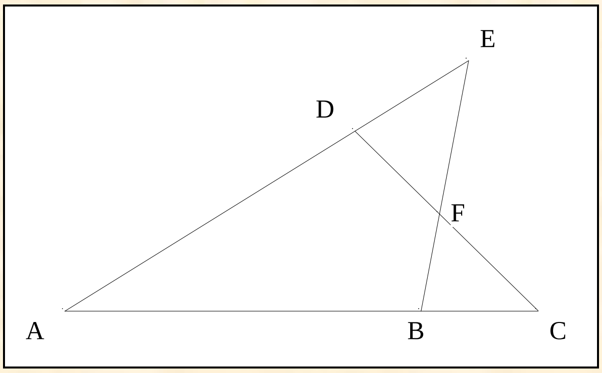
THE MOST ‘’ELEMENTARY’’ THEOREM OF EUCLIDEAN GEOMETRY

and

Malcolm Livingstone URQUHART

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur propose de revisiter le théorème le plus "simple" de la Géométrie du Triangle redécouvert par Malcom L. Urquhart. Une présentation de résultats sur les quadrilatères circonscriptibles et **ex**circonscriptibles, d'équivalences conduisant à la règle de Steiner et de notes historiques agrémentent l'article.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author proposes to revisit the most "elementary" theorem of geometry of the Triangle rediscovered by Malcom l. Urquhart. A presentation of results on circumscritable and excircumscritable quadrilaterals, of equivalency leading to the Steiner's rule and historical notes enhance the article.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be demonstrated synthetically.

---

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 31/05/2012.

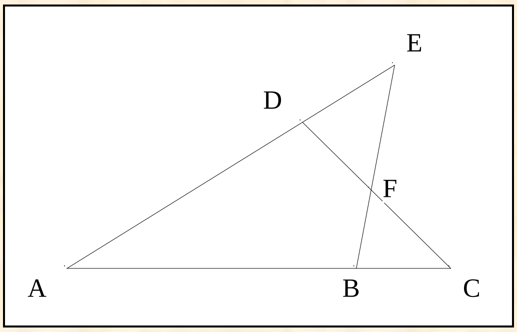
Sommaire

A. LE PROBLÈME D'URQUHART

1. Présentation

VISION

Figure :



Traits : ABFD un quadrilatère convexe
et C, E les points d'intersection resp. de (AB) et (DF), (AD) et (BF).

Donné : *si*, AB + BF = AD + DF *alors*, AC + CF = AE + EF. [2]

2. Note historique

David Elliot [3] raconte

" je me souviens de lui lorsqu'un jour (sans précision) il vint dans mon bureau et me demanda

What you thought was the most elementary theorem of Euclidean geometry ?

Sans attendre ma réponse, il présenta rapidement le théorème ci-avant qu'il avait trouvé en considérant les concepts fondamentaux de la théorie de la relativité restreinte.
Urquhart considérait ce résultat comme étant le théorème le plus "élémentaire" de la Géométrie car il n'implique que des droites et des distances".

D'après l'indien K. R. S. Sastry [4], Urquhart a communiqué ce résultat en 1964 à l'occasion d'un symposium sur la théorie de la relativité à Adelaïde (Australie).

[2] Pedoe Dan, The Most "Elementary" Theorem of Euclidean Geometry, *Mathematics Magazine* vol. **49**, **1** (1976) 40-42.
[3] Elliot D., Urquhart M. L., *J. Ausral. Math. Soc.* **8** (1968) 129-133.
[4] Sastry K. R. S., Urquhart's theorem, *Mathematical Spectrum*, vol. **32**, **3** (May 2000)

Augustus De Morgan (1806-1871)

Rappelons que ce résultat avait été démontré d'une façon compliquée en 1841 par le britannique Augustus De Morgan et que Jakob Steiner l'améliorera en 1846.

L'auteur se bornant qu'aux preuves synthétiques, laisse le soin aux lecteurs de retrouver sur Internet les différentes contributions concernant ces résultats.

3. Une courte biographie de M. L. Urquhart [5]

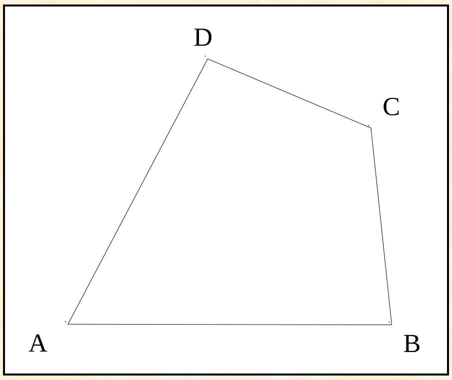
Malcolm Livingstone Urquhart est né à Cape Barren Island (Tasmanie, Australie) en 1902.
Lorsque sa famille déménage à Hobart, capitale de la Tasmanie, il fréquente the Hutchins school, l'une des écoles privées les plus anciennes d'Australie.
En 1923, il entre à l'Université de Tasmanie et obtient en 1926 le Bachelor of Science. Assistant de physique au sein de l'Université, il rejoint le continent comme physicien dans les laboratoires de ministère de la défense à Maribyrnong (Victoria, Australie).
En 1928, il quitte l'Australie pour l'Angleterre pour commencer une thèse de physique théorique à l'Université de Bristol. Ses recherches n'aboutissent pas car un doctorant italien le devance sur le même sujet.
En août 1932, il retourne en Australie en tant que maître de conférences à la faculté de mathématique de Melbourne. Urquhart y serait probablement restée s'il n'avait pas contracté la tuberculose et retourne à Hobart en 1943 pour se soigner. En 1947, il rejoint le département de mathématiques de l'Université de Tasmanie comme chargé de cours et est promu maître de conférences en 1952.
En 1965, Urquhart découvre qu'il est atteint d'un cancer inopérable. Avec le courage qu'il avait démontré dans sa précédente maladie, il continue à remplir ses fonctions à l'Université et le 1er janvier 1966, il est promu "Reader" sept semaines avant sa mort.
Jusqu'à la fin, il conserve son enthousiasme pour les mathématiques, la Géométrie et la nature.
Il décède le 23 février 1966 laissant dans le deuil son épouse et sa fille.

[5] Elliott D., Urquhart M.L., *Journal of the Australian Mathematical Society* (1968) - Cambridge Univ Press

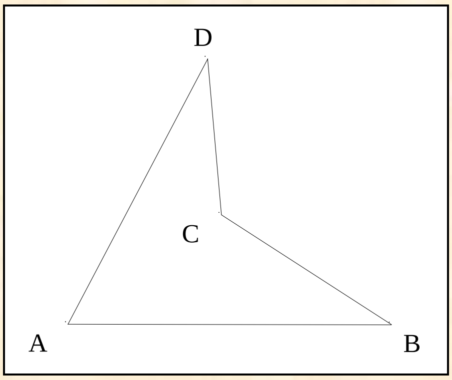
B. CIRCONSCRIPTIBLE * EXCIRCONSCRIPTIBLE

Commentaire : cette partie a pour but de rassembler différents résultats présentés dans différents articles de l'auteur.

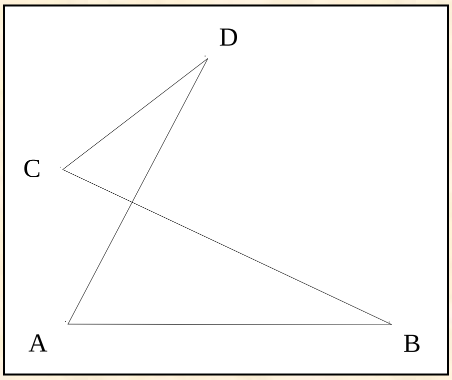
1. Formes d'un quadrilatère



saillant



rentrant



croisé

2. Définitions

(1) Un quadrilatère est circonscriptible s'il peut circonscrire un cercle,
autrement dit,
s'il existe un cercle intérieur à ce quadrilatère, et tangent à ses quatre droites latérales.

(2) Un quadrilatère est excirconscriptible s'il peut excirconscrire un cercle,
autrement dit,
s'il existe un cercle extérieur à ce quadrilatère, et tangent à ses quatre droites latérales.

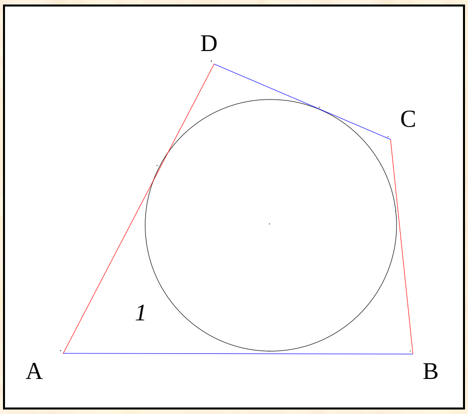
Note historique :

Jordan le Saxon (1225-1260)

selon Nathan Altshiller-Court [6], les quadrilatères circonscriptibles ont été envisagés dès le XII-ème siècle par Jordanus Nemorarius, un contemporain de Fibonacci plus connu sous le nom de Léonard de Pise.

3. Deux quadrilatères circonscriptibles

cas 1



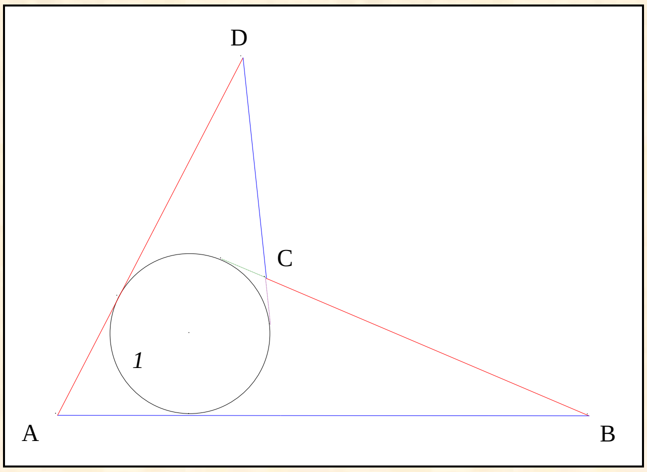
Traits : ABCD un quadrilatère saillant
et *1* un cercle.

Donné : ABCD est circonscriptible à *1* *si, et seulement si,* [7] AB + CD = BC + DA.

cas 2

[6] Altshiller-Court Nathan, *College Geometry*, Barnes & Noble, Richmond (1936) art.268-269, p. 135.

[7] Pitot H., Propriétés élémentaires des polygones circonscrits autour du cercle, *Histoire de l'Académie royale des sciences avec les mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de cette Académie* (1725) 45-47 ;
Ayme J.-L., Equal incircles theorem, G.G.G. vol. **20**, p. 6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits : ABCD un quadrilatère rentrant,
et *1* un cercle.

Donné : ABCD est circonscriptible à *1* *si, et seulement si,* [8] AB + CD = BC + DA.

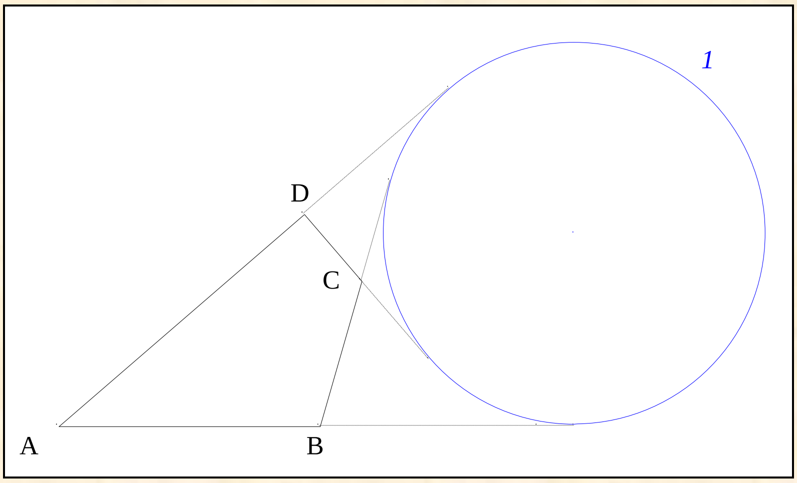
Scolie : tout quadrilatère circonscriptible est dit de "Pitot".

Règle : *pour tout quadrilatère,*

ce quadrilatère est de Pitot
si, et seulement si,
la ***somme*** *de deux côtés opposés égale à la* ***somme*** *des deux autres.*

4. Trois quadrilatères excirconscriptibles

cas 1



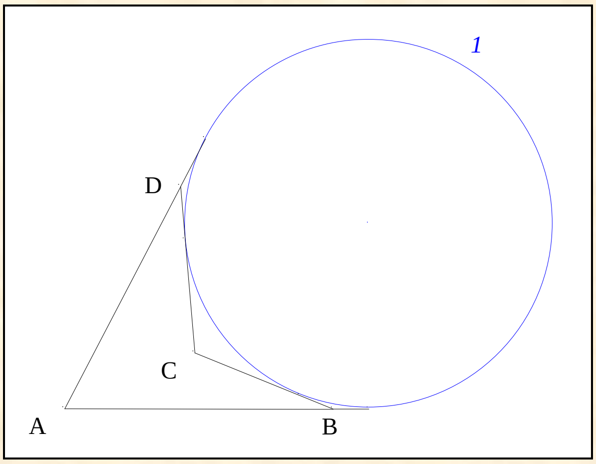
Traits : ABCD un quadrilatère saillant
et *1* un cercle.

---

[8] Steiner J., über das dem Kreise umgeschriebene Viereck , *Journal* de Crelle **32** (1846) 305-310 ;
F. G.-M., *Exercices de Géométrie*, 6th ed., (1920), Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris (1991) Théorème 157, p. 318

Donné : ABCD est excirconscriptible à *1* *si, et seulement si,*[9] AB - CD = AD - BC.

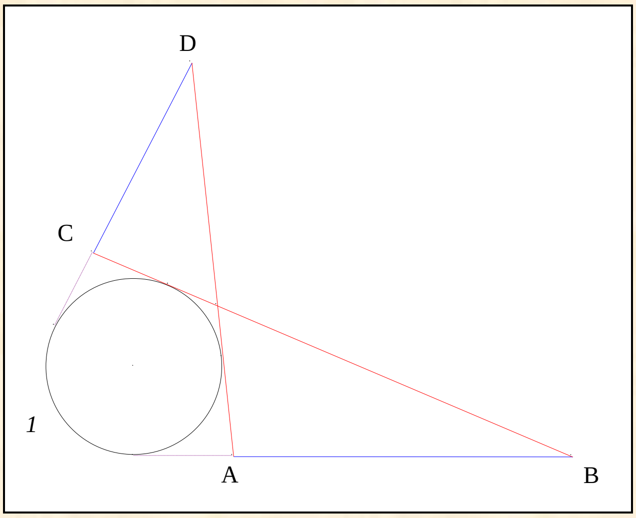
cas 2



Traits : ABCD un quadrilatère rentrant
et *1* un cercle,

Donné : ABCD est excirconscriptible à *1* *si, et seulement si,*[10] AB - CD = AD - BC.

cas 3



Traits : ABCD un quadrilatère croisé
et *1* un cercle.

Donné : ABCD est excirconscriptible à *1* *si, et seulement si,*[11] AB - CD = BC - AD.

Scolie : tout quadrilatère **ex**circonscriptible est dit de "Steiner".

---

[9] Steiner J., über das dem Kreise umgeschriebene Viereck , *Journal* de Crelle **32** (1846) 305-310 ;
F. G.-M., *Exercices de Géométrie*, 6th ed., (1920), Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris (1991) Théorème 158, p. 318

[10] Steiner J., über das dem Kreise umgeschriebene Viereck , *Journal* de Crelle **32** (1846) 305-310 ;
F. G.-M., *Exercices de Géométrie*, 6th ed., (1920), Rééditions Jacques Gabay (Gabay reprint), Paris (1991) 318

[11] Grossman H., Urquhart's quadrilateral theorem, *The Mathematics Teacher*, vol. **66** (1973) 643-644
Ayme J.-L., Equal incircles theorem, G.G.G. vol. **20**, p. 22 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme

Règle : *pour tout quadrilatère,*

ce quadrilatère est de Steiner

si, et seulement si,

*la **différence** de deux côtés opposés égale à la **différence** des deux autres.*

Note : en Géométrie élémentaire, le chercheur observant sa figure d'étude qui est première, n'écrit que des différences positives.

5. La règle de Steiner ou la rectification d'une erreur

(367)

29. *Sur le quadilatère circonscrit au cercle ; par* M. le professeur J. Steiner ; 305-310.

On lit dans les traités de Géométrie qu'un quadrilatère n'est circonscriptible à un cercle que lorsque les *sommes* des côtés opposés sont égales ; cette proposition est défectueuse et incomplète, et ne se rapporte qu'au quadrilatère convexe. Voici l'énoncé complet : Tout quadrilatère dans lequel la somme des deux côtés quelconques est égale à la somme des deux autres, ou dans lequel la différence des deux côtés quelconques est égale à la différence des deux autres, est circonscriptible à un cercle, et réciproquement. Discussion des divers cas.

[12]

Rappelons que dans cette note "circonscriptible" recouvre à la fois "circonscriptible et **ex**circonscriptible".

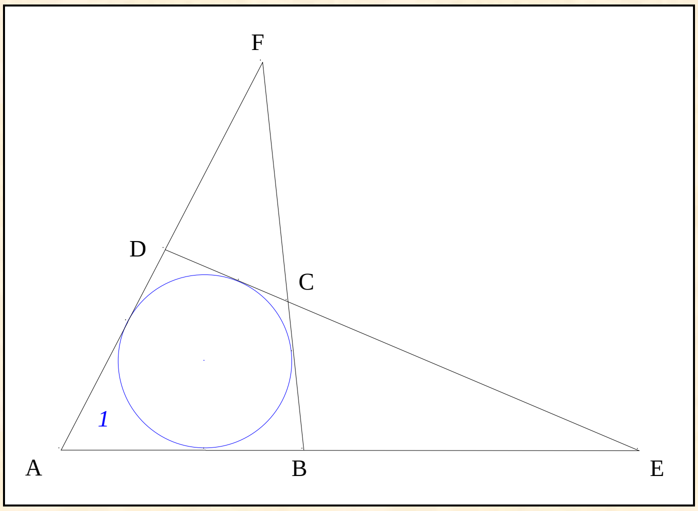
[12] Baltzer R., *Nouvelles Annales* 1re série **8** (1849) 367 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0

C. LES ÉQUIVALENCES

1. Théorème 1

VISION

Figure :



Traits : ABCD un quadrilatère convexe,
E, F les point d'intersection resp. de (AB) et (CD), (BC) et (AD),
et *1* un cercle.

Donné : les propositions
(a) ABCD est circonscriptible à *1*
(b) AB + CD = BC + DA
(c) AE + CF = AF + CE
sont équivalentes. [13]

VISUALISATION

(a) ↔ (b) Cf. **B. 3** cas **1**

(a) ↔ (c) Cf. **B. 3** cas **2**

Note historique : **(a) → (b)** est le théorème de Pitot [14].

(b) → (a) cette réciproque a été proposée[15] en 1814 comme *Question*, et résolue directement l'année suivante par J. B. Durrande [16] professeur à Cahors (Lot, France).

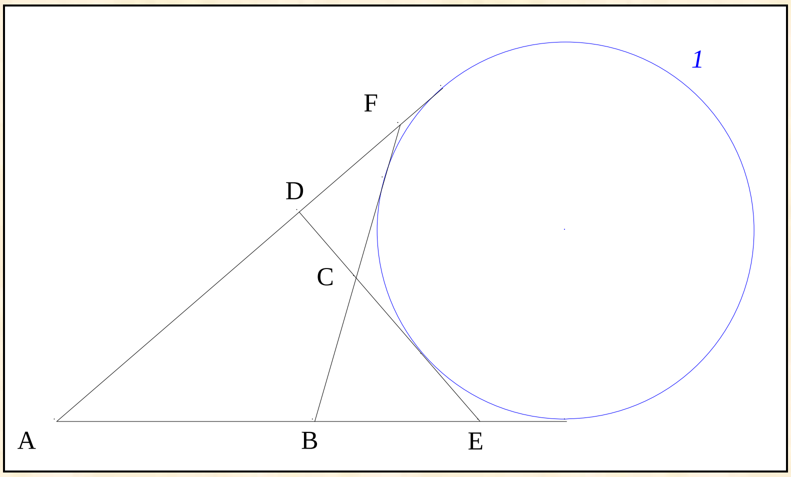
---

13 Grossman H., Urquhart's Quadrilateral theorem, *Math. Teacher* **66** (1973) 643-644 ;
Sauvé L., On Circumscribable Quadrilaterals, *Crux Mathematicorum* (*Eureka*) **2** (1976) 63-67.
14 Ayme J.-L., Le résultat de Larrosa Canestro, G.G.G. vol. **5**, p. 8 ; http://perso.orange.fr//jl.ayme
15 Questions proposées, *Annales* de Gergonne **5** (1814-1815) 384 ;
Ayme J.-L., Le résultat de Larrosa Canestro, G.G.G. vol. **5**, p. 9 ; http://perso.orange.fr//jl.ayme
16 Durrande J. B. (1797-1825), *Annales* de Gergonne **6** (1815-1816) 49-50.

2. Théorème 2

VISION

Figure :



Traits :	ABCD	un quadrilatère convexe,
	E, F	les point d'intersection resp. de (AB) et (CD), (BC) et (AD),
et	*1*	un cercle.

Donné : les propositions

(a) ABCD est **ex**circonscriptible à *1*
(b) AB – CD = AD – BC
(c) AE – CF = AF – CE
(d) BF – DE = BE – DF

sont équivalentes. [17]

VISUALISATION

(a) ↔ (b) Cf. **B. 4** cas **1**

(a) ↔ (c) Cf. **B. 4** cas **2**

(a) ↔ (d) Cf. **B. 4** cas **3**

Note historique : **(a) ↔ (b)** et **(a) ↔ (c)** ont été prouvées par Jakob Steiner [18] en 1846.

(b) → (c) a été prouvée par Augustus De Morgan en 1841.

Commentaire : **(c) → (b)** a été proposée au *Leningrad Mathematical Olympiad* en 1989. [19]

---

[17] Grossman H., Urquhart's Quadrilateral theorem, *Math. Teacher* **66** (1973) 643-644 ;
Sauvé L., On Circumscribable Quadrilaterals, *Crux Mathematicorum* (*Eureka*) **2** (1976) 63-67.

[18] Steiner J., über das dem Kreise umgeschriebene Viereck , *Journal* de Crelle **32** (1846) 305-310 ;

[19] 55th LMO (1989) grade **9**, Problem **61**.

(b) ↔ (c) a été proposée sur le site *Hyacinthos*. [20]

3. Une coquille dans le papier de Kenneth S. Williams [21]

PEDOE'S FORMULATION OF URQUHART'S THEOREM

Kenneth S. Williams, Department of Mathematics, Carleton University

Urquhart's theorem of Euclidean geometry states:

Let ℓ and ℓ' be two straight lines which intersect at A. Let B and C be points on ℓ with C between A and B. Let D and E be points on ℓ' with E between A and D. Suppose that BE and CD intersect at F. If AC + CF = AE + EF, then we have AB + BF = AD + DF.

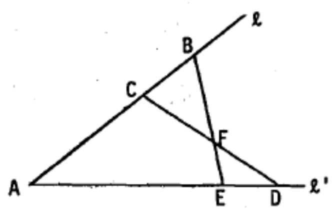
In a recent article Pedoe [2] asserts that an equivalent version of Urquhart's theorem is the following:

If C and E are points on an ellipse with foci A and F, then B = AC ∩ EF and D = AE ∩ CF lie on a confocal ellipse.

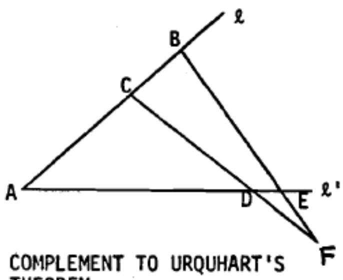
Unfortunately, this is not quite correct as it stands. To make it correct, we must insert the requirement that C and E lie on opposite sides of AF. More precisely we have:

The case when C and E lie on the same side of AF leads to the following complement to Urquhart's theorem (see for example [1]):

Let ℓ and ℓ' be two straight lines which intersect at A. Let B and C be points on ℓ with C between A and B. Let D and E be points on ℓ' with D between A and E. Suppose that BE and CD intersect at F. If AC + CF = AE + EF, then we have AB - BF = AD - DF.



URQUHART'S THEOREM:
AC+CF = AE+EF => AB+BF = AD+DF



COMPLEMENT TO URQUHART'S THEOREM:
AC+CF = AE+EF => AB-BF = AD-df

43

References

1. H. Grossman, Urquhart's quadrilateral theorem, The Mathematics Teacher, 66 (1973), 643-644.
2. D. Pedoe, The most elementary theorem of Euclidean geometry, Mathematics Magazine 49 (1976), 40-42.

Pour l'auteur le "complement to Urquhart's theorem" avec les notations ci-dessus s'écrit :

---

[20] Urquhart theorem, Message *Hyacinthos* # **12866**, **12869** du 26, 27/04/2006 ;

[21] Williams K. S. , Pedoe's formulation of Urquhart's theorem, *Ontario Mathematics Gazette*, **15** (1976) 42–44 ; http://people.math.carleton.ca/~williams/papers/pdf/087.pdf

AC – EF = AE – CF → AB – DF = BF – AD

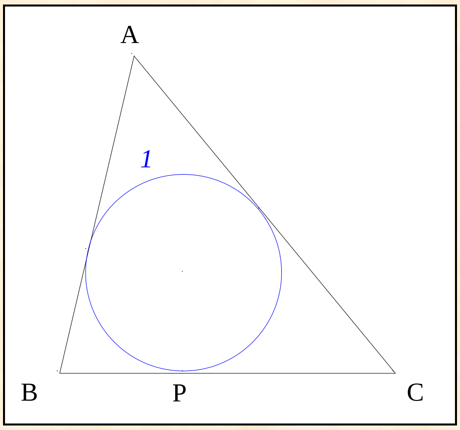
i.e.

que nous sommes dans la situation où

(d) → (c)

4. Deux cas limites ou le lemme de Rennie

cas 1



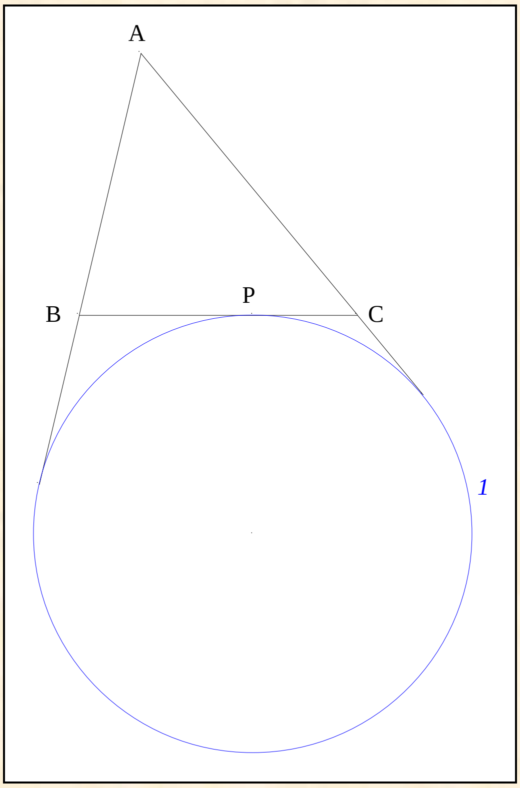
Traits : ABC un triangle,
P un point de [BC]
et *1* un cercle tangent resp. à [AB], [AC] et passant par P.

Donné : *1* est tangent à [BC] en P *si, et seulement si,* [22] AB + PC = AC + PB.

Commentaire : ce résultat connu bien avant Basil Rennie est le cas limite de **B. 3.** Cas **1**, **2**.

cas 2

[22] Ayme J.-L., Equal incircles theorem, G.G.G. vol. **20**, p. 11-13 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



Traits : ABC un triangle,
P un point de [BC]
et *1* un cercle **ex**tangent resp. à [AB], [AC] et passant par P.

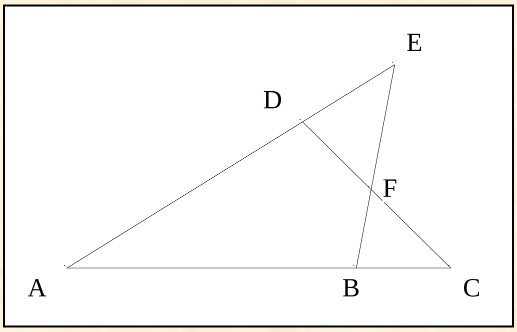
Donné : *1* est tangent à [BC] en P *si, et seulement si,* AB – PC = AC – PB.

Commentaire : ce résultat connu bien avant Basil Rennie est le cas limite de **B. 4.** Cas **1**, **2**.

D. LA PREUVE

VISION

Figure :



Traits : ABFD un quadrilatère convexe
et C, E les points d'intersection resp. de (AB) et (DF), (AD) et (BF).

Donné : *si,* AB + BF = AD + DF *alors,* AC + CF = AE + EF.

VISUALISATION

- **Conclusion :** en se référant à **C. 2.** Théorème **2**, cette implication correspond à **(b)** → **(c)**.

Note historique :

citons Léon Sauvé [23] l'éditeur de la revue canadiene *Eureka* (*Crux Mathematicorum* aujourd'hui) :

The results described above were peacefully slumbering in obscure libraries
when suddently a minor earthquake with epicentre in Australia causes them to shake off the dust of centuries.
It was caused by Malcolm L. Urquhart.

En 1968, Georges Szekeres [24] présente la preuve du professeur Basil Rennie [25] de l'université James Cook de Twonsville (Queensland du nord, Australie) qui utilisa un résultat connu et présenté aujourd'hui sous le nom de "Lemme de Rennie".

Grossman came next.
He wrapped it all up in the beautifull package represented by Theorems **1** *and* **2**.

Pour éviter d'avoir recours à des cercles, le professeur Dan Pedoe [26] de l'Université du Minnesota (États-Unis) a proposé un équivalent du théorème d'Urquhart en transformant la figure d'Urquhart par polaire réciproque par rapport à un cercle de centre A

---

[23] Sauvé L., On Circumscribable Quadrilaterals, *Crux Mathematicorum* (*Eureka*) **2** (1976) 63-67

[24] Szekeres G., Kinematic Geometry, M.L.Urquhart in memoriam, *Journal of the Australian Mathematical Society*, vol. **8** (1968) 134-160

[25] Runnie B. a édité une revue analogue à *Eureka*.

[26] Pedoe D., The most “elementary” theorem of Euclidean geometry, *Math. Mag.*, 4 (1976) 40–42

- 66 -

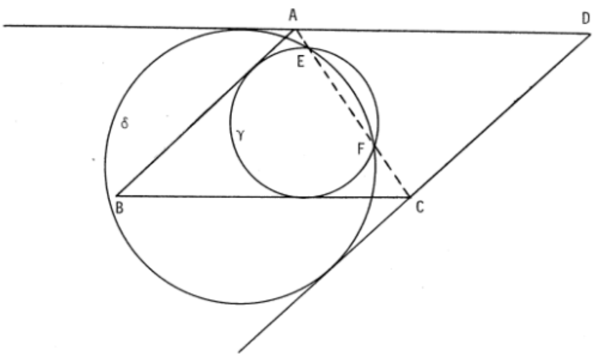


Figure 4

PEDOE'S TWO-CIRCLE THEOREM. ABCD *is a parallelogram, and a circle* γ *touches* AB *and* BC *and intersects* AC *in the points* E *and* F. *Then there exists a circle* δ *which passes through* E *and* F *and touches* AD *and* DC.

Pedoe then proved the theorem directly with the help of Rennie's Lemma. Later, in [10], he said that there is a simpler proof of his two-circle theorem which does not use Rennie's Lemma. In Problem 139 on p. 68, he invites the readers of EUREKA to find such a proof.