CULTURE GÉOMÉTRIQUE 2

QUATRE POINTS COCYCLIQUES

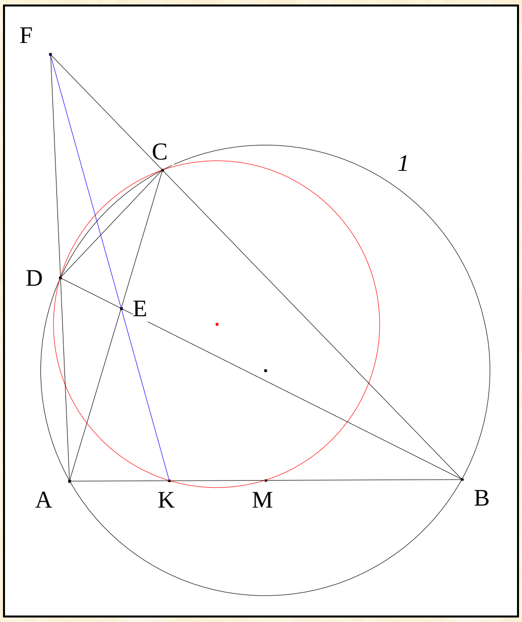
UNE GÉNÉRALISATION

DU

CERCLE D'EULER

†

Jean - Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente un exercice de Nathan Altshiller-Cour datant de 1923 et pris dans le classique livre de Géométrie intitulé *College Geometry*…
Ce résultat peut être vu comme une généralisation du cercle d'Euler.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents an exercise of Nathan Altshiller-Court dating from 1923 and took in the classic geometry book entitled *College Geometry*...
This result can be seen as a generalization of the Euler's circle.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be proved synthetically.

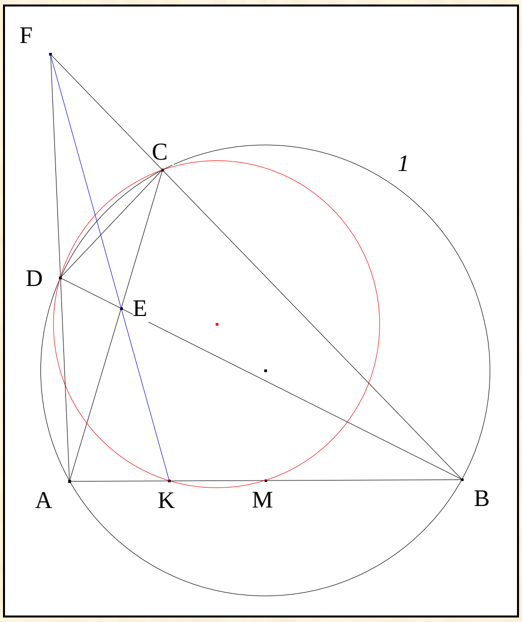
Sommaire

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 20/08/2016 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

A. QUATRE POINTS COCYCLIQUES

VISION

Figure:



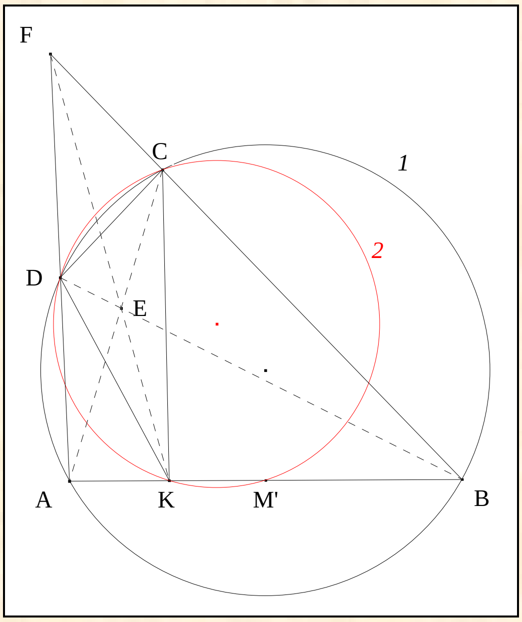
Traits :	ABCD	un quadrilatère convexe cyclique,
	1	le cercle circonscrit à ABCD,
	E, F	les points d'intersection resp. (AC) et (BD), (AD) et (BC),
	K	le point d'intersection de (EF) et (AB),
et	M	le milieu de [AB].

Donné : C, D, K et M sont cocycliques. [2]

VISUALISATION

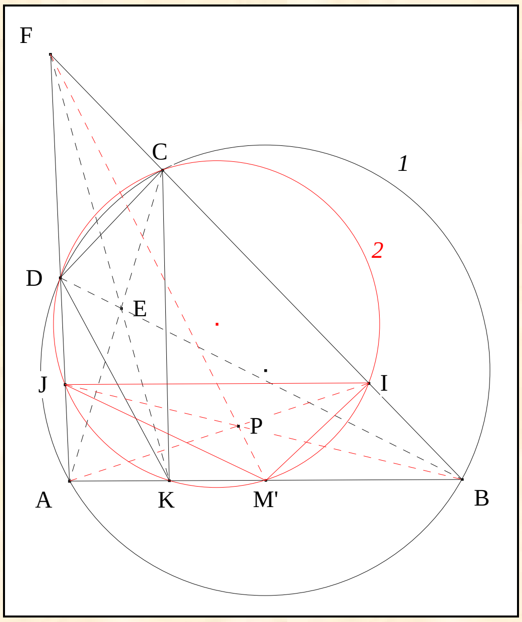
---

[2] Altshiller-Court N., *College Geometry*, Richmond (1923) 247, exercice **5**
Une généralisation du cercle d'Euler, *Les-Mathematiques.net* ;
http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1312443
A generalization of the Euler's circle, AoPS du 15/08/2016 ;
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h1290175_a_generalization_of_the_euler_circle



- **Scolie :** le triangle KCD est E-cévien relativement au triangle FAB.

- Notons *2* le cercle circonscrit à KCD
  et M' le second point d'intersection de (AB) avec *2*.

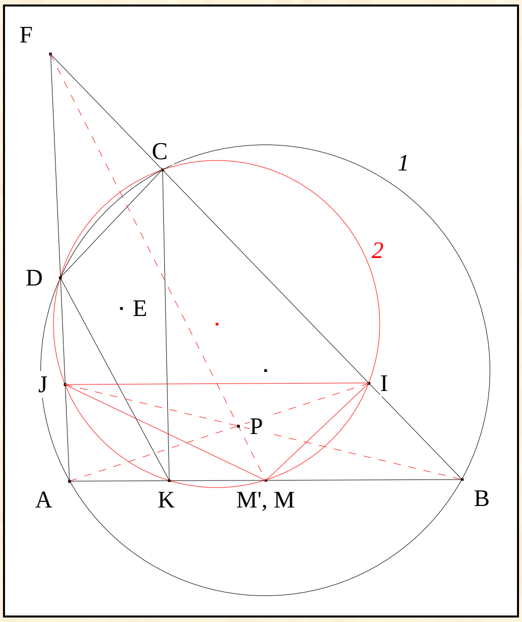


- Notons I, J les seconds points d'intersections resp. de (FB), (FA) avec *2*.

- D'après Ferriot-Terquem" [3], le triangle M'IJ est cévien ;
  en conséquence, (AI), (BJ) et (FM') sont concourantes.

- Notons P ce point de concours.

[3] Terquem O., *Nouvelles Annales* **1** (1842) 403 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0
Candido G. (1871-1941), *Nouvelles Annales* (1900) 251
Ayme J.-L., A new point on Euler line, G.G.G. vol. **5**, p. 3-6 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/
Ayme J.-L., Une longue phrase, G.G.G. vol. **13**, p. 14-17 ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/



- Les cercles *2* et *1*, les points de base C et D, les moniennes (ICB) et (JDA), conduisent au théorème **0** de Reim ; il s'en suit que (IJ) // (BA).

- D'après Thalès "Le trapèze complet", (FP) passe par le milieu M de [AB]; en conséquence, M et M' sont confondus.

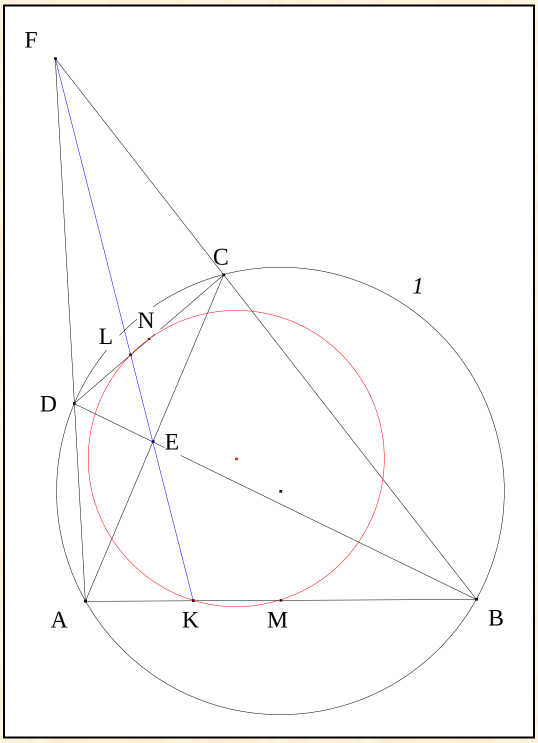
- **Conclusion :** C, D, K et M sont cocycliques.

Scolie : *si,* E est l'orthocentre de FAB
alors, *2* est le cercle d'Euler de FAB.

B. UN EXERCICE

VISION

Figure:

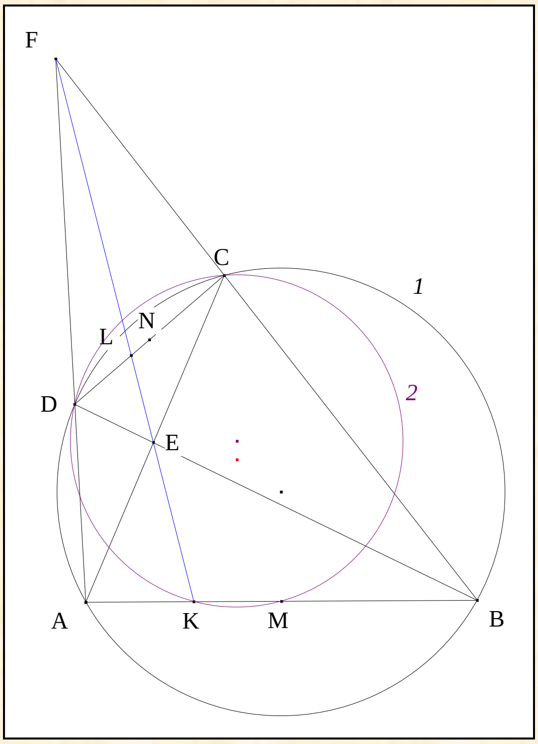


Traits : ABCD		un quadrilatère convexe cyclique,
	1	le cercle circonscrit à ABCD,
	E, F	les points d'intersection resp. (AC) et (BD), (AD) et (BC),
	K, L	les points d'intersection de (EF) resp. avec (AB), (CD)
et	M, N	les milieux resp. de [AB], [CD].

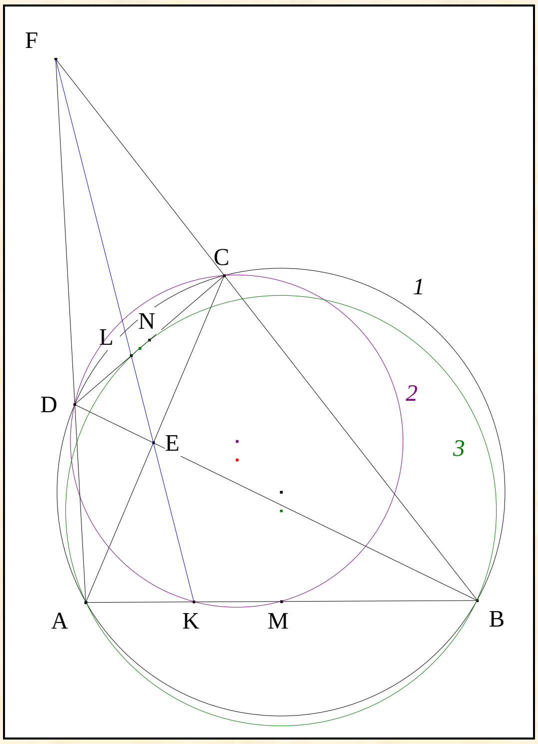
Donné : K, L, M et N sont cocycliques. [4]

VISUALISATION

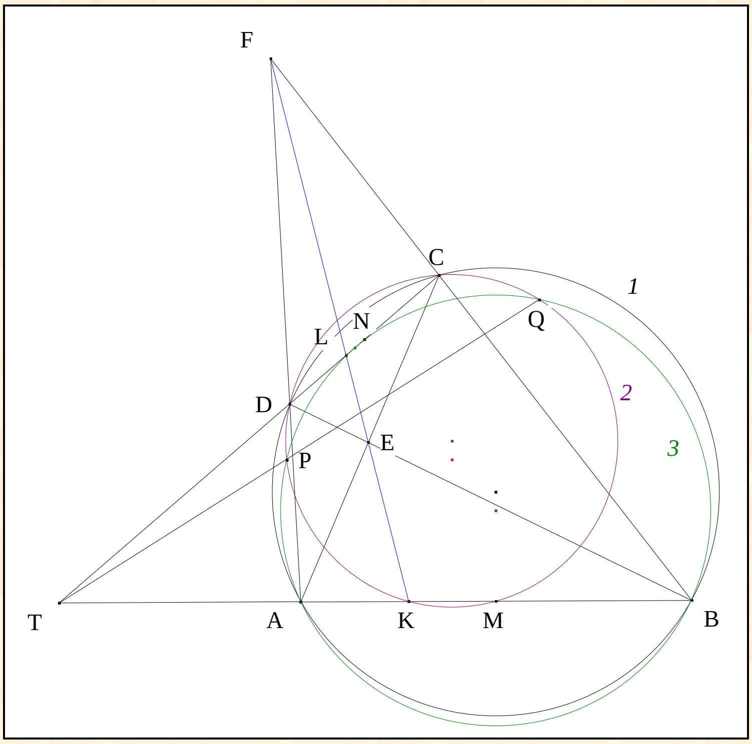
[4] Rideau F., *Les-Mathematiques.net* ; http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?8,1312443



- D'après **A.**, C, D, K et M sont cocycliques.
- Notons *2* ce cercle.

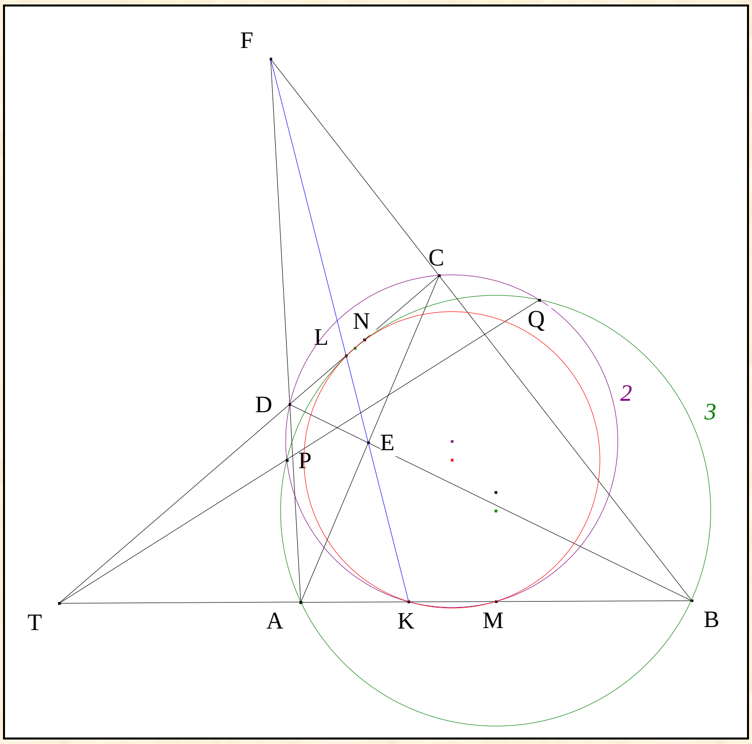


- D'après **A.**, A, B, L et N sont cocycliques.
- Notons *3* ce cercle.



- Notons U, V les points d'intersection de *2* et *3*,
  et T le point d'intersection de (AB) et (CD).

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [5]
  appliqué aux cercles sécants *1*, *2* et *3*, (PQ) passe par T.



- D'après Monge "Le théorème des trois cordes"
  appliqué aux cercles sécants *2* et *3*, K, L, M et N sont cocycliques.

---

[5] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/