : *si,* deux triangles ont leur côtés parallèles deux à deux, et deux paires de sommets correspondants sont sur deux droites sécantes
alors, les sommets correspondants sont sur trois droites concourantes.

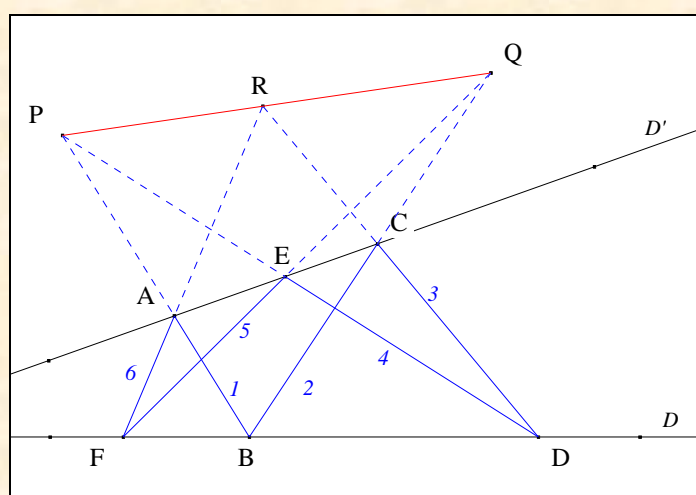
Note historique : ce résultat sans doute trouvé par Thalès où par ses successeurs, a été revisité sous la point de vue du petit théorème de Pappus.

- Scolies :**
- (1) le centre de l'homothétie est à distance finie
 - (2) L'axe de cette homothétie est à distance infinie ; c'est la droite à l'infini.

3. La proposition 139

VISION DOUBLE

Figure :

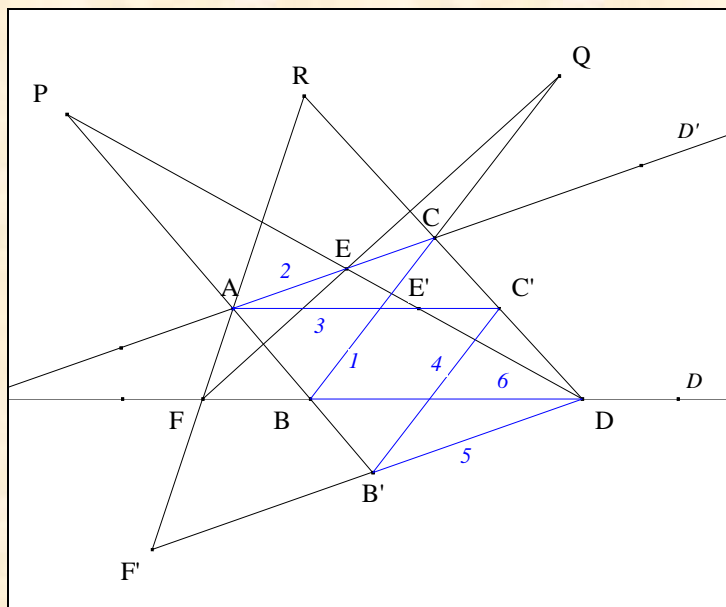


- Traits :**
- | | |
|---------|--|
| D, D' | deux droites, |
| F, B, D | trois points pris dans cet ordre sur D , |
| A, C | deux points de D' , |
| E | un point |

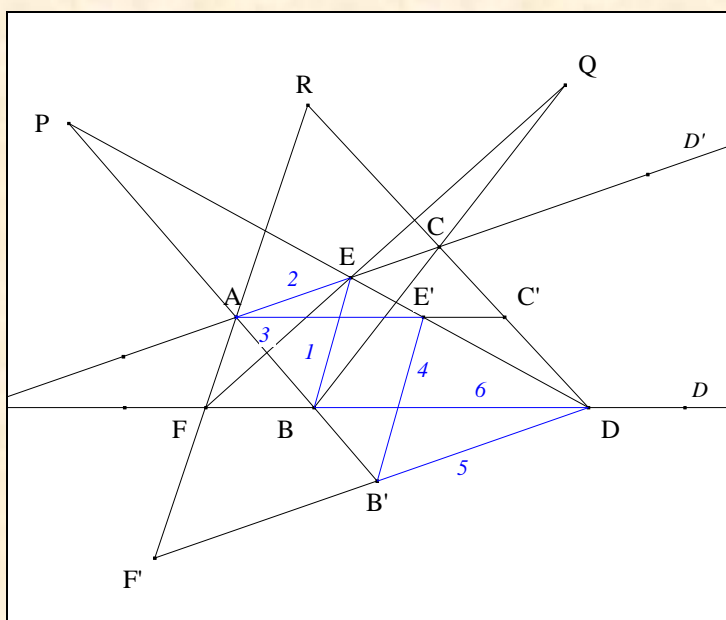
et P, Q, R les points d'intersection resp. de (AB) et (DE) , (BC) et (EF) , (CD) et (FA) .

Donné : E est sur D' si, et seulement si, P, Q et R sont alignés.⁴

VISUALISATION NÉCESSAIRE

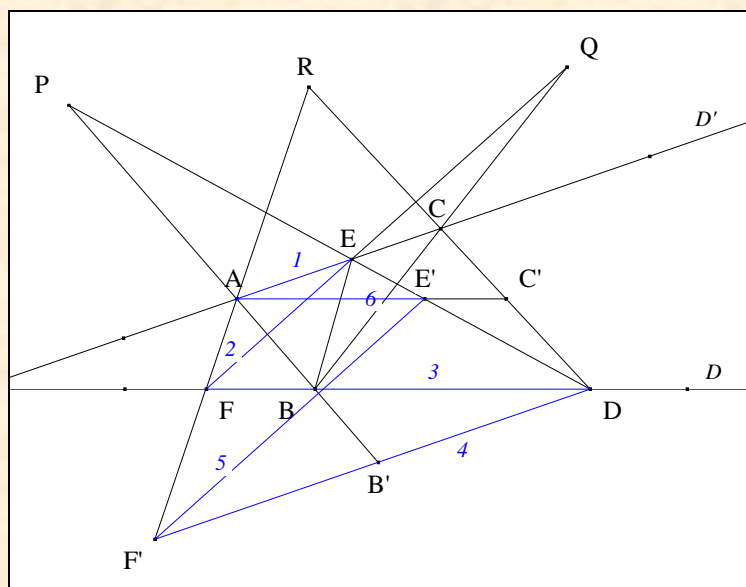


- Notons B', F' les points d'intersection de la parallèle à D' passant par D avec (AB) , (AF) ,
 et C', E' les points d'intersection de la parallèle à D passant par A avec (DC) , (DE) .
- D'après A. 1. Le petit théorème, appliqué à l'hexagone de Pappus $BCAC'B'DB$, $(BC) \parallel (B'C')$.

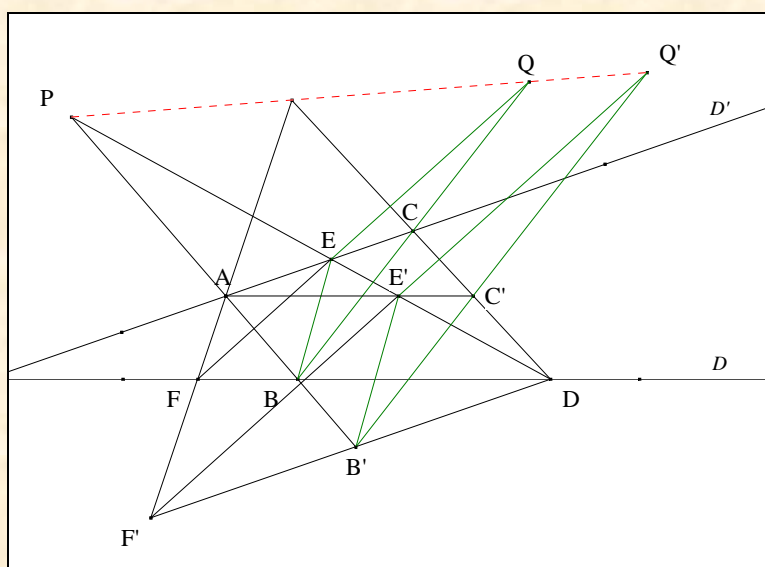


- D'après A. 1. Le petit théorème, appliqué à l'hexagone de Pappus $BEAE'B'DB$, $(BE) \parallel (B'E')$.

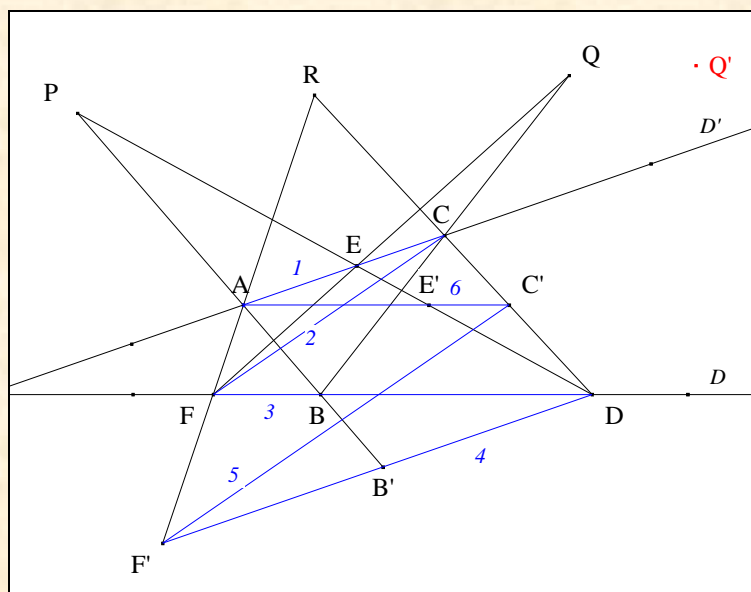
⁴ Pappus, *Collections* $\nu\nu\alpha\gamma\omega\gamma\eta$, Livre VII



- D'après A. 1. Le petit théorème, appliqué à l'hexagone de Pappus AEFDF'E'A, $(EF) \parallel (E'F')$.

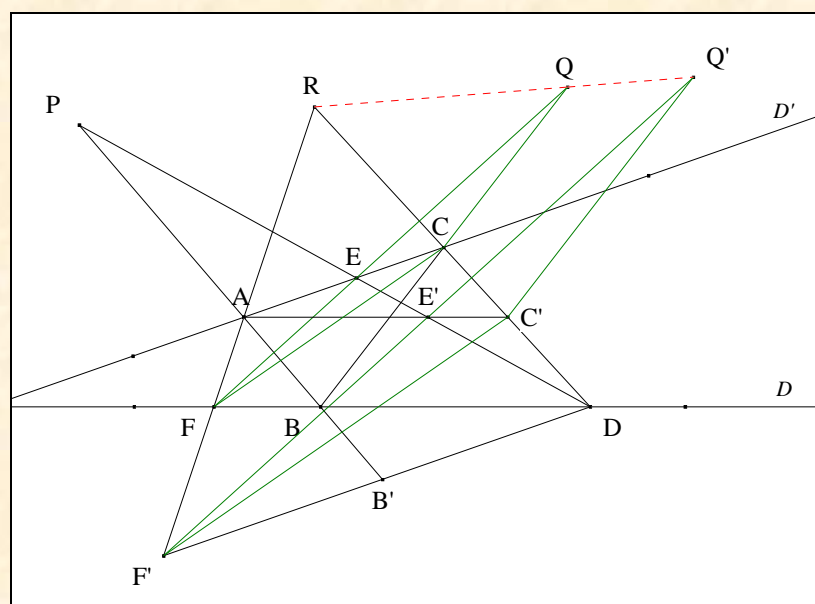


- Notons Q' le point d'intersection de $(B'C')$ et $(E'F')$.
- Les triangles BQE et $B'Q'E'$ ayant leur côtés parallèles deux à deux, sont en perspective de centre P ; en conséquence, Q et Q' sont alignés avec P .

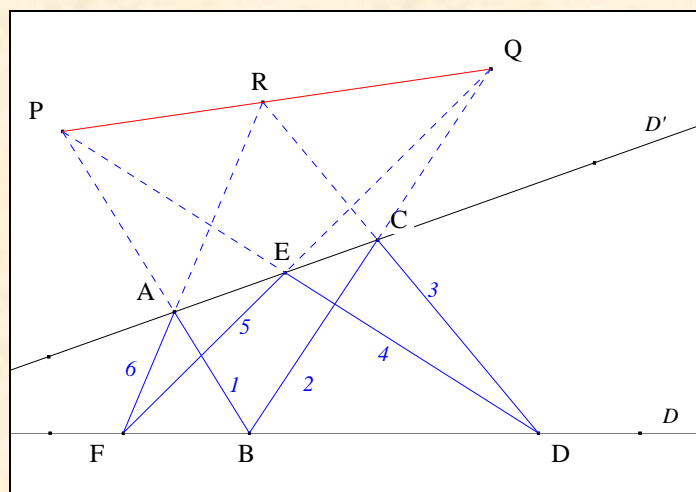


- D'après A. 1. Le petit théorème, appliqué à l'hexagone de Pappus $ACFDF'C'A$,

$(CF) // (C'F')$.

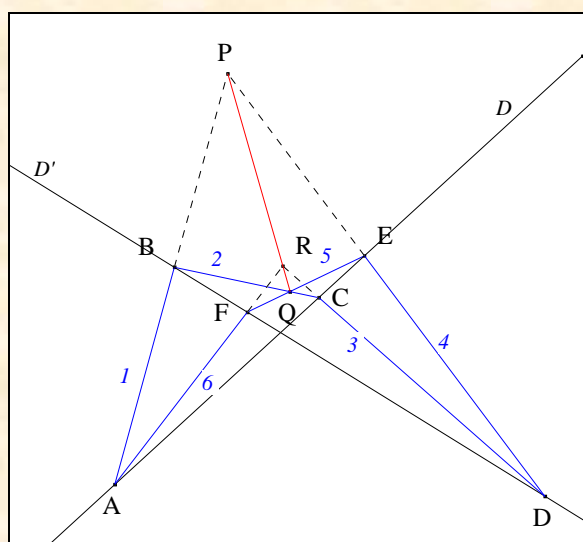


- Les triangles CQF et $C'Q'F'$ ayant leurs côtés parallèles deux à deux, sont en perspective de centre R ; en conséquence, Q et Q' alignés avec R .
- D'après l'axiome d'incidence **Ia**, $(QQ'P)$ et $(QQ'R)$ sont confondues.



- **Conclusion :** P, Q et R sont alignés.

- Scolies :**
- (1) ABCDEFA ayant ses sommets situés alternativement sur D et D' , est un "hexagone de Pappus".
 - (2) (PQR) est la pappusienne de ABCDEFA.
 - (3) Une figure équivalente à celle de Pappus

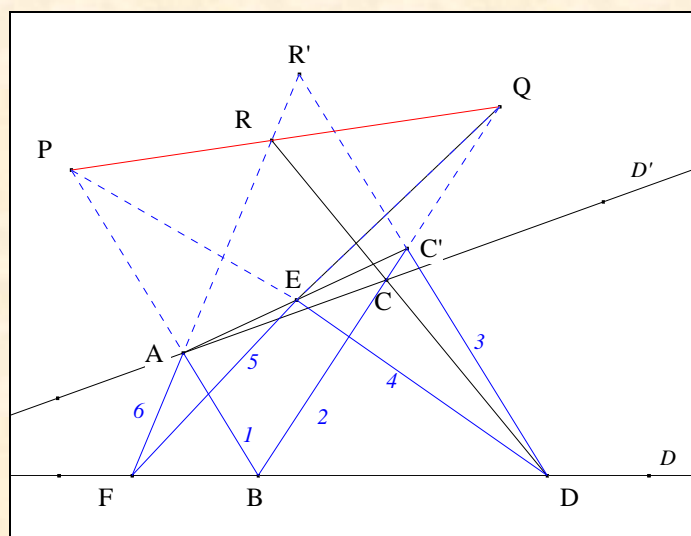


Énoncé traditionnel : *si,* un hexagone est de Pappus
alors, ses côtés opposés se coupent deux à deux en trois points alignés

ou encore

la pappusienne d'un hexagone de Pappus
 passe par
 les points d'intersection des côtés opposés.

CONDITION SUFFISANTE



- Raisonnons par l'absurde en affirmant que E n'est pas sur (AC) .
- Notons C' le point d'intersection de (AE) et (BC')
et R' le point d'intersection de (DC') et (AF) .
- Remarquons que C' est distinct de C .
- D'après la C. N. appliqué à l'hexagone de Pappus $ABC'DEFA$, P, Q, R' sont alignés ;
par hypothèse, P, Q, R sont alignés ;
d'après l'axiome d'incidence **Ia**, P, Q, R, R' sont alignés.
- Le point R' étant à la fois sur (AF) est sur (PQR) , est confondu avec R ;
en conséquence, C se confond avec C' ce qui est contradictoire.
- **Conclusion** : E est sur (AC) .

Note historique : les propositions **134**, **138**, **141** et **143**, sont ou bien la réciproque, ou bien des cas particuliers de la proposition **139** de Pappus.
La figure de la proposition **139** a pour origine une copie du Xe siècle qui se trouve dans la librairie du Vatican ⁵.
Pour une étude approfondie de ce théorème, le lecteur pourra consulter le livre Jones. ⁶

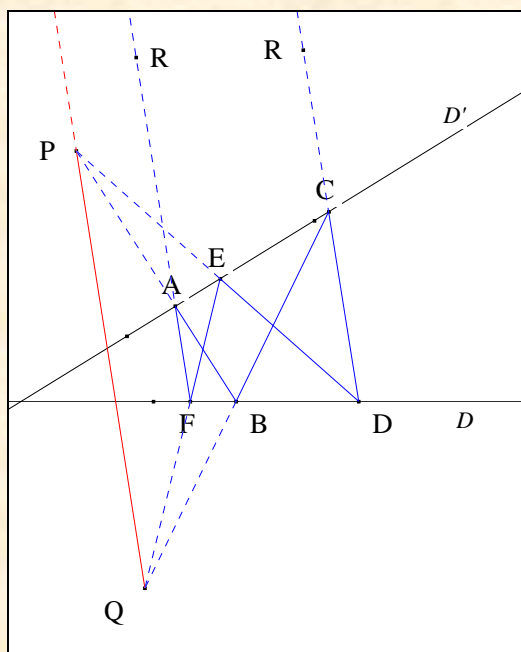
Énoncé traditionnel : *si*, les côtés opposés d'un hexagone ayant cinq de ses sommets sur deux droites, se coupent deux à deux en trois points alignés
alors, cet hexagone est de Pappus.

Scolies : (1) un cas particulier :
l'hexagone de Pappus a une seule paire de côtés opposés parallèles

$$\text{si, } (AF) // (CD)$$

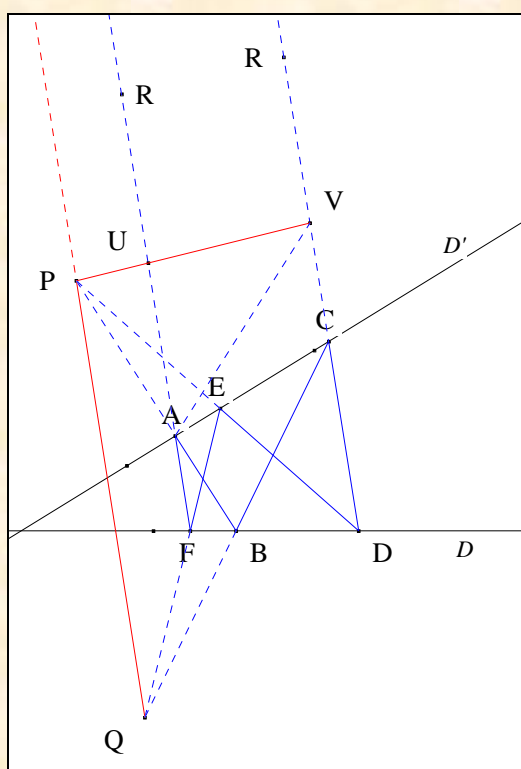
⁵ Pappus, folio 161v in Vatican copy ; folios 161v, 162, in Vatican copy

⁶ Pappus and Jones, A. (1986a). *Book 7 of the Collection: Part I*. Introduction, text and translation. Springer-Verlag, New York



alors, $(PQ) \parallel (AF)$

- Par hypothèse, (AF) est parallèle à (CD) .
- Raisonnons par l'absurde en affirmant que (PQ) n'est pas parallèle à (AF) .



- Notons U, V les points d'intersection resp. de (PQ) avec $(AF), (CD)$.
- D'après **A. 3. La proposition 139**, (PQV) est la pappusienne de l'hexagone de Pappus $ABCDEF$.
- En conséquence, (AF) n'est pas parallèle à (CD) ce qui est contradictoire.

- **Conclusion** : (PQ) est parallèle à (AF).

(2) "le point R" est à l'infini dans la direction de la pappusienne (PQ).

4. Une courte biographie de Pappus d'Alexandrie

*L'un des plus excellents géomètres de l'Antiquité*⁷

Avec la mort de Cléopâtre en 31 av. J.-C., l'Égypte devient une province romaine et la célèbre école d'Alexandrie i.e. le Musée, connaît le début d'un lent et inexorable déclin car les romains relayés par la jeune église chrétienne ne favorisent guère la démarche scientifique. Aussi la lignée des chercheurs inspirés comme Diophante au début de notre ère, va lentement s'éteindre face à l'émergence de commentateurs comme Proclus⁸ à Athènes, Eutochius⁹ et Hypatie¹⁰, la fille de Théon d'Alexandrie¹¹, le dernier directeur du Musée d'Alexandrie, qui sera lapidée à coups de tessons sur ordre de l'évêque Cyrille d'Alexandrie en mars 415, par une foule hostile au savoir profane. La mort d'Hypatie marque pour les historiens la fin de l'École d'Alexandrie et de la culture grecque.

Pappus naît à Alexandrie (Égypte) vers 250.

Si les écrits nous suggèrent qu'il a été un précepteur, nous ne savons rien vraiment de sa vie. D'après les écrits de Proclus, nous savons qu'il dirigeait une école à Alexandrie.

Dans l'histoire de la Géométrie, Pappus apparaît comme le dernier mathématicien grec avant la chute de l'empire romain d'occident en 476. Vers 340, il rassemble et commente dans son œuvre¹² majeure *Synagoge* dont huit volumes nous sont seulement parvenus, le reste ayant été perdu, les découvertes des mathématiciens les plus célèbres, et donne parallèlement une multitude de propositions curieuses et de lemmes personnels, tous destinés à faciliter la lecture des ouvrages des Anciens ; en particulier, nous trouvons une réflexion conduisant au théorème relatif au rapport anharmonique et notamment la "proposition 139" non démontrée du Livre VII des *Collections*, germe du futur théorème de Pascal où les deux droites seront remplacées par une conique ou un cercle. C'est dans le livre VII inspiré par Theodosius, Autolycus, Aristarchus, Euclide, Apollonius, Aristote et Ératosthène que Pappus développe le raisonnement par analyse et synthèse.

Nous savons que Pappus a dédié son travail à son fils Hermodorus, à Pendrosion, à Megethion et qu'il cite le philosophe Hierus pour l'avoir encouragé à étudier certains problèmes de mathématiques.

Rappelons qu'il utilisa avec élégance la méthode de symétrie appelée encore duplication ou retournement, pour démontrer certains résultats.

Ayant apparemment vécu toute sa vie à Alexandrie, il y décède vers 350.

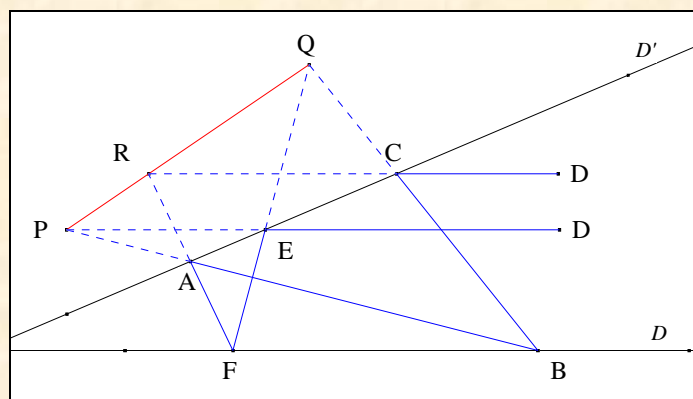
B. HEXAGONES PARTICULIERS DE PAPPUS

1. Premier cas : un sommet est à l'infini

VISION

Figure :

⁷ Descartes R.
⁸ Né à Constantinople en 412- mort à Athènes en 485. Il fera un commentaire du Livre I des *Éléments*
⁹ (vers 540). Il commentera les œuvres d'Archimède et d'Apollonius
¹⁰ Elle rééditera les *Éléments* d'Euclide
¹¹ Nous lui devons le mot "analyse" qu'il donna à la méthode trouvée par Platon
¹² *Collection mathématique* $\nu\nu\alpha\gamma\omega\gamma\eta$ ou *Synagoge*

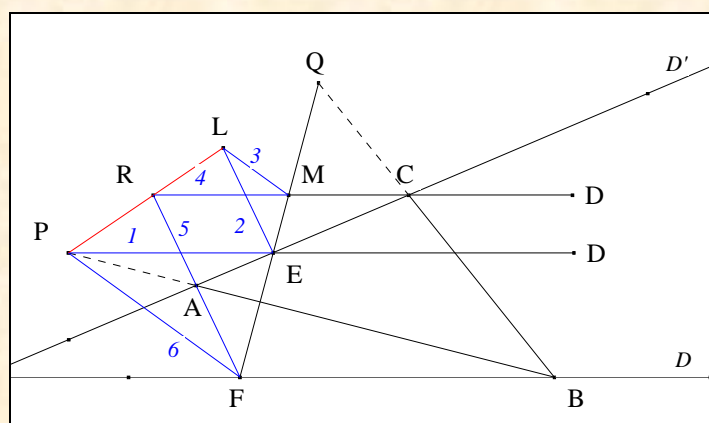


Traits : D, D' deux droites sécantes,
 ABCDEF un hexagone de Pappus inscrit dans (D, D')
 tel que D soit le point à l'infini de D

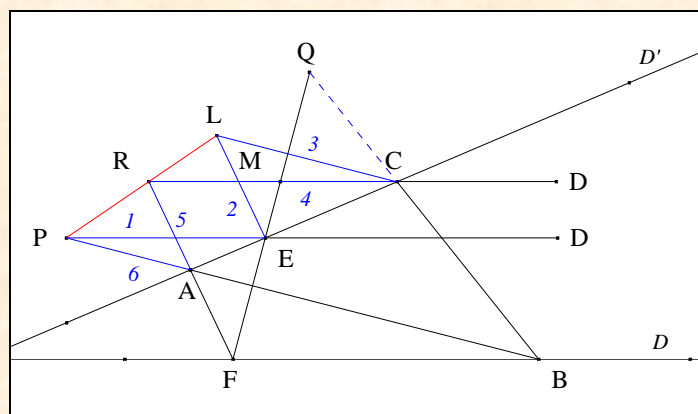
et P, Q, R les points d'intersection de (AB) et (DE) , de (BC) et (EF) , de (CD) et (FA) .

Donné : P, Q et R sont alignés.

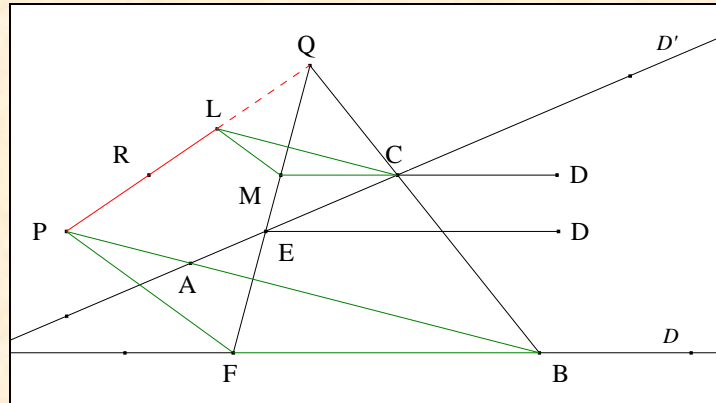
VISUALISATION



- Notons M le point d'intersection de (EF) et (CD) ,
 et L le point d'intersection de la parallèles à (FR) passant par R avec la droite (PR) .
- D'après A. 1. Le petit théorème, appliqué à l'hexagone PELMRFP, $(EL) \parallel ((FAR))$.

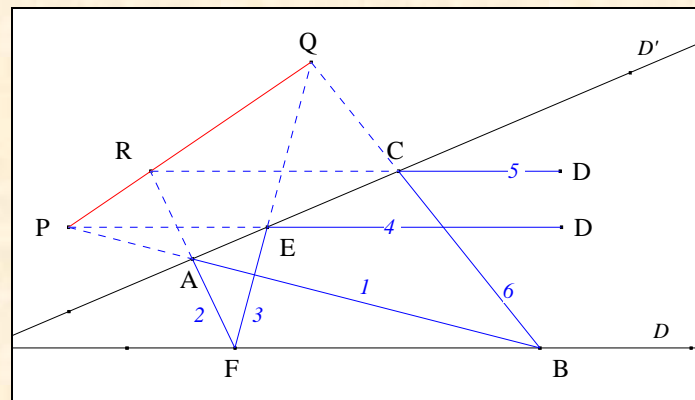


- D'après A. 1. Le petit théorème, appliqué à l'hexagone PELCRAP, $(PA) \parallel ((CL))$.



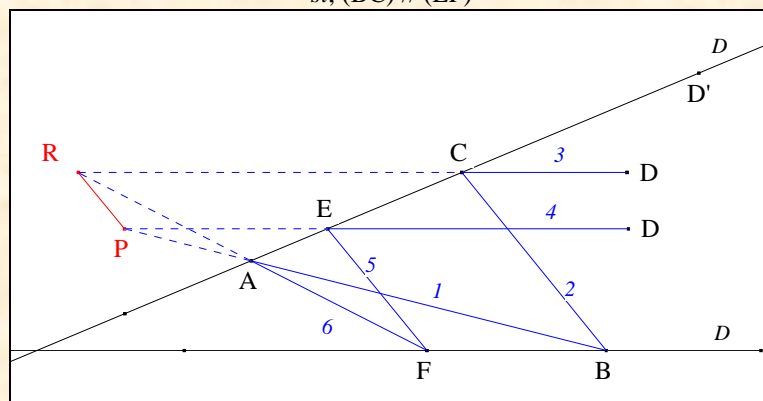
- D'après **A. 2.** Un résultat de Thalès, appliquée aux triangles homothétiques PFB et LMC, P, L et Q sont alignés.
- **Conclusion :** d'après l'axiome d'incidence Ia, P, Q et R sont alignés.

Solie : (1) une notation



(2) un sous cas : l'hexagone de Pappus a une seule paire de côtés opposés parallèles

si, $(BC) \parallel (EF)$

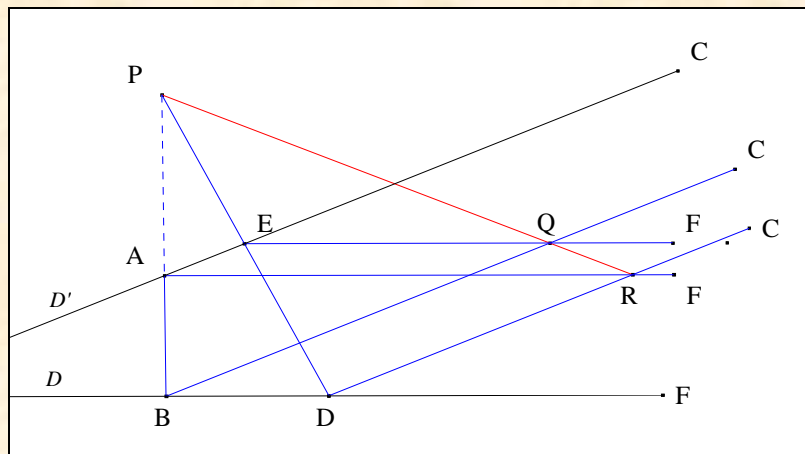


alors, $(PR) \parallel (BC)$.

2. Deuxième cas : deux sommets sont à l'infini

VISION

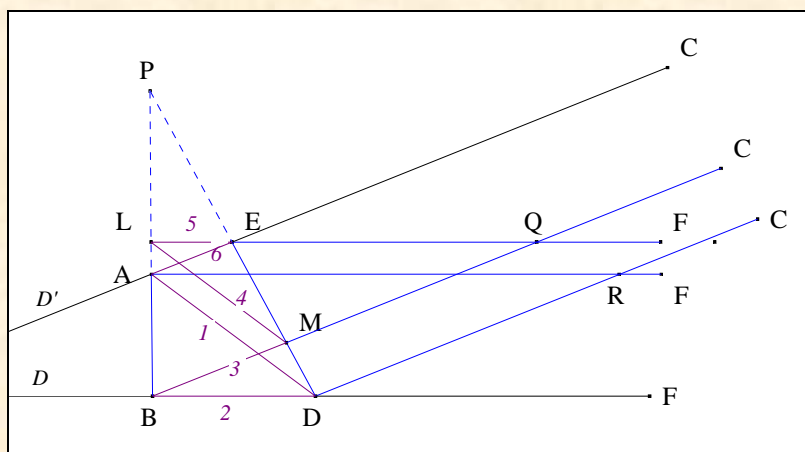
Figure :



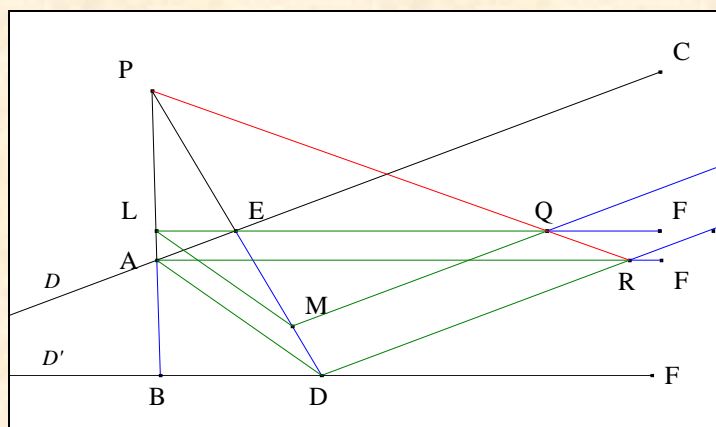
Traits : D, D' deux droites sécantes,
 ABCDEFA un hexagone de Pappus inscrit dans (D, D')
 tel que C soit le point à l'infini de D et F le point à l'infini de D'
 et P, Q, R les points d'intersection de (AB) et (DE) , de (BC) et (EF) , de (CD) et (FA) .

Donné : P, Q et R sont alignés.

VISUALISATION

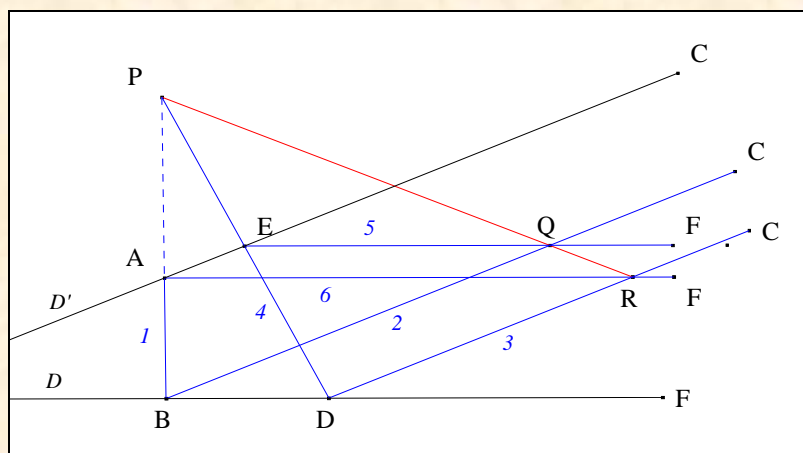


- Notons L le point d'intersection de (AB) et (EQ)
 et M le point d'intersection de (BQ) et (DE) .
- D'après A. 1. Le petit théorème, appliquée à l'hexagone ADBMLE, $(AD) // (ML)$.

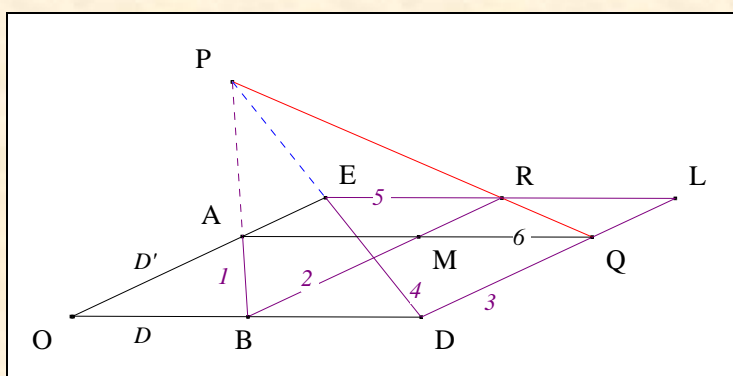


- **Conclusion :** d'après A. 2. Un résultat de Thalès, appliquée aux triangles ADR et LMQ, P, Q et R sont alignés.

Scolies : (1) une notation



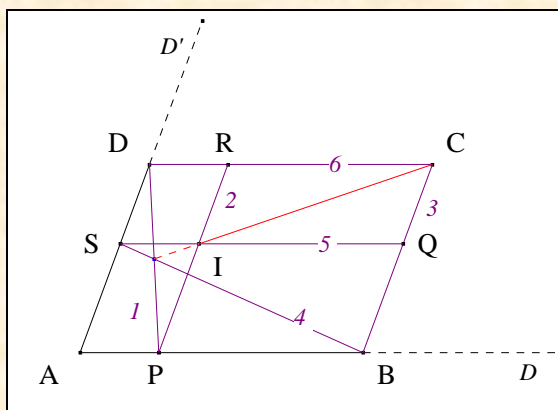
- (2) La pappusienne (PQR) a trois points à distance finie.
- (3) Une figure plus esthétique



- Notons O le point d'intersection de D et D' ,
L le point d'intersection de (DQ) et (EK)
et M le point d'intersection de (AQ) et (BK) .

- **Conclusion :** les diagonales (AB) , (DE) et (QR) des parallélogrammes $OBMA$, $ODLE$ et $MQLR$, sont concourantes.

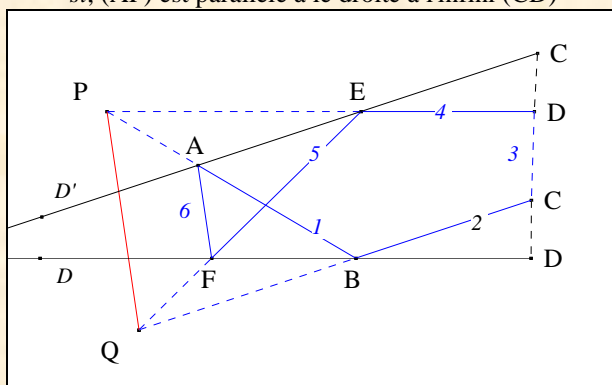
(4) Une autre figure esthétique ¹³



• **Conclusion :** les diagonales (BS), (CI) et (DP) des parallélogrammes ABQS, QCRI et ADRP, sont concourantes.

(3) un sous cas :
l'hexagone de Pappus ABCDEFA a une seule paire de côtés opposés parallèles

si, (AF) est parallèle à la droite à l'infini (CD)



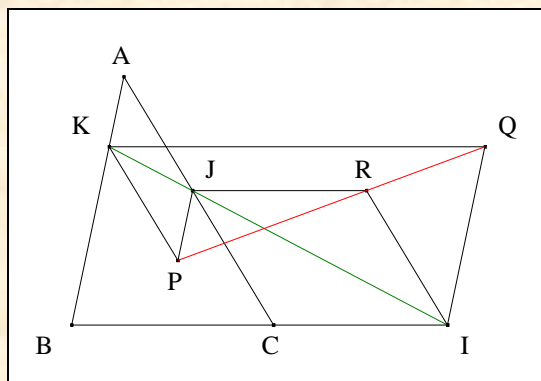
alors, la pappusienne (PQ) est parallèle à (AF)

3. Troisième cas : **trois sommets sont à l'infini**

VISION

Figure :

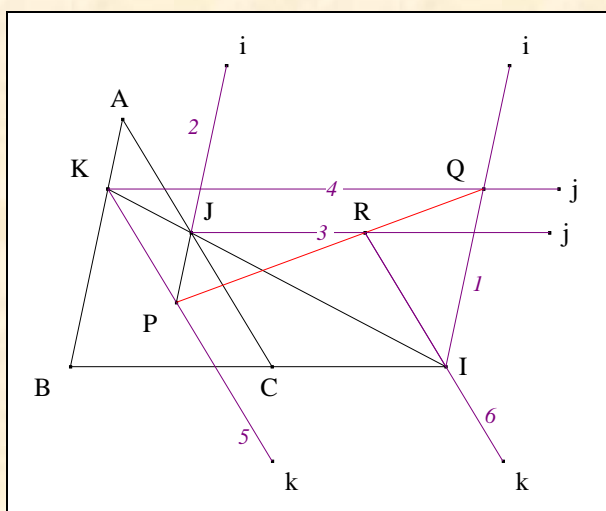
¹³ Arbelos (mai 1984)



Traits : ABC un triangle,
 (IJK) une ménélienne de ABC
 et P, Q, R trois points tels que AKPJ, BIQK et CJRI soient trois parallélogrammes.

Donné : P, Q et R sont alignés.

VISUALISATION



- Notons i, j, k les points à l'infini resp. sur $(IQ), (JR), (KP)$.
- Remarquons que (ijk) est la droite à l'infini.
- **Conclusion :** d'après Pappus, (PQR) étant la pappusienne de l'hexagone de Pappus $IiJjKkI$ dont les sommets sont alternativement sur (IJK) et (ijk) , P, Q et R sont alignés.

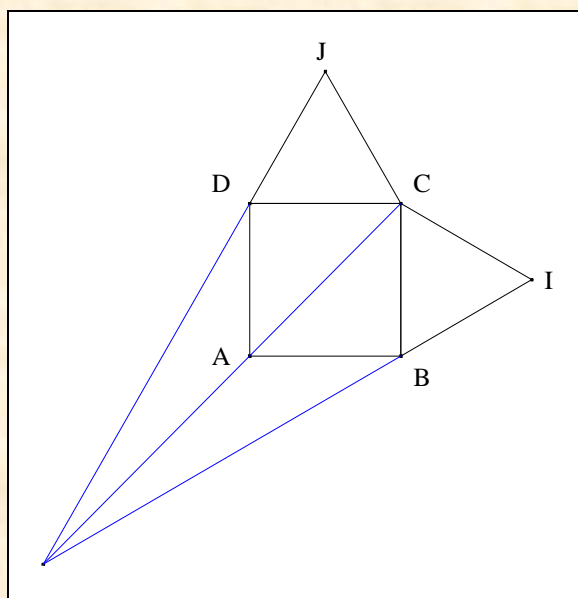
Scolie : la pappusienne a trois points à distance finie.

C. MINIATURES PAPPUSIENNES

1. Un carré et deux triangles équilatéraux

VISION

Figure :

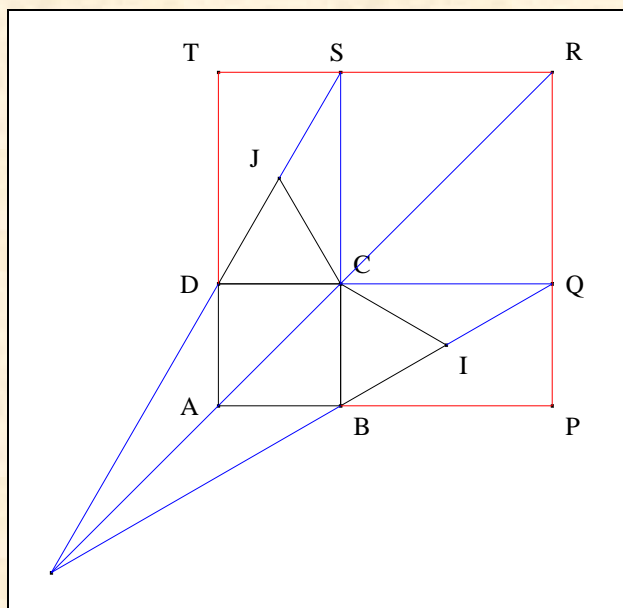


Traits : ABCD un carré,
 et I, J deux points tels que IBC et JCD
 soient deux triangles équilatéraux extérieurement adjacents à ABCD.

Donné : (AC), (IB) et (JD) sont concourantes.

VISUALISATION WITHOUT WORD ¹⁴

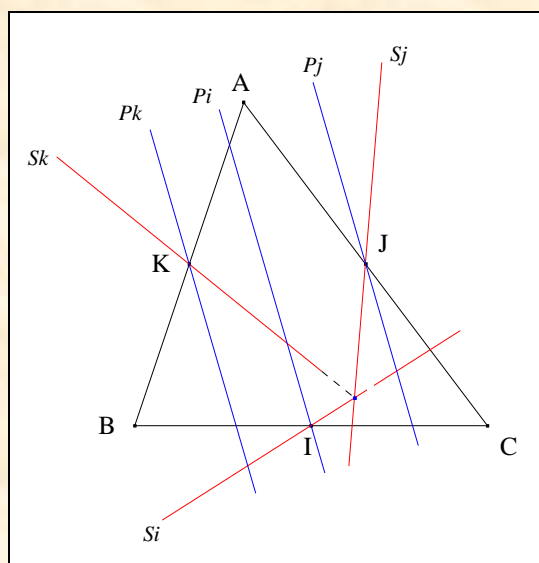
¹⁴ Voir B. 2. Deux points à l'infini, scolie 3



2. Un joli résultat

VISION

Figure :



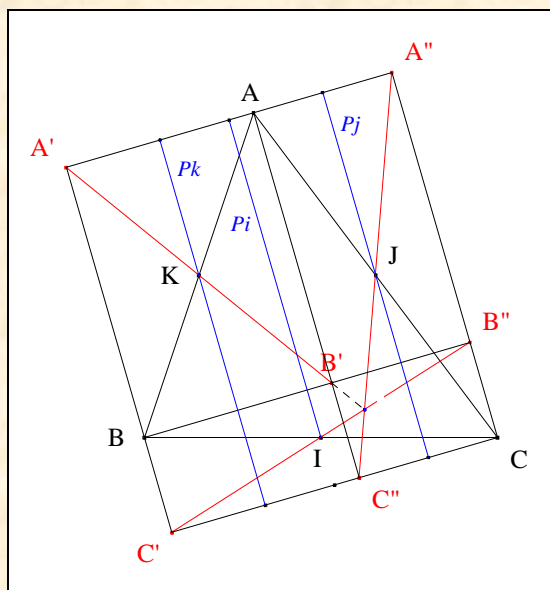
Traits : ABC un triangle,
 I, J, K les milieux resp. de [BC], [CA], [AB],
 P_i, P_j, P_k trois droites parallèles entre elles passant resp. par I, J, K,
 S_i, S_j, S_k les symétriques de (BC), (CA), (AB) resp. par rapport à P_i, P_j, P_k .

Donné : S_i, S_j et S_k sont concourantes.

VISUALISATION WITHOUT WORD ¹⁵

¹⁵

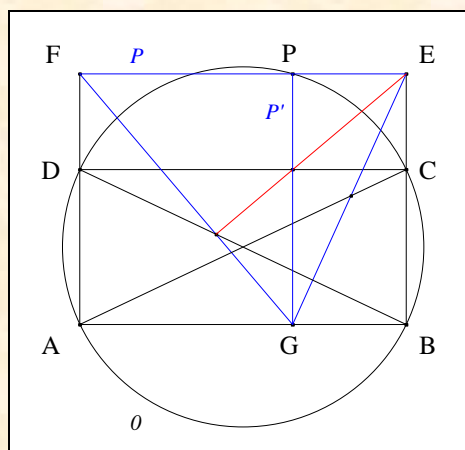
Voir B. 2. Deux points à l'infini, scolie 4



3. Pappus et Brahmagupta

VISION

Figure :

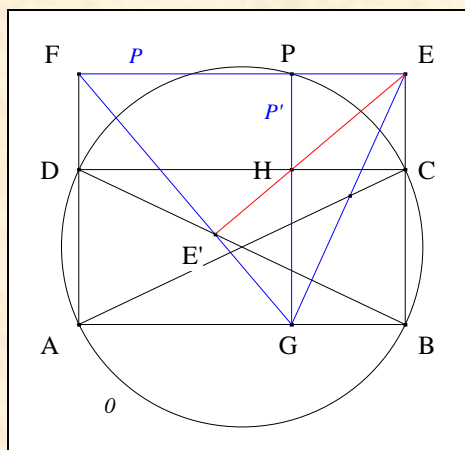


Traits : ABCD un rectangle,
 O le cercle circonscrit à ABCD,
 P un point de O ,
 P, P' deux parallèles resp. à $(AB), (CD)$ passant par P ,
 E, F les points d'intersection de P resp. avec $(BC), (AD)$
 et G le point d'intersection de P' avec (AB) .

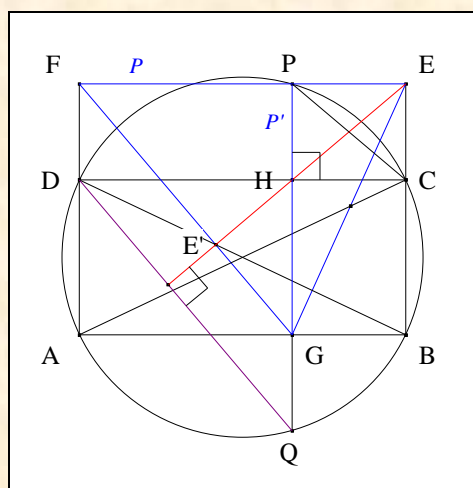
Donné : le pied de la E-hauteur du triangle EFG est sur la diagonale (BD) de ABCD.¹⁶

VISUALISATION

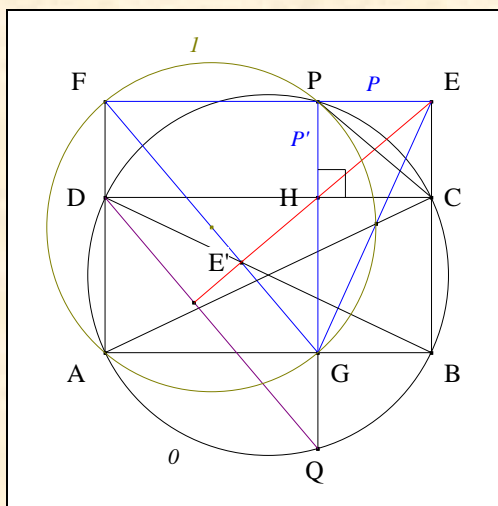
¹⁶ Sharygin I. F., Problem II. 112, Problemas de geometria, Editions Mir, Moscou (1986) 89



- Notons H le point d'intersection de P' avec (CD) .
- D'après **B. 2.** Deux points à l'infini, scolie 4, (EH) , (FG) et (BD) sont concourantes.
- Notons E' ce point de concours.

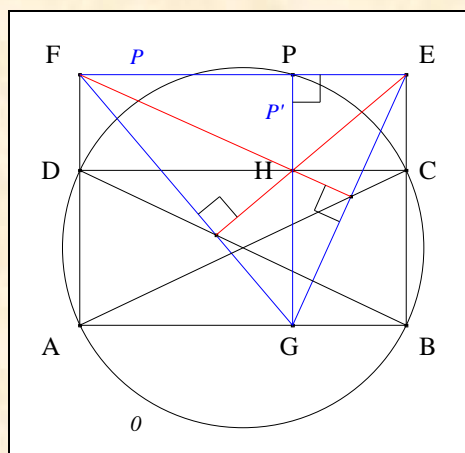


- Notons Q le second point d'intersection de (PG) avec θ .
- **Scolies :**
 - (1) (PQ) est perpendiculaire à (CD) .
 - (2) La diagonale (EH) du rectangle $EPHC$ passe par le milieu de $[PC]$.
- D'après "Le théorème de Brahmagupta" (Cf. Annexe 1), $(EHE') \perp (DQ)$.



- Notons I le cercle circonscrit au rectangle AGPF.
- Les cercles O et I , les points de base A et P, les médianes (DAF) et (QPG), conduisent au théorème 0 de Reim ; il s'en suit que $(DQ) \parallel (FG)$; $(EHE') \perp (FG)$.
- **Conclusion** : le pied de la E-hauteur du triangle EFG est sur la diagonale (BD) de ABCD.

Scolies : (1) la F-hauteur de EFG

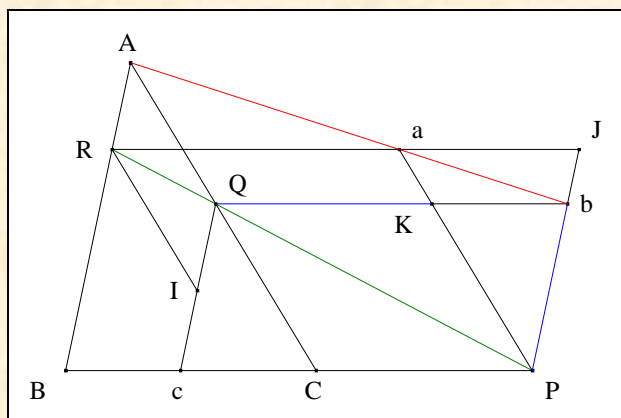


- **Conclusion** : mutatis mutandis, nous montrerions que le pied de la F-hauteur du triangle EFG est sur la diagonale (AC) de ABCD.
- (2) H est l'orthocentre de EFG.

4. Un triangle, une ménélienne et trois parallélogrammes

VISION

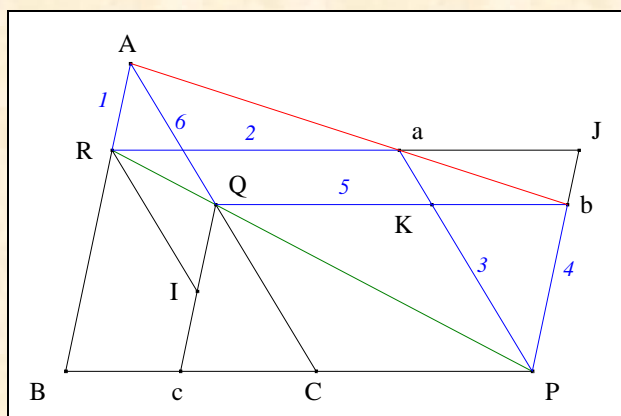
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 (IKK) une ménélienne de ABC,
 P, Q, R trois points tels que ARIQ, BPJR et CQKP soient trois parallélogrammes
 et a, b, c les points d'intersection de (PK) et (JR), de (QK) et (PJ) et de (QI) et (BP).

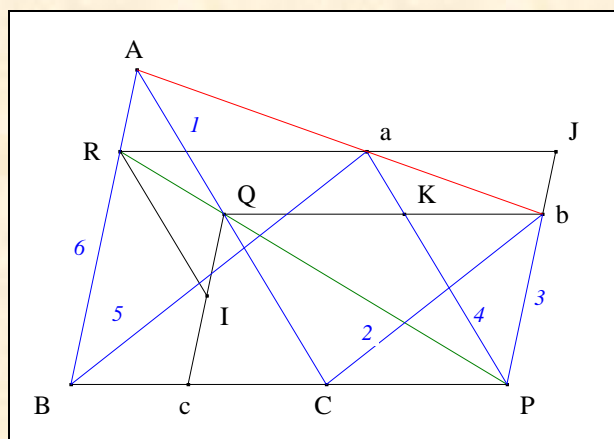
Donné : A, a et b sont alignés.

VISUALISATION

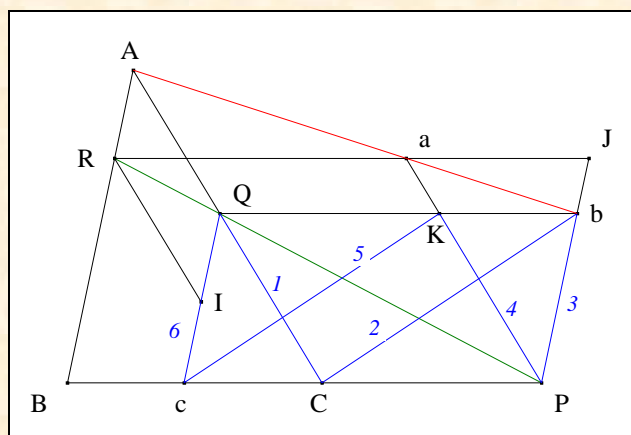


• **Conclusion :** d'après A. 1. Le petit théorème appliqué à l'hexagone ARaPbQA, A, a et b sont alignés.

Scolies : (1) deux parallèles



- **Conclusion** : d'après A. 1. Le petit théorème appliqué à l'hexagone ACbPaBA, $(Ba) // (Cb)$.
(2) Deux autres parallèles

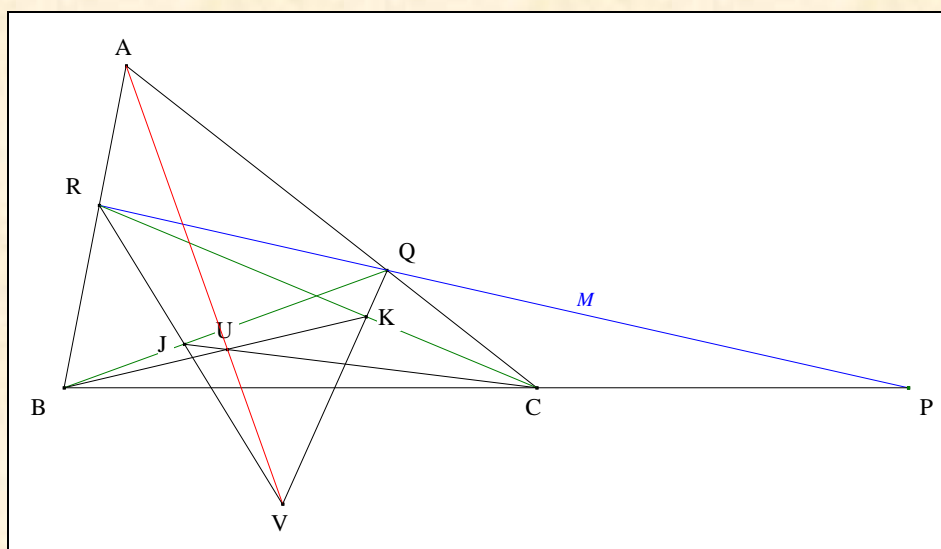


- **Conclusion** : d'après A. 1. Le petit théorème appliqué à l'hexagone QCbPKcQ, $(cK) // (Cb)$.

5. Un triangle et une ménélienne

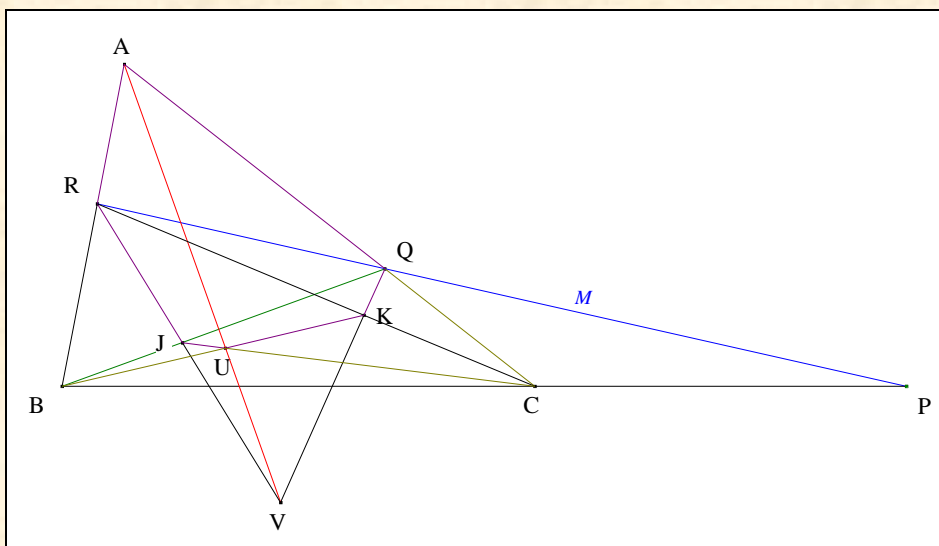
VISION

Figure :



- Traits :** M une ménélienne de ABC,
 P, Q, R les points d'intersection de M resp. avec $(BC), (CA), (AB)$,
 J, K deux points resp. de $(BQ), (CR)$
 et U, V les points d'intersection de (BK) et (CJ) , de (QK) et (RJ) .
- Donné :** U, V et A sont alignés.

VISUALISATION

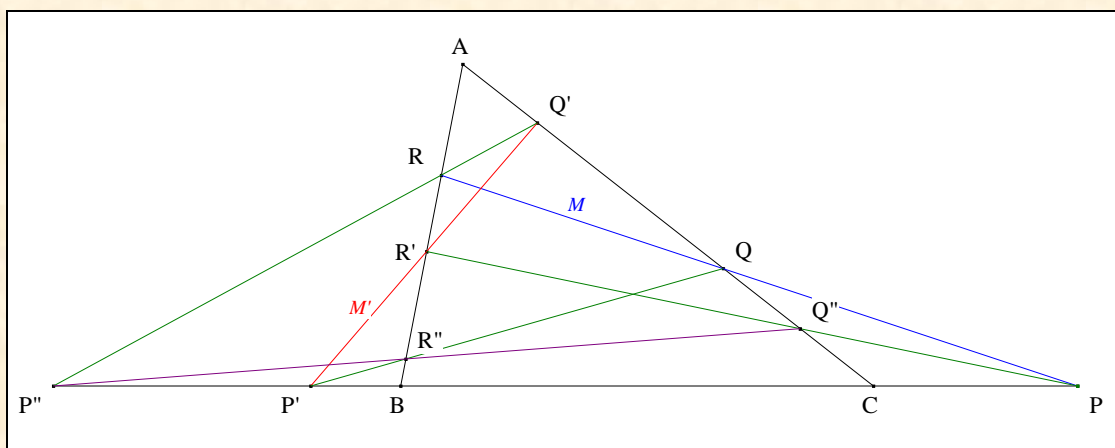


- **Scolies :**
 - (1) ARJUKQA est un hexagone de Brianchon.
 - (2) (AU), (QK) et (RJ) sont concourantes.
 - (3) V est ce point de concours.
- **Conclusion :** V est (AU).

6. Un triangle et deux ménéliennes

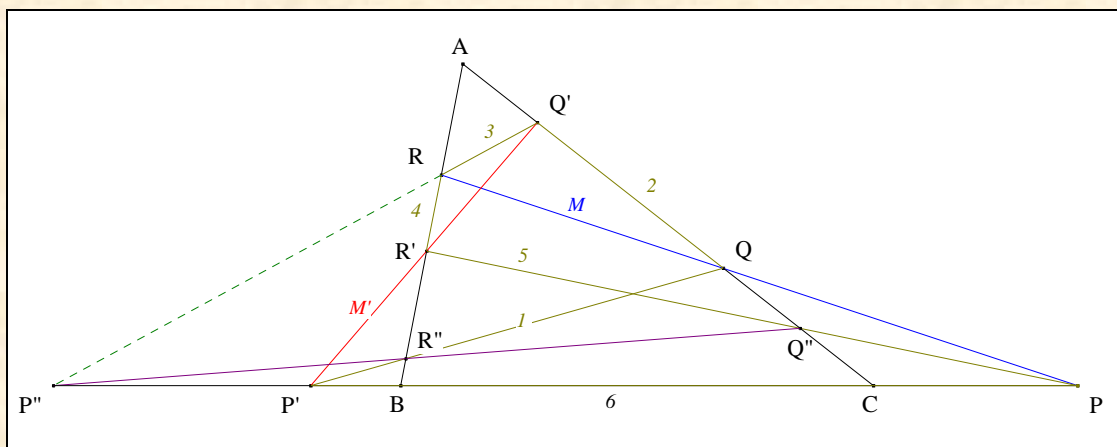
VISION

Figure :



- Traits :** M, M' deux ménéliennes de ABC,
 P, Q, R les points d'intersection de M resp. avec (BC), (CA), (AB),
 P', Q', R' les points d'intersection de M' resp. avec (BC), (CA), (AB),
 et P'', Q'', C'' les points d'intersection de (RQ') et (BC), de (PR') et (CA), de (QP') et (AB).
- Donné :** P'', Q'' et R'' sont alignés.

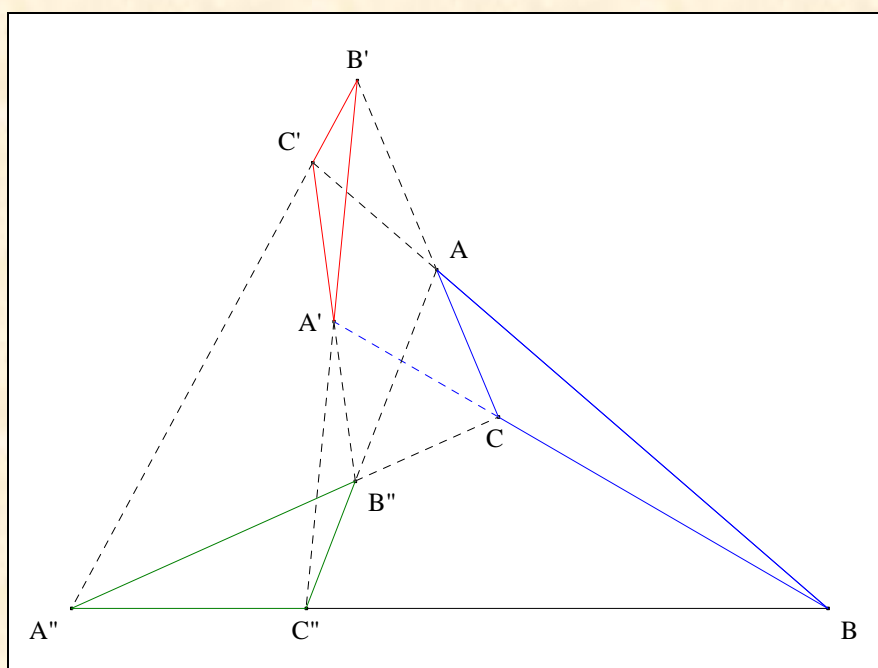
VISUALISATION WITHOUT WORD



7. Un quadrilatère complet

VISION

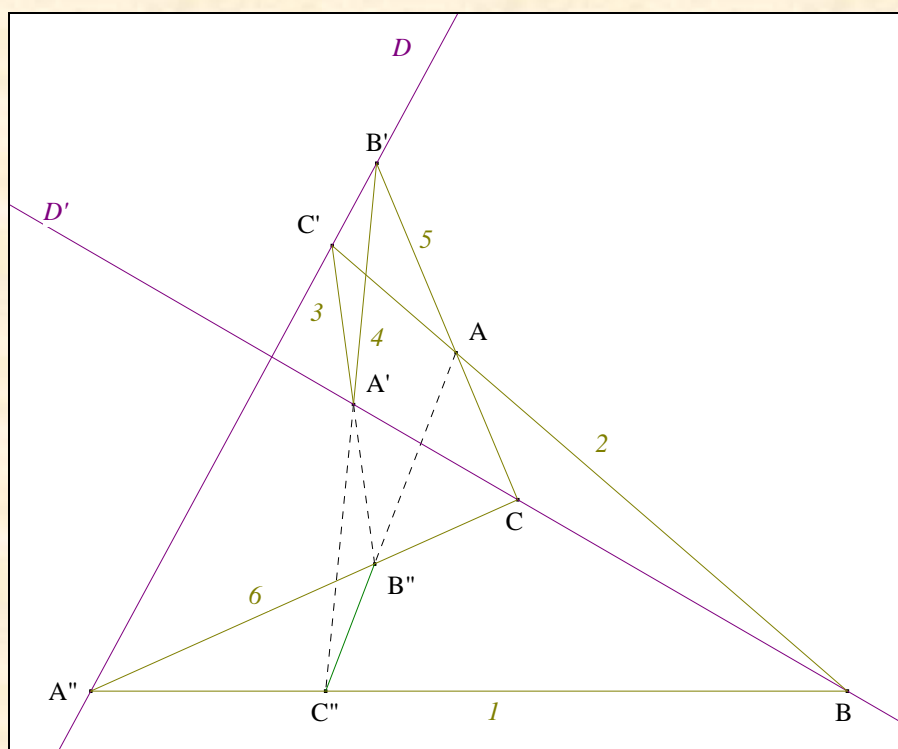
Figure :



Traits : ABC un triangle,
 A', B', C' trois points resp. de (BC), (CA), (AB),
 et A'', B'', C'' trois points resp. de (B'C'), (C'A'), (A'B')
 tels que resp. B, C sont resp. sur (C''A''), (A''B'').

Donné : A est sur (B''C'').

VISUALISATION

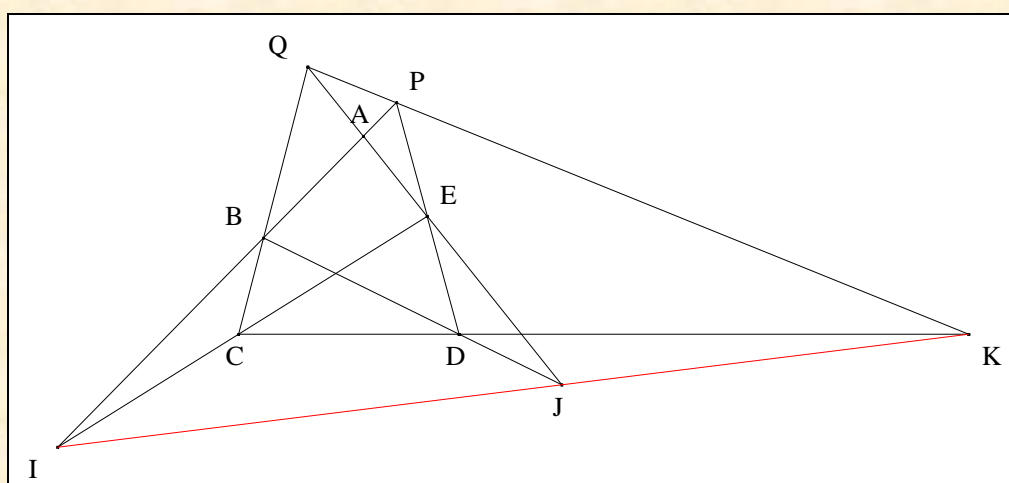


- D'après A. 1. Le petit théorème, $(C''A'B'')$ est la pappusienne de l'hexagone de Pappus $A''B''C''A'B'C'$.
- **Conclusion :** A est sur $(B''C'')$.

8. Un pentagone

VISION

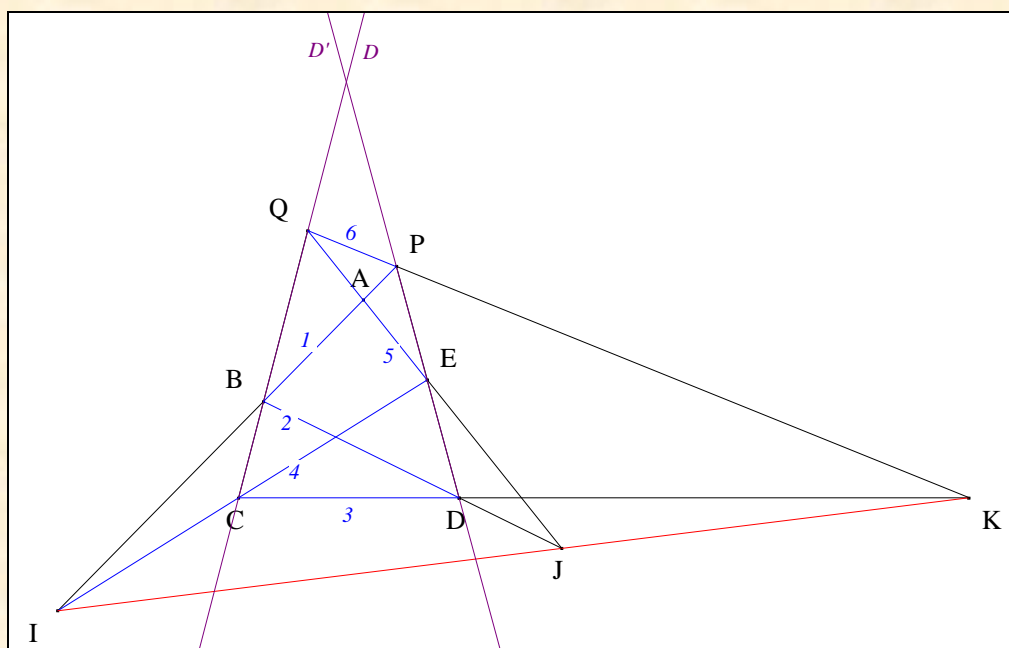
Figure :



- Traits :** ABCDE un pentagone,
 P, Q les points d'intersection de (AB) et (DE), de (AE) et (BC),
 et I, J, K les points d'intersection resp. de (AB) et (CE), de (AE) et (BD),
 de (PQ) et (CD).

Donné : I, J et K sont alignés.

VISUALISATION



- D'après **A. 1.** Le petit théorème, (IJK) est la pappusienne de l'hexagone de Pappus PBDCEQP.
- **Conclusion :** I, J et K sont alignés.

Scolies : (1) ABCDE étant un pentagone, relativement au sommet A

- * (AB) et (AE) sont ses côtés adjacents
- * (CD) est son côté opposé
- * (BC) et (DE) sont ses côtés adverses
- * (AD) et (AC) sont ses diagonales adjacentes
- * (BE) est sa diagonale opposée
- * (BD) et (CE) sont ses diagonales adverses.¹⁷

- (2) ABCDE peut être considéré comme l'hexagone dégénéré AABCDE où "le côté (AA)" serait la droite (AK).

C. LE DUAL DE PAPPUS

1. Principe intuitif de dualité

l'incidence géométrique étant une relation entre points et droites, nous la précisons par

axiome 1 : deux points distincts sont incidents à une seule droite

¹⁷ <http://hexamys.free.fr/index.htm>.

axiome 2 : deux droites distinctes sont incidentes à un seul point.

Intuitivement deux notions sont duales si, par permutation de ces notions dans l'énoncé d'un théorème, on obtient un nouveau théorème.

Énoncé du théorème de Pappus :

si, un hexagone a ses sommets alternativement sur deux droites,
alors, ses côtés opposés se coupent deux à deux en trois points alignés.

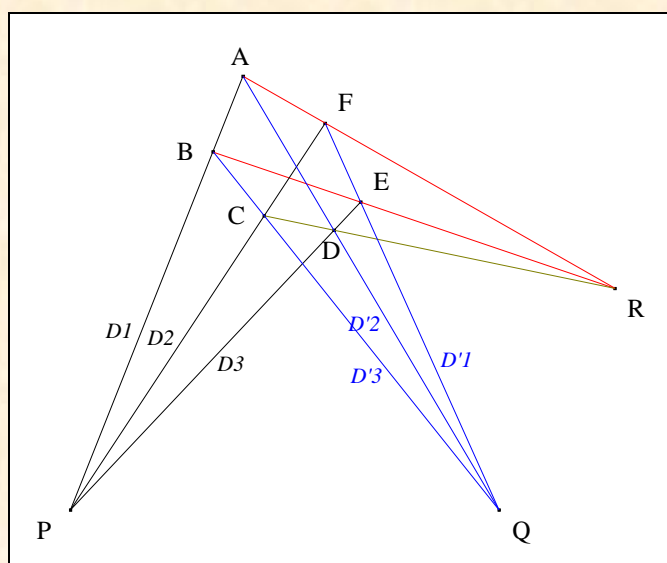
Énoncé dual :

si, un hexagone a deux paires des côtés opposés et leur diagonale correspondante
passent resp. par deux points
alors, les deux derniers côtés et la diagonale correspondante sont concourantes.

2. L'hexagone de Brianchon ou le dual de celui de Pappus

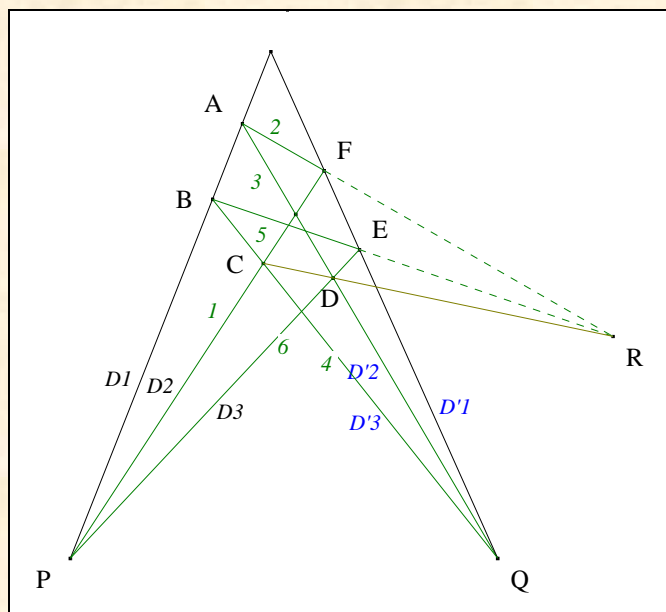
VISION

Figure :



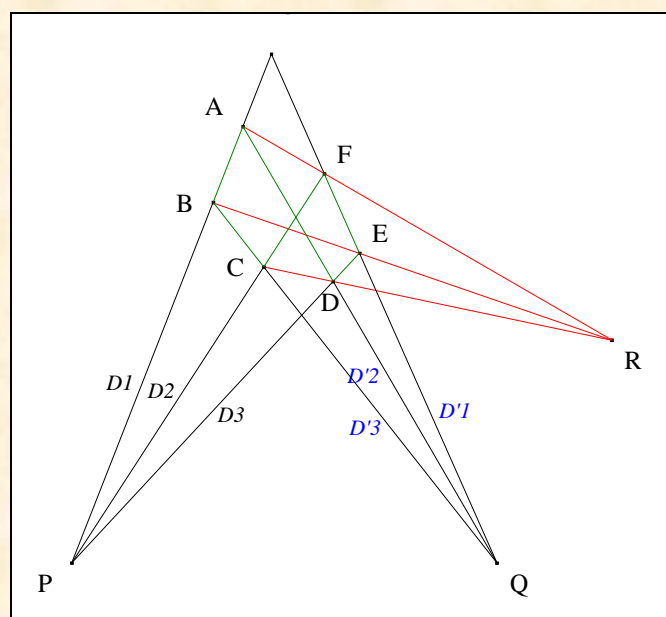
Traits :	<p>P, Q $D1, D2, D3$ $D'1, D'2, D'3$ A, B, C, D, E, F</p>	<p>deux points, un pinceau de sommet P, un pinceau de sommet Q, les points d'intersection de $D1$ et $D'1$, de $D1$ et $D'3$, de $D2$ et $D'3$, de $D3$ et $D'2$, de $D3$ et $D'1$, de $D2$ et $D'1$,</p>
et	R	le point d'intersection de (AF) et (BE).
Donné :	(CD) passe par R.	

VISUALISATION



- D'après A. 3. La proposition 139, (CRD) est la pappusienne de l'hexagone de Pappus PFAQBEP inscrit dans $D1$ et $D'1$.
- **Conclusion :** (CD) passe par R.

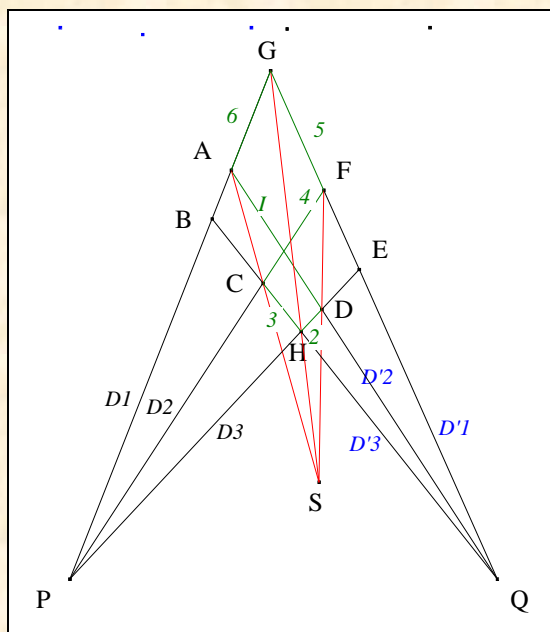
Scolies : (1) un hexagone de Brianchon



- Les côtés de l'hexagone ABCFEDA étant portés par des droites concourantes appartenant alternativement aux pincesaux de sommets P et Q, est de Brianchon.
- **Conclusion :** les diagonales (AF), (BE) et (CD) de ABCFEDA sont concourantes.

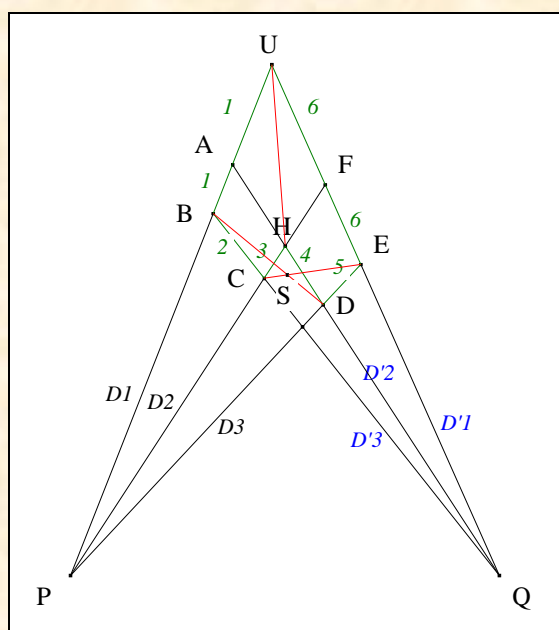
Énoncé traditionnel : si, deux paires de côtés opposés et leur diagonale correspondante d'un hexagone de Brianchon passent resp. par deux points
alors, les deux derniers côtés et la diagonale correspondante sont concourantes.

(2) Un autre hexagone de Brianchon



- Notons S le point d'intersection de (DF) et (FD) .
- Les côtés de l'hexagone $ADHCFG$ étant portés par des droites concourantes appartenant alternativement aux pinceaux de sommets P et Q , est de Brianchon.
- **Conclusion :** mutatis mutandis, nous montrerions que les diagonales (AC) , (DF) et (HG) de $ADHCFG$ sont concourantes.

(3) Encore un autre hexagone de Brianchon



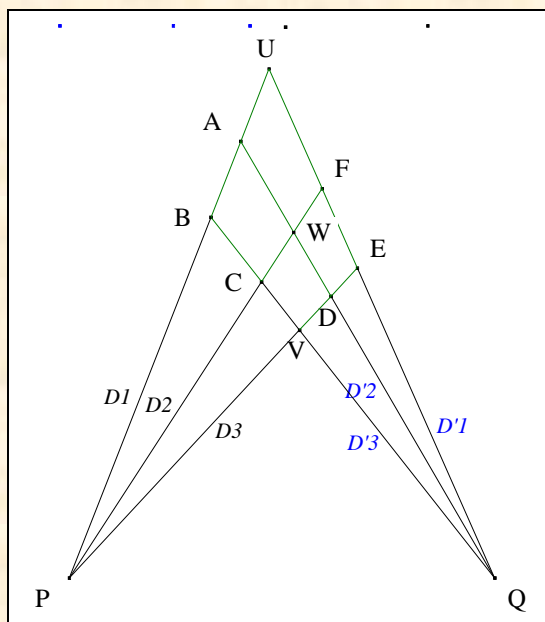
- Notons U, S les points d'intersection resp. de (PF) et (QA) , de (DB) et (CE) .
- Les côtés de l'hexagone $UBCHDEU$ étant portés par des droites concourantes appartenant alternativement aux

pinceaux de sommets P et Q, est de Brianchon.

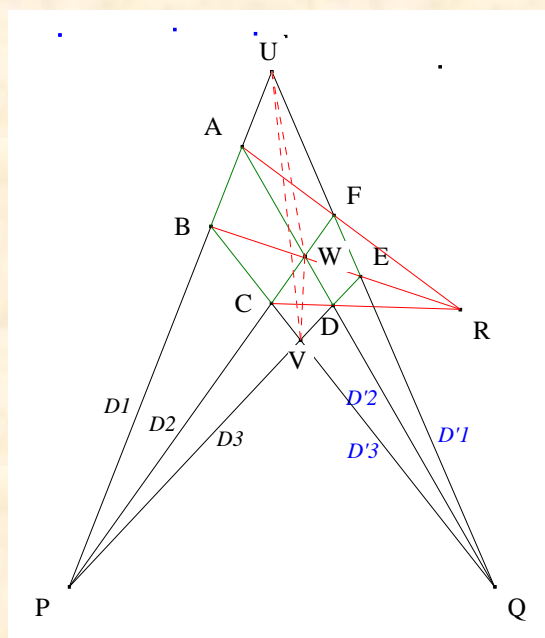
- **Conclusion** : mutatis mutandis, nous montrerions que les diagonales (UH), (BD) et (CE) de UBCHDEU sont concourantes.

(4) Pour être plus efficace

- Reprenons la figure de la scolie 1 précédente.



- Notons V, W les points d'intersection resp. de (PE) et (QB), de (AD) et (CF).



- Considérons le "damier" UBVE, ses quatre cases délimitées par (AD) et (FC) les quatre quadrilatères convexes comme par exemple UBCF et le quadrilatère UBVE ; puis, tous les triangles strictement inscrits¹⁸ dans UBVE dont les côtés sont les

¹⁸ i.e. les côtés des triangles sont distincts de ceux de UBVE

diagonales de tous ces quadrilatères.

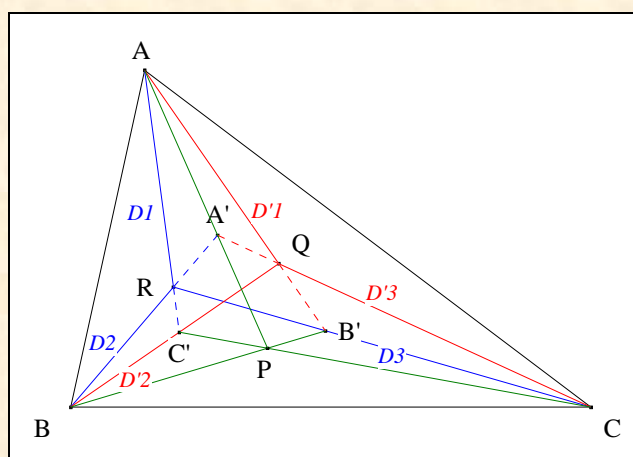
- Pour chaque triangle ainsi considéré (par exemple UVW) nous remplaçons chaque "côté diagonal" par l'autre diagonale du quadrilatère mis en jeu. Les droites ainsi envisagées sont concourantes

- (5) Lorsque deux diagonales d'un hexagone de Brianchon sont parallèles alors, la troisième est parallèle aux deux autres.

3. Une miniature brianchonienne

VISION

Figure :



Traits : Q, R deux points,
 $D1, D2, D3$ un pinceau de sommet R,
 $D'1, D'2, D'3$ un pinceau de sommet Q,
 A', B', C' les points d'intersection de $D2$ et $D'3$, de $D3$ et $D'1$, de $D1$ et $D'2$,
 et P le point d'intersection de (BB') et (CC') .

Donné : P est sur (AA') .

VISUALISATION

- **Scolies :** (1) $A'QB'PC'R$ est un hexagone de Brianchon.
 (2) $(A'P)$, $(B'Q)$ et $(C'R)$ sont concourantes.
 (3) A est ce point de concours.

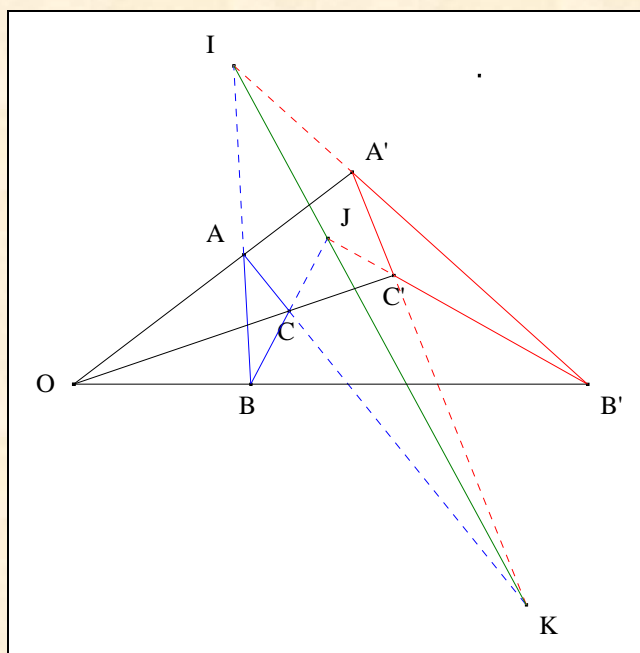
- **Conclusion :** P est sur (AA') .

E. LE SIEUR GIRARD DESARGUES LYONNOIS ¹⁹

1. Le théorème des deux triangles ou de la perspective conique

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 A'B'C' un triangle tel que (AA') et (BB') soient concourantes,
 O ce point de concours,
 I, J, K les points d'intersection de (AB) et (A'B'), (BC) et (B'C'), (CA) et (C'A').

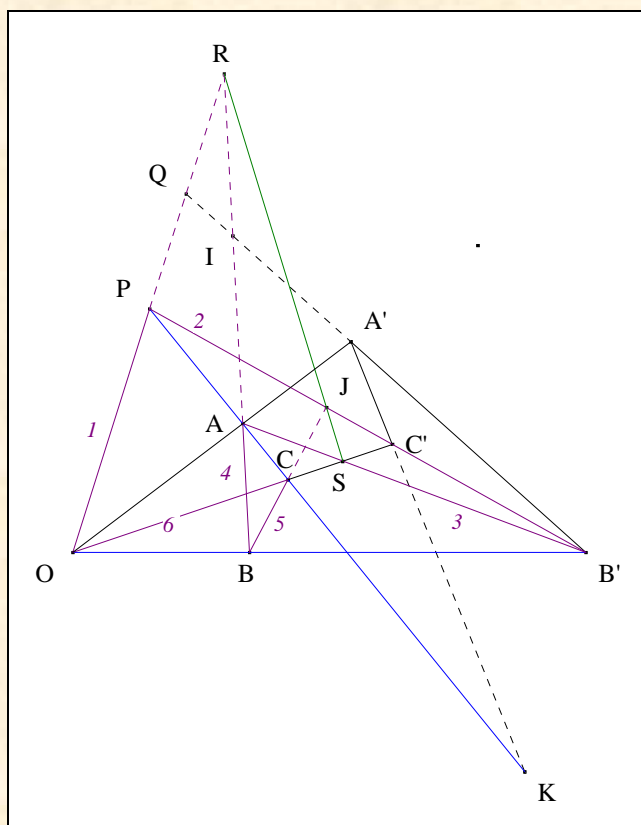
Donné : (CC') passe par O si, et seulement si, I, J et K sont alignés.²⁰

VISUALISATION NÉCESSAIRE ²¹

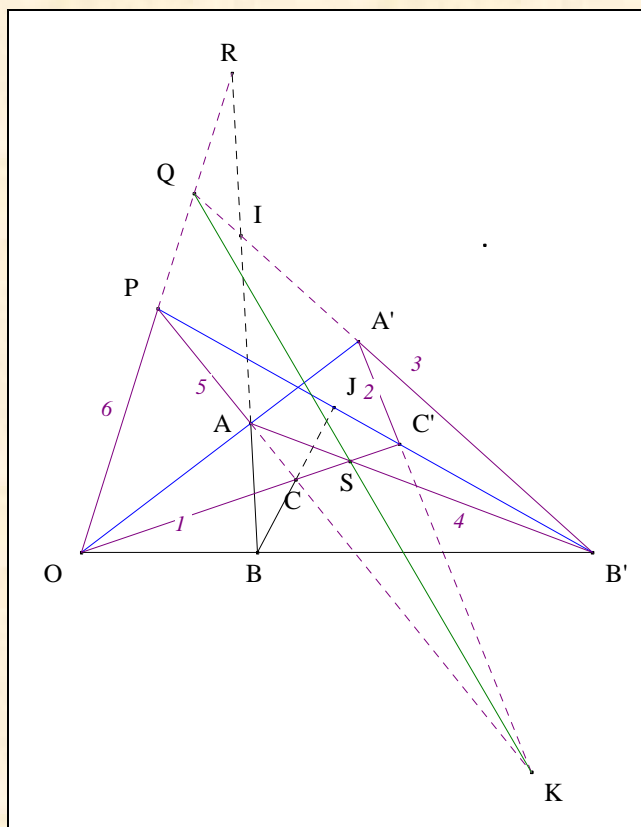
¹⁹ Alias S.G.D.L. comme il signait lui-même ses écrits

²⁰ Bosse A., *Perspective et de la Coupe des pierres* (1648)

²¹ La visualisation nécessaire est celle de Gerhard Heissenberg (1874-1925)

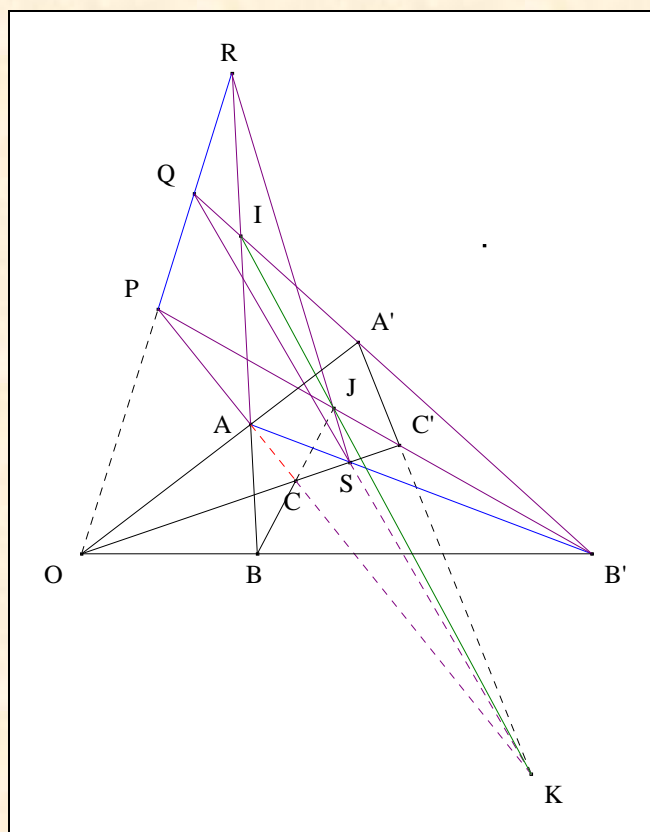


- Notons R, J, S les points d'intersection de (OP) et (AB) , de $(B'P)$ et (BC) , de (OC) et $(A'B')$.
- D'après **A. 1**. Le petit théorème, appliqué à l'hexagone de Pappus $OPB'A'C'O$, R, J et S sont alignés.



- Notons Q, K les points d'intersection resp. de (OP) et $(A'C')$, de (AC) et $(A'C')$.

- D'après **A. 1.** Le petit théorème, appliqué à l'hexagone de Pappus $OC'A'B'APO$, S, K et Q sont alignés.



- **Conclusion :** d'après **A. 1.** Le petit théorème, appliqué à l'hexagone de Pappus $APB'QSRA$, I, J et K sont alignés.

- Scolies :**
- (1) les triangles dont les sommets correspondants sont sur des droites concourantes ont reçus des noms différents selon les géomètres :
 - * le Révérent Georges Salmon et Jean Victor Poncelet les appellent triangles homologues ; en conséquence, O est le centre d'homologie et (IJK) , l'axe d'homologie.
 - * Richard Townsend et Alfred Clebsch préfèrent parler de triangles en perspective ; en conséquence, O est le centre de la perspective et (IJK) , l'axe de la perspective.
 - (2) (IJK) est l'arguésienne des deux triangles perspectifs.

Énoncé traditionnel ²²: *si*, deux triangles ont leurs sommets placés deux à deux sur trois droites concourantes,
alors, leurs côtés se rencontreront deux à deux en trois points alignés.

ou encore

²² Pour deux triangles en position générale

l'axe de deux triangles en perspectives passe par les points d'intersection des côtés homologues.

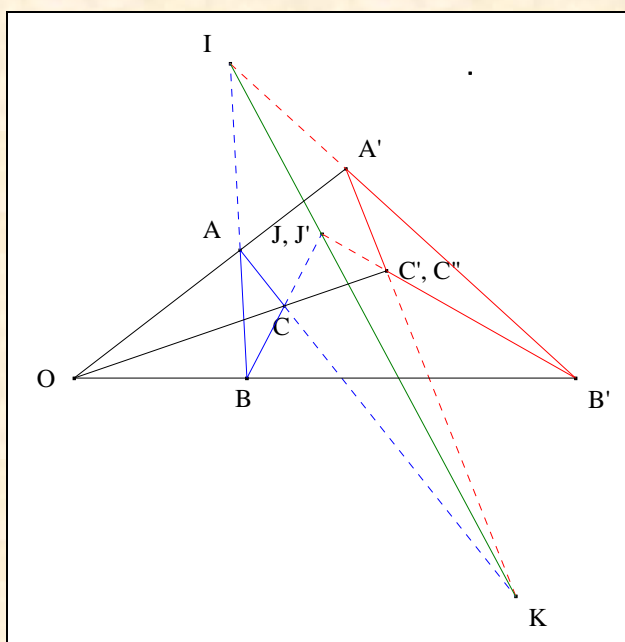
Note historique : le résultat de Girard Desargues se trouve dans les écrits du graveur Abraham Bosse, un continuateur de l'oeuvre de Desargues, qui serait son élève d'après François Joseph Servois et Jean-Victor Poncelet.

Commentaire : cette visualisation a eu recours au "Petit théorème de Pappus".
A ce sujet, rappelons ce que disait Harold Scott McDonald Coxeter et Samuel L. Greitzer²³ dans leur livre *Geometry Revisited* :

It can be deduced from Pappus's ; but the details are complicated.

Pour un approfondissement on pourra s'intéresser au théorème de Gerhard Hessenberg²⁴ datant de 1905.

VISUALISATION SUFFISANTE



- Raisonnons par l'absurde en affirmant que (CC') ne passe par O.
- Notons C'' le point d'intersection de (OC) et $(A'K)$,
et J' le point d'intersection de (BC) et $(B'C'')$.
- **Scolie :** les points C' et C'' sont distincts.
- D'après la visualisation nécessaire, I, J' et K sont alignés ;
en conséquence, J et J' sont confondus ;
il s'en suit que C' et C'' le sont aussi, ce qui est contradictoire.
- **Conclusion :** (CC') passe par O.

²³ Coxeter H. S. M. (9/02/1907-31/03/2003) et Greitzer S. L. (1905-22/02/1998), *Geometry Revisited*, MAA, New York (1967) 70

²⁴ (1874-1925)

Énoncé traditionnel ²⁵ : *si, deux triangles ont leurs côtés qui se rencontrent deux à deux en trois points alignés
alors, leurs sommets seront placés deux à deux sur trois droites concourantes.*

Commentaire : nous venons de parler du théorème dit "des deux triangles" qui, en anglais, se traduit par "the two-triangle theorem".

Note historique : ces deux résultats se trouvent pour la première fois énoncés dans un petit traité intitulé *Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement, ou en devis avec leurs proportions, mesures, éloignements, sans employer aucun point qui soit hors du champs de l'ouvrage* de Girard Desargues ; ce livre constituait le premier ouvrage (1636) de ce géomètre et aurait été perdu si le graveur Abraham Bosse ne l'eût reproduit, en 1647, à la suite de son *Traité de perspective*, rédigé d'après les principes et la méthode de Desargues.

2. Une courte biographie de Girard Desargues



Le "Monge" de son siècle ²⁶

Dans leur volonté de reproduire le réel et d'imiter la nature, les peintres grecs ont tenté sans succès de donner l'illusion de la profondeur dans leurs tableaux. Cette impossibilité opératoire était dû à une méconnaissance des règles mathématiques de la perspective qui leurs auraient permis, de dessiner, entre autre, une rangée d'arbres disparaissant à l'horizon.

C'est au XIV-ième siècle que l'architecte florentin Filippo Brunelleschi découvre les lois de la perspective fuyante²⁷ que Léon Battista Alberti expose au siècle suivant, dans son *Della pittura*²⁸.

Cette perspective aboutit à une représentation plane de l'espace observé par un seul oeil et son protocole met en place le dispositif d'Albrecht Dürer²⁹ i.e.

* le point de vue, sommet du cône visuel, identifié à l'oeil,

* la table ³⁰ sur laquelle repose le sujet à dessiner

²⁵ Pour deux triangles en position générale

²⁶ Surnom donné par Jean Victor Poncelet

²⁷ Cette perspective conique est plus réaliste que la cavalière où l'oeil de l'observateur est à l'infini

²⁸ Architecte italien (1404-1472)

²⁹ Peintre et graveur allemand (1471-1538)

³⁰ Le plan horizontal de référence

- * la fenêtre ³¹ au travers de laquelle l'oeil explore l'espace du sujet pour le dessiner "projectivement" de manière à avoir la même image sur le tableau.

L'intersection de ces deux plans orthogonaux conduit à la ligne de terre ³², et l'intersection du plan horizontal passant par l'oeil avec le plan du tableau, à la ligne d'horizon.

*

Girard Desargues naît à Lyon (France) le 21 février 1591.

Fils d'une famille aisée depuis plusieurs générations, son père travaille pour le diocèse de Lyon.

En 1626, il s'installe à Paris où il présente à la municipalité, un projet hydraulique. En 1630, il rejoint l'Académie du Père Marin Mersenne ce qui lui permet d'entrer en contact avec René Descartes en 1638, Etienne Pascal et son fils Blaise en 1639, de Fermat auxquels il leurs expose un point de vue novateur sur la Géométrie appelé Géométrie projective ou encore moderne.

En 1636, l'ingénieur et architecte Desargues publie son *Brouillon project des Atteintes aux Evénements des rencontres du cône avec un plan* ³³ dans lequel il précise que des droites parallèles sur "la table" deviennent en perspective sur "le tableau", des droites

- * concourantes sur la ligne d'horizon³⁴ en un "point de fuite"³⁵ associé à leur direction si elles ne sont pas parallèles au plan du tableau

- * sinon, parallèles.

De même, des droites concourantes sur "la table" deviennent en perspectives sur "le tableau" des droites concourantes ou parallèles suivant que la droite joignant l'oeil au point de concours de ces droites, rencontre ou non le plan du tableau.

Ainsi, en s'appuyant sur des considérations de perspective, Desargues osait affirmer que deux droites avaient un point commun à l'infini et que, dans un plan, ces points à l'infini appartenaient à une droite.

Après 1644, son activité scientifique se fait plus discrète.

En 1648, le graveur et passionné de perspective, Abraham Bosse ³⁶ publie un traité de *Perspective et de la Coupe des pierres* dans lequel se trouve, en appendice, le fameux théorème de Desargues concernant deux triangles en perspective.

Suite à une dispute avec Curabelle, il retourne en 1649 à Condrieu avant de retourner à Paris en 1657. Vers 1660, il fréquente l'Académie de Montmort.

Il décède à Lyon en octobre 1661.

Rappelons que les ouvrages de Desargues étaient la plupart de simples essais ou brouillon-projets, imprimés parfois sur des feuilles volantes. Toutes les copies du principal livre de Desargues se perdirent. L'appendice du livre d'Abraham Bosse se perdit à son tour, mais sera retrouvé en 1804. Par hasard un autre élève de Desargues, Philippe de la Hire fit une copie du livre de Desargues en 1679. En 1845 Chasles retrouvera dans une librairie parisienne, cette copie du *Brouillon project* ; l'original sera retrouvé en 1951 dans les rayons de la Bibliothèque nationale à Paris.

³¹ Le plan vertical, le tableau, la vitre transparente, la paroi de verre situé entre l'oeil et le sujet

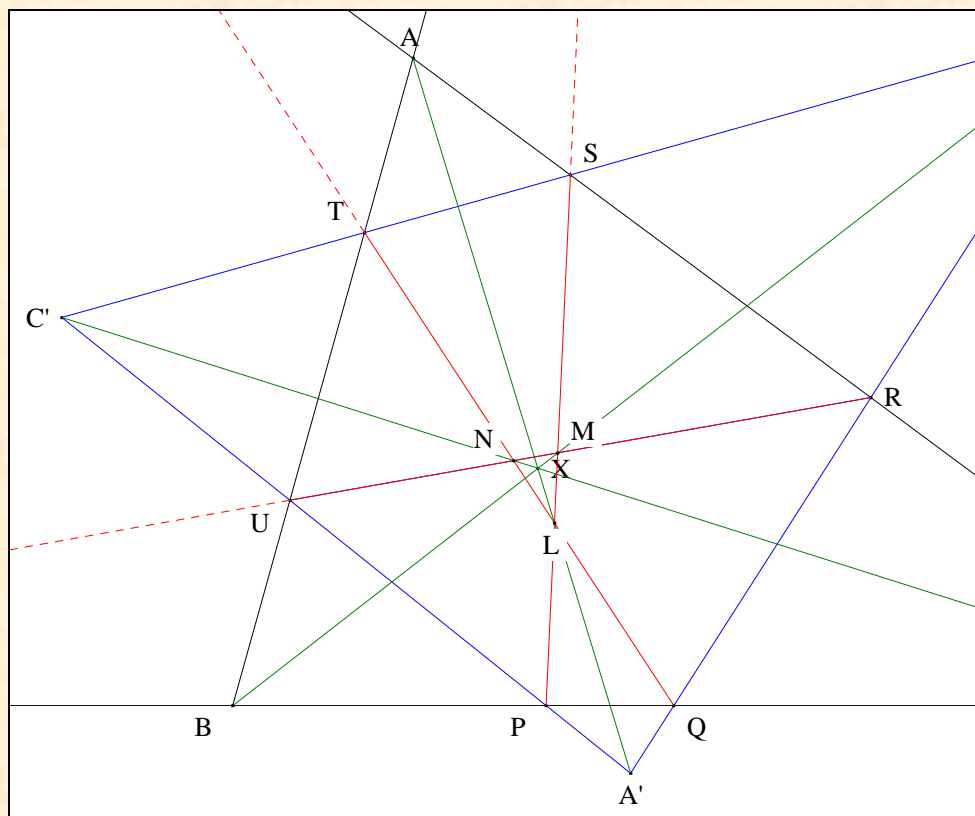
³² Axe de la perspective

³³ [Gallica](#)

³⁴ Droite à l'infini

³⁵ Point d'un dessin en perspective où convergent des droites parallèles dans la réalité

³⁶ Bosse A. (1602-1676)

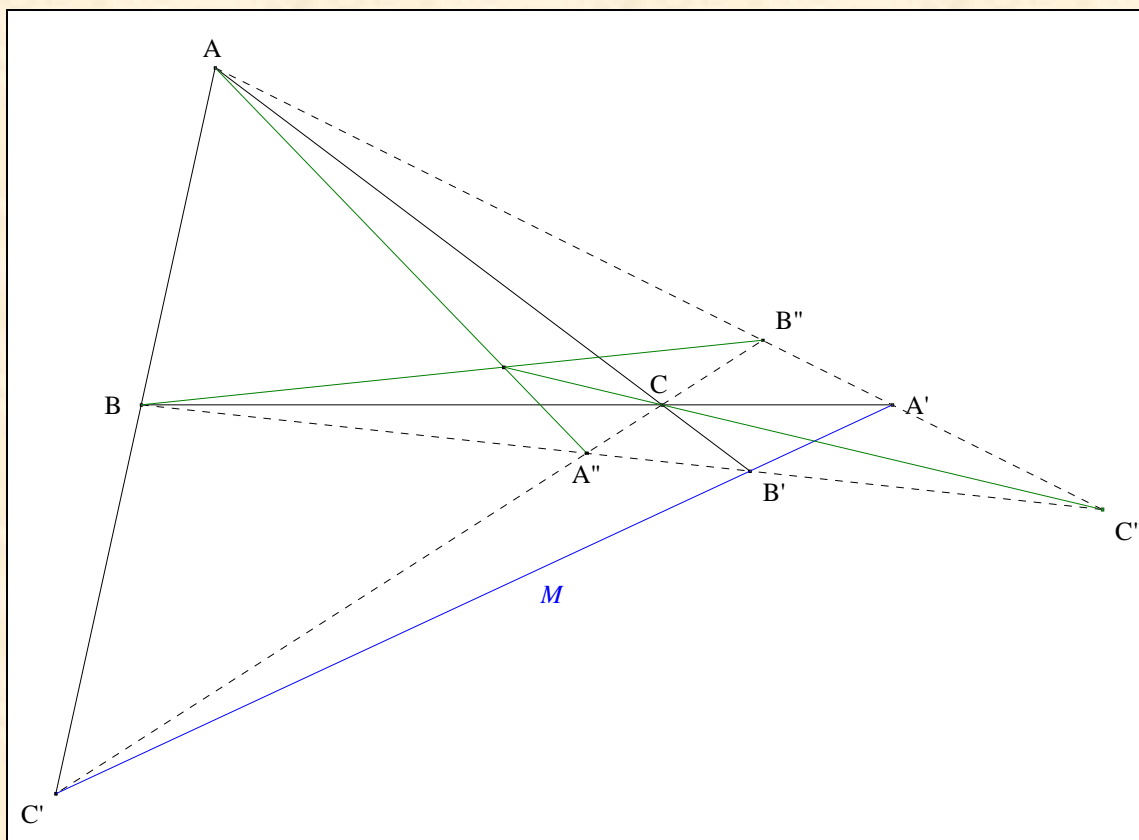


- Notons X le centre de perspective de ABC et $A'B'C'$,
 A l'arguésienne de ABC et $A'B'C'$,
 et L, M, N les points d'intersection de (SP) et (PQ) , de (UR) et (PS) , de (TQ) et (RU) .
- D'après **D. 1. Le théorème des deux triangles**, A étant l'arguésienne des triangles AST et $A'PQ$,
 (AA') , (SP) et (TQ) sont concourantes.
- **Conclusion partielle :** X est sur (ALA') .
- Mutatis mutandis, nous montrerions que X est sur (BMB')
 X est sur (CNC') .
- **Scolies :** (1) les triangles LMN et ABC sont en perspective
 (2) D'après D. 1. Le théorème des deux triangles,
 (IJK) est l'axe de perspective de ces deux triangles.
- **Conclusion :** I, J et K sont alignés.

2. Un quadrilatère complet

VISION

Figure :



Traits : ABC un triangle,
 M une ménélienne de ABC ,
 A', B', C' les points d'intersection de M resp. avec $(BC), (CA), (AB)$
 et A'', B'', C'' les points d'intersection de (BB') et (CC') , de (CC') et (AA') , de (AA') et (BB')

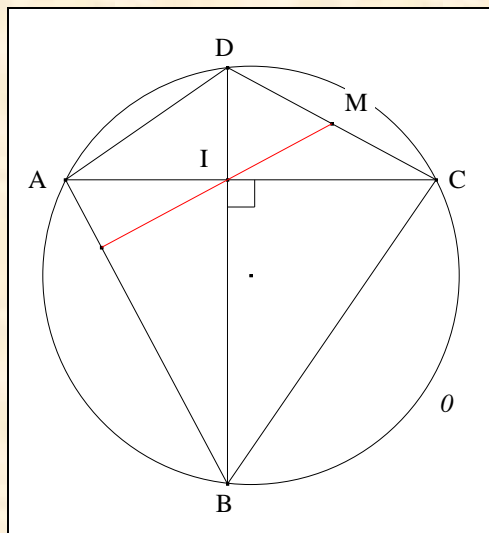
Donné : $(AA''), (BB'')$ et (CC'') sont concourantes.

VISUALISATION

- **Scolie :** A est l'arguésienne des triangles ABC et $A''B''C''$.
- **Conclusion :** d'après **D. 1**. Le théorème des deux triangles, A étant l'arguésienne des triangles ABC et $A''B''C''$, $(AA''), (BB'')$ et (CC'') sont concourantes.

F. ANNEXE

1. Le théorème de Brahmagupta



- Traits :**
- | | |
|------|--|
| O | un cercle |
| ABCD | un quadrilatère convexe orthodiagonal ³⁷ , inscrit dans O , |
| I | le point d'intersection des diagonales de ABCD |
| et M | un point de [CD]. |
- Donné :** M est le milieu de [CD] si, et seulement si, (IM) est perpendiculaire à (AB).

³⁷

Quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires