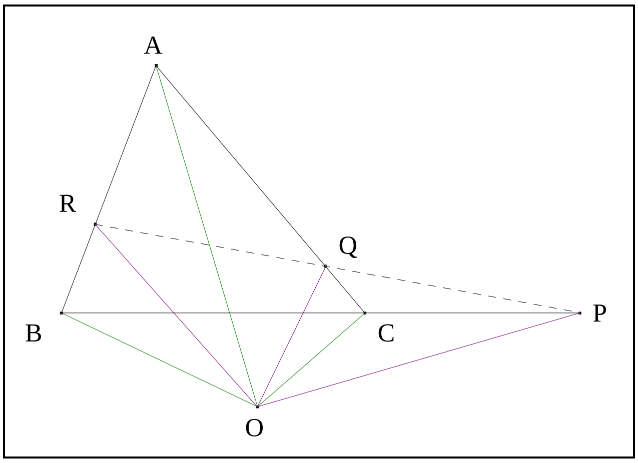
PÔLE

ET

ORTHO - TRANSVERSALE

†

Jean-Louis AYME



Résumé. Nous présentons le concept d'ortho-transversale initié par Félix Laroche en 1849 et le problème de Khoa Lu Nguyen datant de 2006 consistant à chercher un cercle et un point tel que celui ci soit le pôle de l'ortho-transversale considérée par rapport au cercle. Ce point et ce cercle ont été étudiés par J. J. A. Mathieu vers 1865.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Sommaire

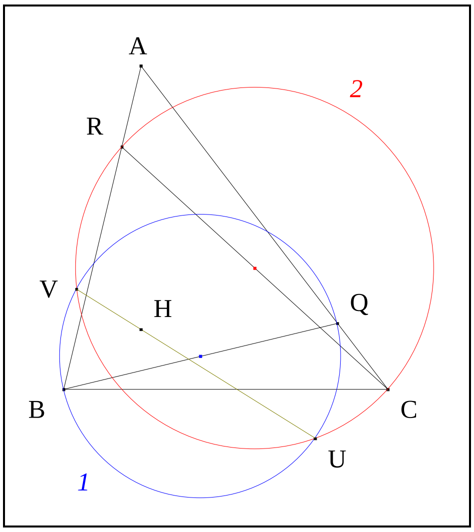
Avertissement : les références indiquées sont celles trouvées par l'auteur et peuvent donc être modifiées.

A. ORTHO - TRANSVERSALE

1. Deux céviennes diamétrales

VISION

Figure :

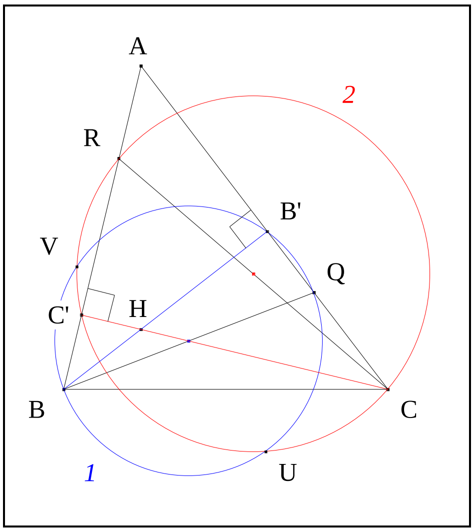


Traits : ABC un triangle,
H l'orthocentre de ABC,
Q, R deux points resp. de (CA), (AB),
1, *2* les cercles de diamètre resp. [BQ], [CR],
et U, V les points d'intersection de *1* et *2*.

Donné : (UV) passe par H.

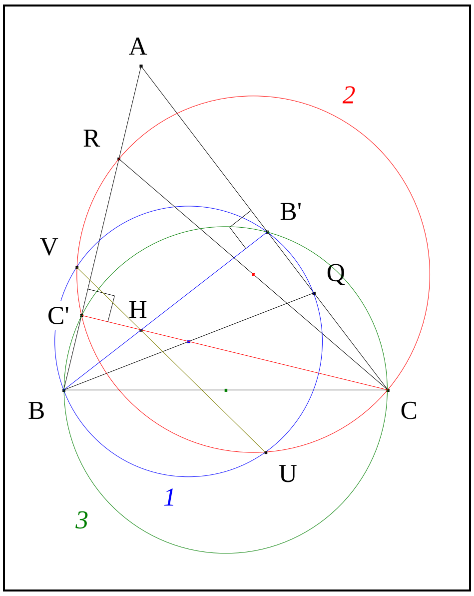
VISUALISATION

Commentaire : nous imposons le fait que *1* et *2* sont sécants, ce qui n'est pas toujours le cas.



- Notons B' le second point d'intersection de *1* avec (CA)
  et C' le second point d'intersection de *2* avec (AB).

- D'après Thalès "Triangles inscriptible dans un demi cercle",
  les triangles B'BQ et C'CR sont resp. B', C'-rectangles ;
  en conséquence, (BB') et (CC') étant resp. les B, C-hauteurs de ABC, passent par H.



- Notons *3* le cercle de diamètre [BC] ; il passe par B' et C'.

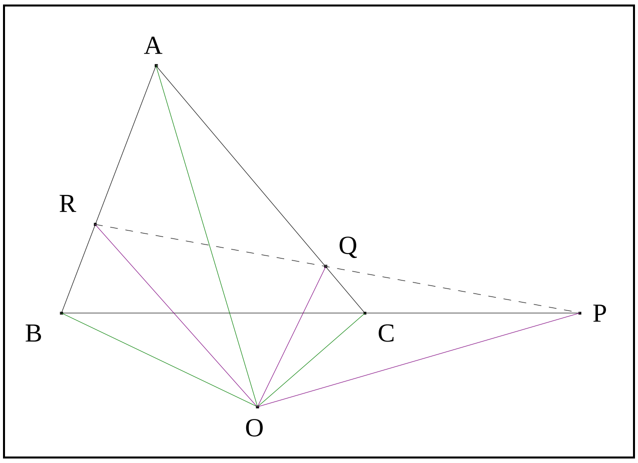
- **Conclusion :** d'après Monge "Les trois cordes" [1], appliqués à *1*, *2* et *3*, (UV) passe par H.

2. Le résultat de Félix Laroche

VISION

Figure :

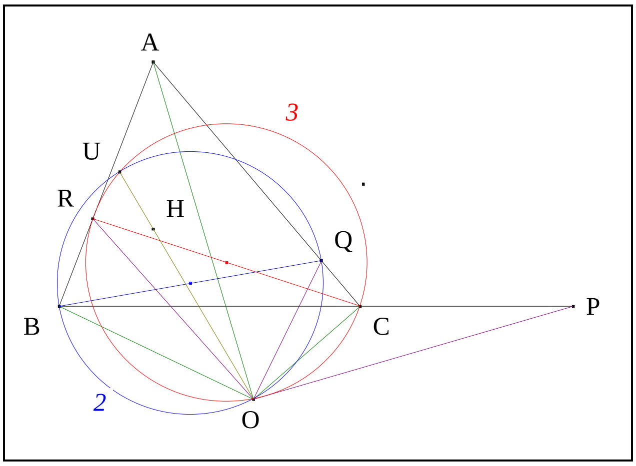
[1] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. 6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.



Traits : ABC un triangle,
O un point,
P le point d'intersection de la perpendiculaire à (OA) en O, avec (BC),
Q le point d'intersection de la perpendiculaire à (OB) en O, avec (CA)
et R le point d'intersection de la perpendiculaire à (OC) en O, avec (AB).

Donné : P, Q et R sont alignés.[2]

VISUALISATION

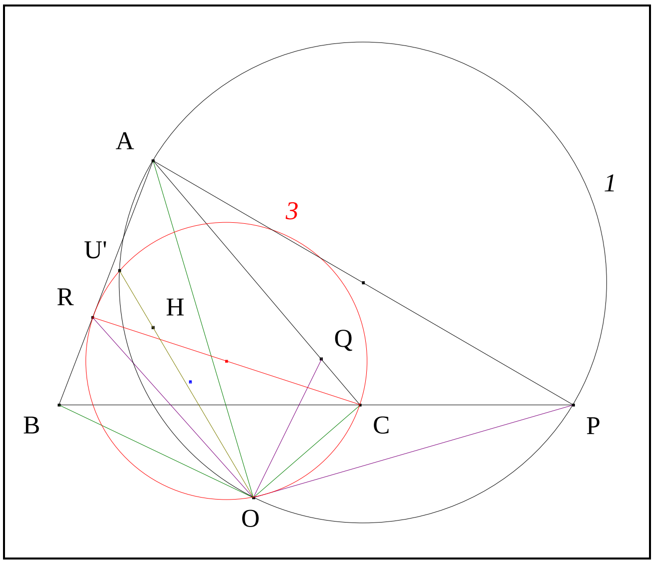


- Notons *2*, *3* les cercles de diamètre resp. [BQ], [CR].

- Notons U le second point d'intersection de *2* et *3*,
  et H l'orthocentre de ABC.

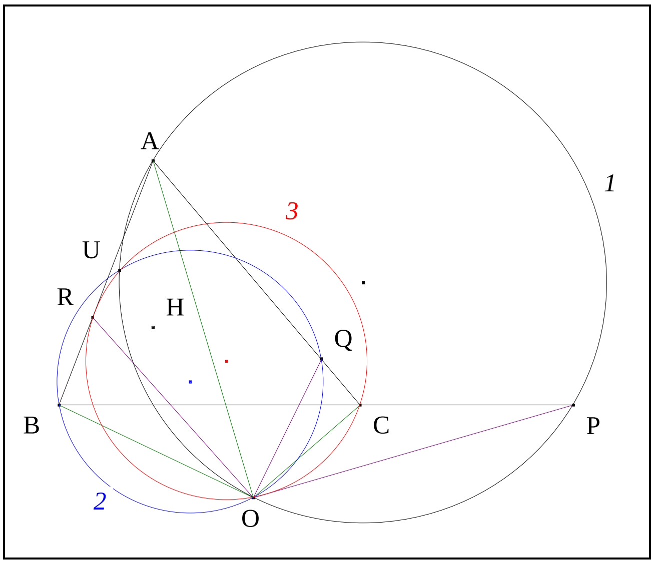
- D'après A. 1. Deux céviennes diamétrales
  appliqué à ABC et aux céviennes (BQ) et (CR), (OU) passe par H.

[2] Laroche F., Theorème de Collineation sur le triangle rectiligne, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1-ère série, tome 8 (1849) 295-296 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=NAM&sl=0.

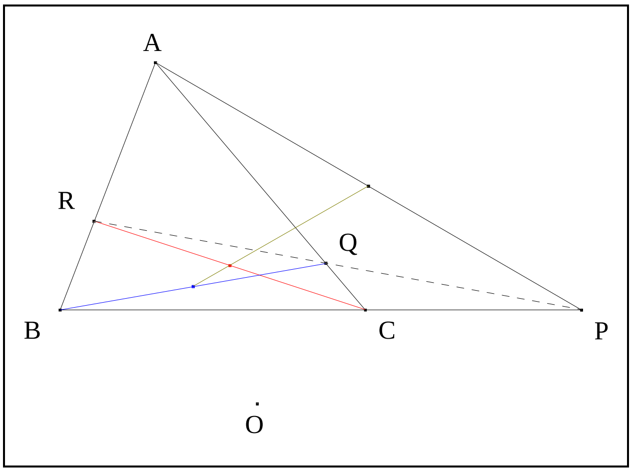


- Notons *1* le cercle de diamètre [AP]
  et U' le second point d'intersection de *3* et *1*.

- D'après A. 1. Deux céviennes diamétrales
  appliqué à ABC et aux céviennes (CR) et (AP), (OU') passe par H ;
  en conséquence, U et U' étant sur (OH) et sur *3* , sont confondus.



- **Conclusion partielle :** *1*, *2* et *3* passant par O et U, sont coaxiaux.



- **Scolies :** **(1)** les milieux de *1*, *2* et *3* sont alignés.
  (2) Ces points sont aussi les milieux des céviennes [AP], [BQ], [CR] du triangle ABC.

- **Conclusion :** d'après Bodenmiller [3], P, Q et R sont alignés.

Note historique : ce résultat[4] de Félix Laroche de 1849 a été démontré par son auteur en recourrant au théorème de Ménélaüs. Jacques Hadamard[5] a prouvé ce résultat par la technique des polaires réciproque et Paul Yiu par les coordonnées barycentriques.
Rappelons que Karl Friedrich Gauss a montré l'alignement des milieux des diagonales d'un delta déterminé par un triangle et une ménélienne (quadrilatère complet) et que Bodenmiller en a prouvé une réciproque.
Ce résultat de Bodenmiller qu'a souligné Christoph Gudermann (1798-1852) dans une remarque, a permis aux historiens des mathématiques de dire que Bodenmiller avait redécouvert la droite de Gauss. [6]
Les définitions ci-après ont été données par Bernard Gibert[7].

Scolies : **(1)** (OA), (OB) et (OC) sont resp. "les A, B, C-orthocéviennes de P relativement à ABC" ;

(2) P, Qet R sont resp. "les A, B, C-orthotraces de O sur ABC" ;

(3) (PQR) est "l'orthotransversale, ou l'orthopolaire, ou l'axe orthocévien, ou encore l'orthocévienne de O relativement à ABC".

(4) U est "l'orthoassocié à O relativement à ABC".

B. LE COMMANDANT J. J. A. MATHIEU

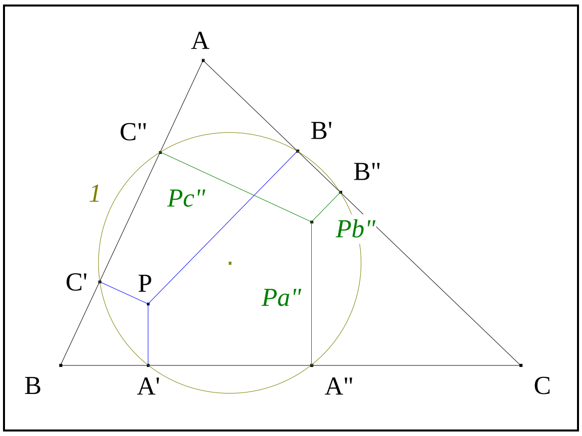
1. Le P-cercle de Mathieu

---

3 Bodenmiller, *Analytische Sphärik*, Cologne (1830) 138.
Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. 4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
4 Q, R, S collinear, *Mathlinks* du 05/09/2010 ; http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=365492.
5 Hadamard J., *Leçons de Géométrie Élémentaire* (1898)
6 Bodenmiller, *Analytische Sphärik*, Cologne (1830) 138.
Ayme J.-L., La droite de Gauss et la droite de Steiner, G.G.G. vol. 4 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
7 Gibert B., Orthocorrespondence and Orthopivotal Cubics, *Forum Geometricorum* 3 (2003) 1-27 ; http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200301.pdf.

VISION

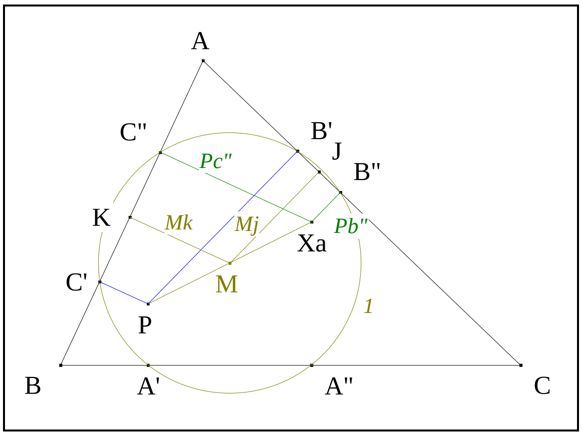
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	A', B', C'	les pieds resp. des perpendiculaires issues de P resp. sur (BC), (CA), (AB),
	1	le cercle passant par A', B', C',
	A", B", C"	les seconds points d'intersection de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB)
et	*Pa"*, *Pb"*, *Pc"*	les perpendiculaires resp. à (BC), (CA), (AB) élevées resp. en A", B", C".

Donné : *Pa"*, *Pb"* et *Pc"* sont concourantes.

VISUALISATION



• Notons	M	le centre de *1*
	Xa	le point d'intersection de *Pb"* et *Pc"*
	J, K	les milieux resp. de [B'B"], [C'C"]
et	*Mj*, *Mk*	les médiatrices resp. de [B'B"], [C'C"].

- D'après le théorème "Corde et médiatrice", *Mj* et *Mk* se coupent en M.

- **Scolies :** **(1)** *Mj*, (PB') et *Pb"* sont parallèles entre elles
  (2) *Mk*, (PC') et *Pc"* sont parallèles entre elles.

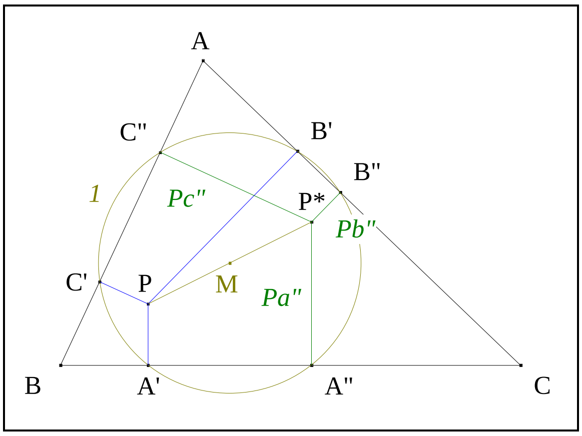
- D'après l'axiome de passage IIIb, *Mj* et *Mk* passent par le milieu de [PXa].

- **Conclusion partielle :** O est le milieu de [PXa].

- Notons Xb le point d'intersection de *Pc"* et *Pa"*
  et Xc le point d'intersection de *Pa"* et *Pb"*.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que O est le milieu resp. de [PXb], [PXc] ;
  en conséquence, Xa, Xb et Xc sont confondus.

- Notons P* ce point.



- **Conclusion :** *Pa"*, *Pb"* et *Pc"* sont concourantes en P*.

Scolies : **(1)** P* est "le point de Mathieu associé à P relativement à ABC" ;
en partant de P*, P est "le point de Mathieu associé est P* relativement à ABC".
Par abus de langage, P et Q sont "les points de Mathieu" de la situation étudiée.

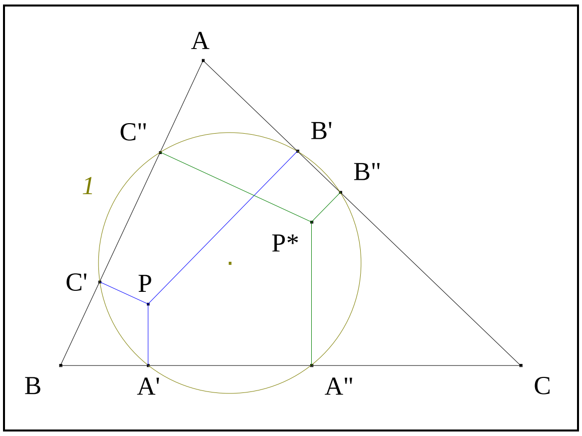
(2) *1* est "le cercle de Mathieu de P et Q" ou encore "le P-cercle de Mathieu".

(3) M est le milieu de [PP*].

2. P* est l'isogonal de P

VISION

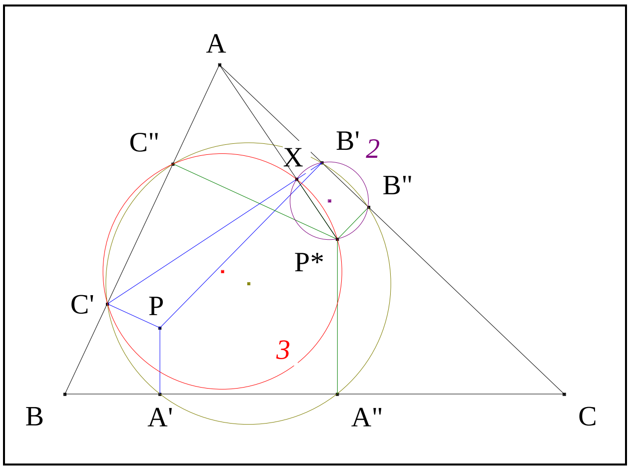
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point non situé sur le cercle circonscrit de ABC,
	A', B', C'	les pieds resp. des perpendiculaires issues de P resp. sur (BC), (CA), (AB),
	1	le cercle passant par A', B', C',
	A", B", C"	les seconds points d'intersection de *1* resp. avec (BC), (CA), (AB)
et	P*	le point de Mathieu associé à P.

Donné : P* est l'isogonal de P.

VISUALISATION



- Notons X le pied de la perpendiculaire abaissée de P* sur (B'C').

- D'après Thalès "Triangle inscriptible dans un demi cercle", **(1)** P*, X, B' et B" sont cocycliques
  (2) P*, X, C' et C" sont cocycliques.

- Notons *2, 3* resp. ces premier et second cercles.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [8], P*, X et A sont alignés.

- **Conclusion partielle :** d'après Vigarié "Isogonale et perpendiculaire" (Cf. Annexe 1),
  (AP*) est la A-isogonale de (AP) de ABC.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que (BP*) est la B-isogonale de (AP) de ABC
  (CP*) est la C-isogonale de (AP) de ABC.

- **Conclusion :** par définition, P* est l'isogonal de P.

Note historique : ce résultat se trouve dans un livre d'Eugène Catalan[9] écrit en 1879.

3. Une très courte note sur J. J. A. Mathieu

Jean-Joseph Auguste Mathieu est né en 1826.
Élève de l'École d'Artillerie de Metz (France) en 1846, il est nommé sous-lieutenant en second le 1-er octobre 1848, puis lieutenant en premier au troisième régiment d'Artillerie de Toulouse le 4 décembre 1851

[8] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G., vol. 6 ; http://perso.orange.fr/jl.ayme.
[9] Catalan E., Théorème 28, *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaire*, 6e édition, Dunod, Paris (1879) 52.

en 1865, le sous-directeur de la fonderie de Toulouse, le commandant d'artillerie Jean-Joseph Auguste Mathieu[10], publiait dans les *Nouvelles Annales mathématiques*, un nouveau mode de transformation baptisé "inversion isogonale". Noyé pour ainsi dire dans son article, cette transformation initialisée "inconsciemment" par Christian von Nagel en 1860, serait passée inaperçue sans les travaux remarquables d'Émile Lemoine et Maurice d'Ocagne sur les symédianes, relayés par le dynamisme incontestable de Joseph Neuberg. C'est pour éviter toute confusion avec le mode de transformation par "rayons vecteurs réciproques", connu encore sous le nom d'inversion, que Neuberg a gommé le mot "inversion" pour n'en retenir que le qualificatif "isogonal".
Dans les *Nouvelles Annales mathématiques* de 1865, Mathieu introduit le terme de "polaire trilinéaire"[11] que Gaston Gohierre de Longchamps nommera "polaire harmonique" dans *Journal de Mathématiques Spéciales* de 1886.
En 1879, le Lieutenant-colonel Mathieu prend la direction de l'École d'artillerie de Toulouse, puis est nommé Contrôleur général de l'administration de l'Armée.
Il décède à Auteuil le 27 novembre 1897.

Remerciements : au phycisien Arjen Dijksman diplômé en 1991 de l'Université de Technologie de Delft (Pays-Bas) pour avoir contribué à cette courte note.

C. UNE PERPENDICULAIRE

À

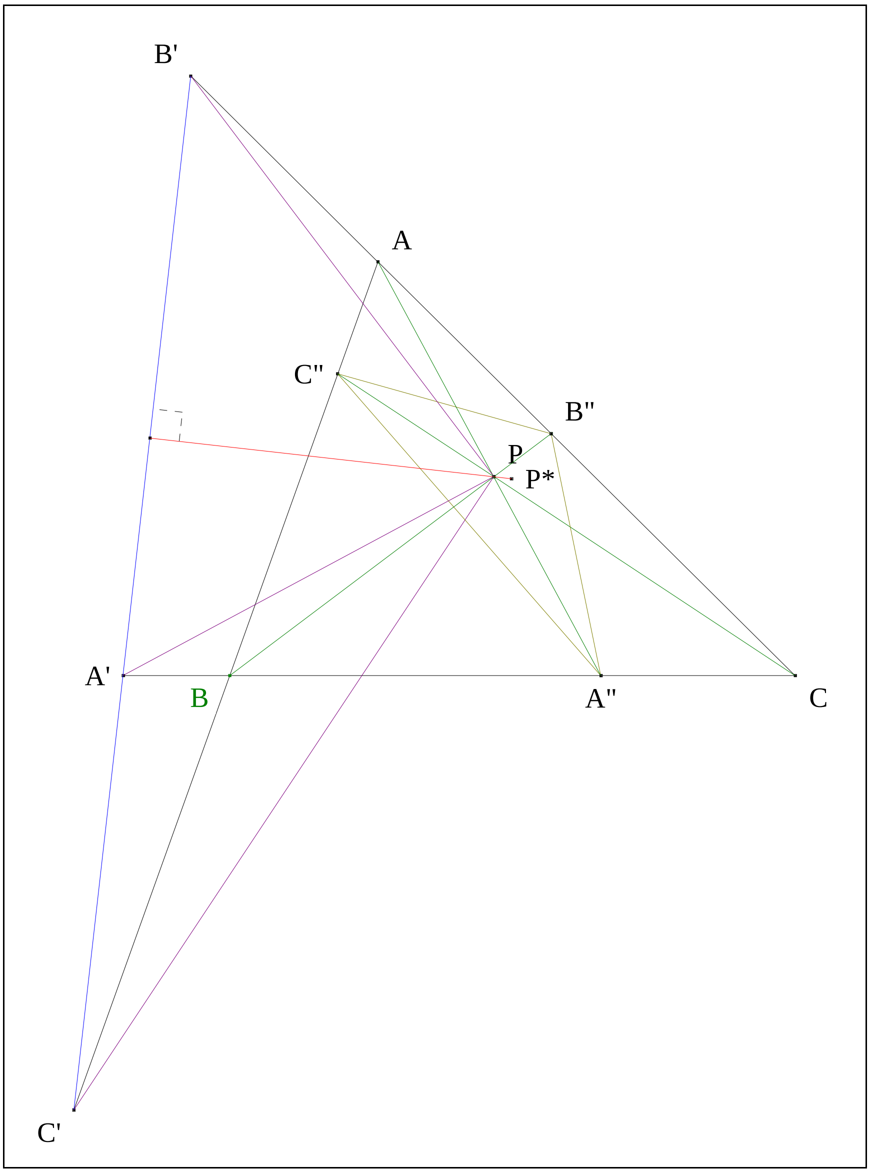
L'ORTHO - TRANSVERSALE

VISION

Figure :

[10] selon l'Annuaire Militaire de 1858, il était capitaine en second au 8-ème régiment-monté de la fonderie de Toulouse depuis le 10 mai 1855 ;
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2081709.image.r=annuaire+militaire.f762.langEN.pagination.

[11] C'est l'axe de la perspective définit par Desargues.



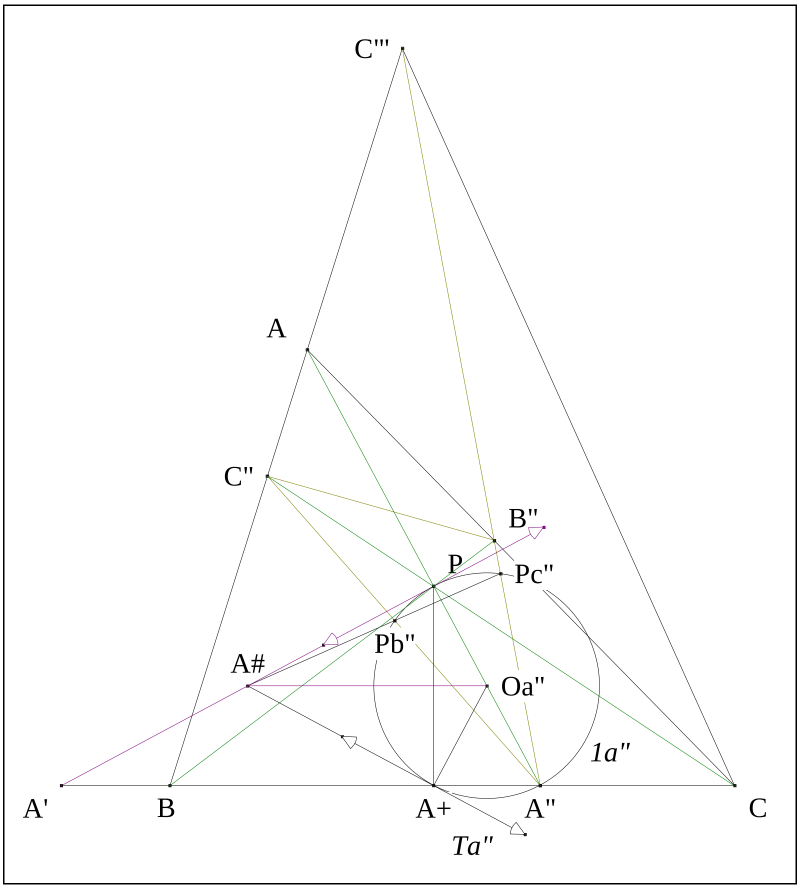
Traits :	ABC	un triangle,
	P	un point,
	(A'B'C')	l'orthotransversale de P relativement à ABC,
	A"B"C"	le triangle P-cévien de ABC
et	P*	l'isogonal de P relativement à A"B"C".

Donné : (PP*) est perpendiculaire à (A'B'C'). [12]

VISUALISATION

Commentaire : l'idée directrice d'une preuve synthétique consiste à penser
en premier au théorème de Sondat qui après étude de la figure par l'auteur s'avère inopérant, et
en second à envisager l'orthotransversale de P comme étant la polaire de P relativement au
P-cercle de Mathieu de A"B"C".

[12] Nguyen K. L., O13, Mathematical Reflections 3 (2006) ; http://reflections.awesomemath.org/ ;
Isogonal conjugate and perpendicularity, *Mathlinks* du 08/08/2006 ;
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=105611.



• Notons	C'''	le point d'intersection de (AB) et (A"B"),
	Pb", Pc"	les pieds des perpendiculaires abaissées de P resp. sur (C"A"), (A"B"),
	1a"	le cercle de diamètre [A"P] ; il passe par Pb", Pc" et est tangent à (A'P) en P ;
	Oa"	le centre de *1a"*,
	A+	le second point d'intersection de (A"B) avec *1a"*,
	Ta+	la tangente à *1a"* en A+
et	A#	le point d'intersection de *Ta"* et (A'P).

- Une chasse "harmonique" :

d'après Pappus "Diagonales d'un quadrilatère complet" (Cf. Annexe 2)
appliqué au quadrilatère complet CC"PA", le pinceau (C ; A, B, C", C''') est harmonique **(1)**

par changement d'origine, le pinceau (A" ; A, B, C", C''') est harmonique **(2)**

par restriction à *1a"*, le pinceau (A" ; P, A+, Pb", Pc") est harmonique **(3)**

par changement d'origine sur *1a"*, le pinceau (A+ ; P, A#, Pb", Pc") est harmonique **(4)**

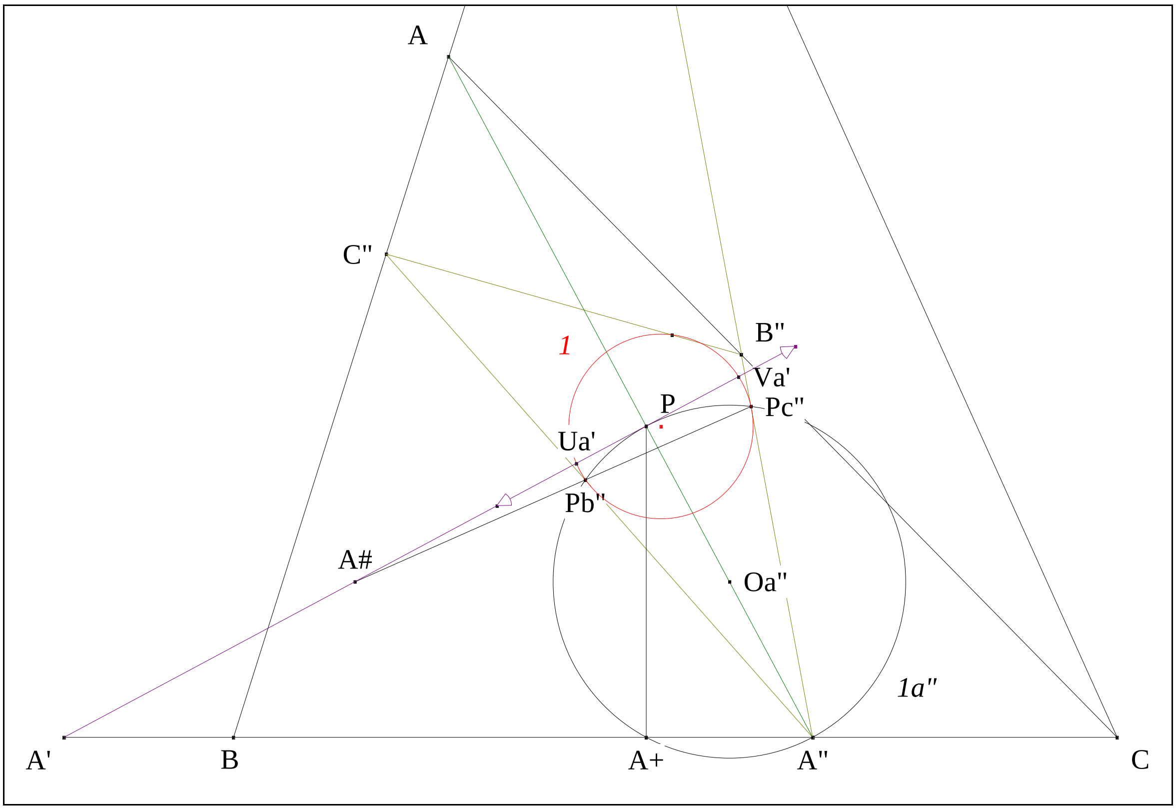
par perpendicularité par rapport au pinceau **(3)**, le pinceau (P ; A', A+, Pb", Pc") est harmonique **(5)**

par permutation des deux premiers points le pinceau (P ; A+, A', Pb", Pc") est harmonique **(6)**

les pinceaux **(4)** et **(6)** ayant le rayon (A"A) en commun, A#, Pb" et Pc" sont alignés.

- D'après le théorème de la médiatrice, (Oa"A#) est la médiatrice de [PA+].

- D'après Thalès "La droite des milieux"
appliqué au triangle PA'A", A# est le milieu de [PA'].



- Notons 1 le P-cercle de Mathieu relativement à A"B"C" ; il passe par Pb" et Pc" ;
  Ua', Va' les points d'intersection de (A'P) avec 1,
  P_1(A#) la puissance de A# par rapport à 1
  et $P_{1a''}$(A#) la puissance de A# par rapport à $1a''$.

- Une chasse "potentielle" avec des mesures algébriques :

  A# étant le milieu de [PA'], A#P ² = A#A' ² ;

  par rapport à $1a''$, $P_{1a''}$ (A#) = A#P ² = A#Pb" . A#Pc" ;

  par rapport à 1, P_1(A#) = A#Pb" . A#Pc" = A#Ua' . A#Va' ;

  nous avons la relation de MacLaurin : A#P ² = A#A' ² = A#Ua' . A#Va'

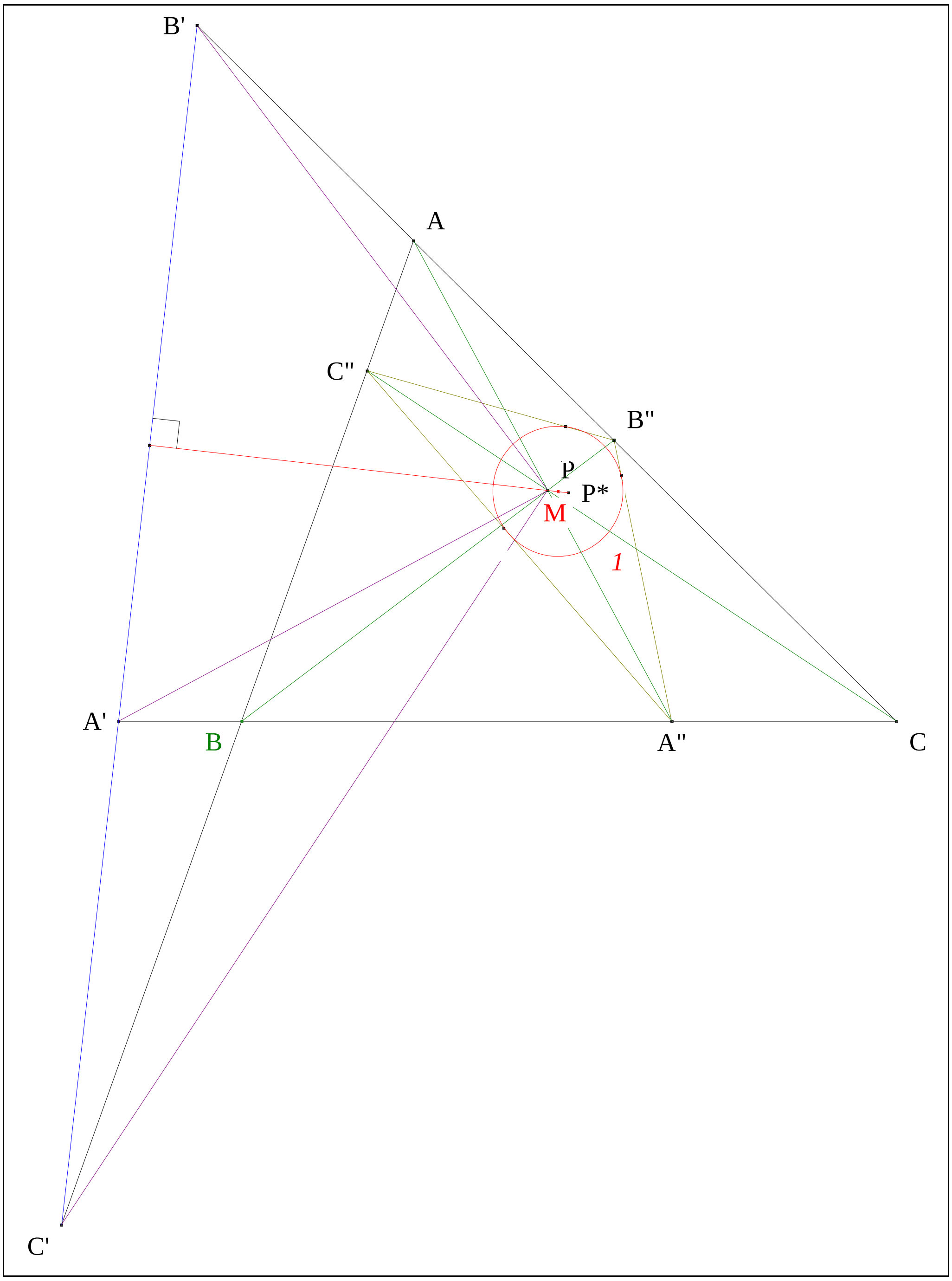
- **Conclusion partielle :** la quaterne (A', P, Ua', Va') est harmonique.

- Notons Ub', Vb' les points d'intersection de (B'P) avec 1
  et Uc', Vc' les points d'intersection de (C'P) avec 1.

- Mutatis mutandis, nous montrerions que la quaterne (B', P, Ub', Vb') est harmonique
  la quaterne (C', P, Uc', Vc') est harmonique.

- **Conclusion partielle :** (A'B'C') est la polaire de P relativement à 1.

Commentaire : cette approche permet au passage de montrer que A', B' et C' sont alignés.



- Notons M le centre de *1*.

- **Scolies :** **(1)** (MP) est perpendiculaire à (A'B'C')
  (2) M est le milieu de [PP*].

- **Conclusion :** (PP*) est perpendiculaire à (A'B'C').

Note historique : rappelons que l'auteur de ce problème Khoa Lu Nguyen plus connu sous le pseudonyme de *treegonner* sur le site site *Mathlins* actuellement *Art of Problem Solving* était en 2006, un élève de la Sam Houston High School de Houston (Texas, États-unis). Sa preuve[13] analogue à la précédente, a été publiée en 2006 dans la revue *Mathematical Reflections*. Ce problème qui a aussi été résolu par Ivan Borsenco, a été

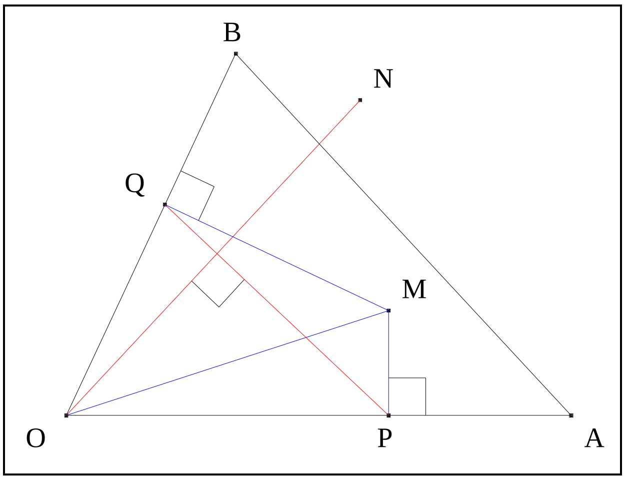
---

[13] Nguyen K. L., O13, Mathematical Reflections 4 (2006) ; http://reflections.awesomemath.org/ ;

reproposé au "first exam Koree M.O. Winter school'" comme l'a indiqué SooHong Lee[14] en 2007.

D. ANNEXE

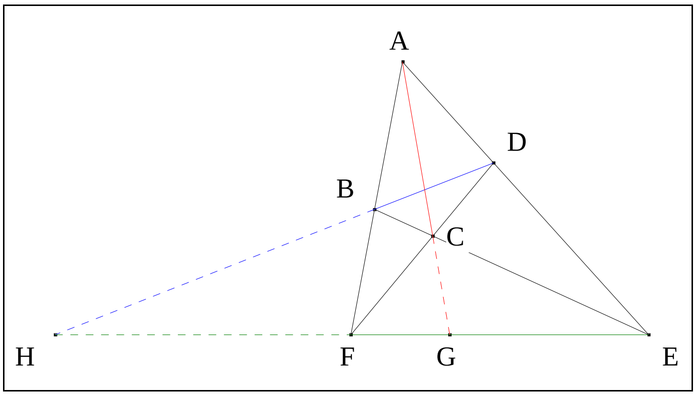
1. Isogonale et perpendiculaire [15]



Traits : OAB un triangle,
M un point,
P, Q les pieds des perpendiculaires abaissées de M resp. sur (OA) et (OB),
et N un point.

Donné : (ON) est l'isogonale de (OM) par rapport à (OA) et (OB)
si, et seulement si,
(ON) est perpendiculaire à (PQ).

2. Diagonales d'un quadrilatère complet [16]



Traits : ABCD un quadrilatère,
E, F les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), de (AB) et (CD),

[14] Property about orthotransversal, Message *Hyacinthos* #14846 du 08/02/2007 ; http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/14846.
[15] Vigarié E., *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1885) 33-.
[16] Pappus, *Collections*, Livre 7, proposition 131.

et G, H le point d'intersection resp. de (AC) et (EF), de (BD) et (EF).

Donné : la quaterne (E, F, G, H) est harmonique.