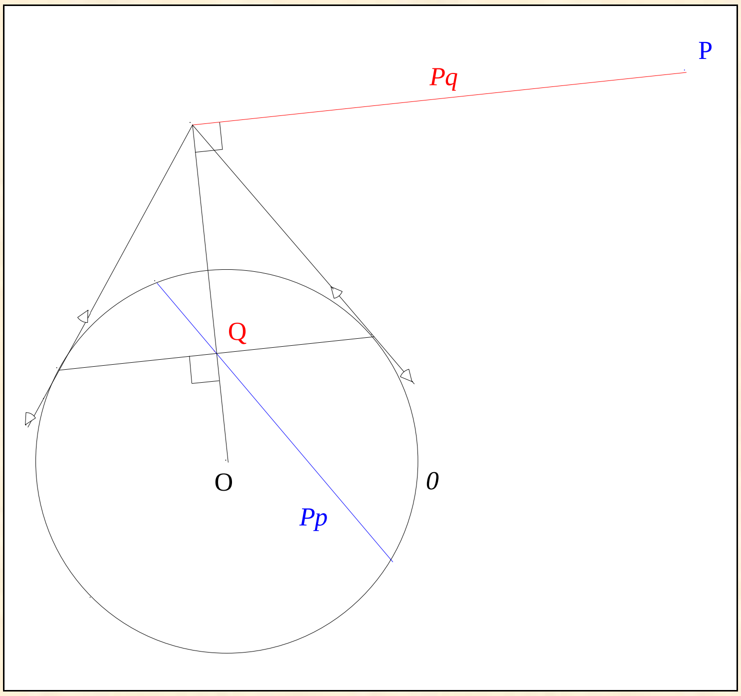
LA RÉCIPROCITÉ POLAIRE

DE

PHILIPPE DE LA HIRE

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente le résultat fondamental de Philippe de La Hire connu sous le nom de *Réciprocité polaire* ainsi que des archives s'y référant.
Les figures sont toutes en position générale et tous les théorèmes cités peuvent tous être démontrés synthétiquement.

Abstract. The author presents the fundamental result of Philippe de La Hire known as *Polar reciprocity* as well as referring to archives.
The figures are all in general position and all cited theorems can all be shown synthetically.

---

[1] Saint-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 24/12/2012.

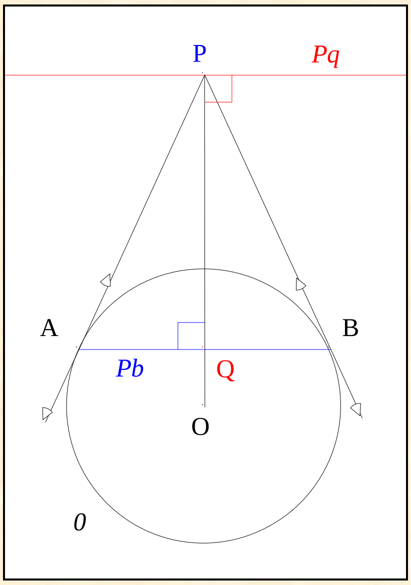
Sommaire

A. INTRODUCTION

1. Définitions

VISION

Figure



Finition : *0* un cercle,
O le centre de *0*,
P un point extérieur à *0*,
A, B les points de contact des tangentes à *0* issues de P,
Pp la droite (AB),
Q le point d'intersection de *Pp* et (OP),
et *Pq* la perpendiculaire à (OP) en P.

Définitions : **(1)** *Pp* est la polaire de P et P est le pôle de *Pp*
(2) *Pq* est la polaire de Q et Q est le pôle de *Pq*.

Énoncé traditionnel : chaque point du plan a une polaire relativement à un cercle
et
chaque droite du plan a un pôle, exceptée les droites passant par le centre du cercle.

Remarques :

(1) *si,* le pôle est à l'intérieur du cercle *alors,* sa polaire est à l'extérieure du cercle

(2) *si,* le pôle est à l'extérieur du cercle *alors,* sa polaire est sécante au cercle.

Cas particulier : la polaire d'un point d'un cercle est la tangente à ce cercle en ce point
et
le pôle d'une tangente est son point de contact.

Extension : la polaire du centre d'un cercle est la droite à l'infini
et
le pôle de la droite à l'infini est le centre du cercle.

2. Un peu d'histoire

Dans leur volonté de reproduire le réel et d'imiter la nature, les peintres grecs ont tenté sans succès de donner l'illusion de la profondeur dans leurs tableaux. Cette impossibilité opératoire était dû à une méconnaissance des règles de la perspective qui leurs auraient permis, de dessiner, entre autre, une rangée d'arbres disparaissant à l'horizon.
C'est au XIVème siècle que l'architecte florentin Filippo Brunelleschi (1377-1346) a découvert les lois de la perspective fuyante [2] que l'architecte italien Léon Battista Alberti (1404-1492) expose au siècle suivant, dans son *Della pittura*.

Cette perspective aboutit à une représentation plane de l'espace observé par un seul œil et son protocole met en place le dispositif du peintre et graveur allemand Albrecht Dürer (1471-1538) i.e.

* le point de vue, sommet du cône visuel, identifié à l'œil,

* la table [3] sur laquelle repose le sujet à dessiner

[2] Cette perspective conique est plus réaliste que la cavalière où l'œil de l'observateur est à l'infini
[3] Le plan horizontal de référence

* la fenêtre [4] au travers de laquelle l'œil explore l'espace du sujet pour le dessiner "projectivement" de manière à avoir la même image sur le tableau.

L'intersection de ces deux plans orthogonaux conduit à la ligne de terre [5], et l'intersection du plan horizontal passant par l'œil avec le plan du tableau, à la ligne d'horizon.

En participant à l'Académie du Père Marin Mersenne, l'ingénieur et architecte Girard Desargues (1591-1661) alias S.G.D.L. (le Sieur Girard Desargues Lyonnois), entre contact avec Descartes en 1638, Etienne Pascal et son fils Blaise en 1639, Pierre de Fermat auxquels il leurs expose un point de vue novateur sur la Géométrie appelé "Géométrie projective" ou encore "moderne".
En 1636, Girard Desargues publie son *Brouillon project des Atteintes aux Evénements des rencontres du cône avec un plan* dans lequel il précise que des droites parallèles sur "la table" deviennent en perspective sur "le tableau", des droites

* concourantes sur la ligne d'horizon [6] en un "point de fuite" [7] associé à leur direction
  si elles ne sont pas parallèles au plan du tableau

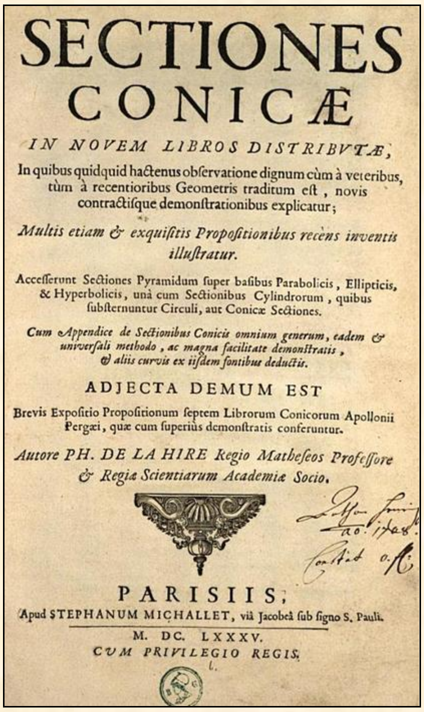
* sinon, parallèles.

De même, des droites concourantes sur "la table" deviennent en perspective sur "le tableau" des droites concourantes ou parallèles suivant que la droite joignant l'œil au point de concours de ces droites, rencontre ou non le plan du tableau.
Ainsi, en s'appuyant sur des considérations de perspective, Girard Desargues osait affirmer que deux droites avaient un point commun à l'infini et que, dans un plan, ces points à l'infini appartenaient à une droite.
Dans sa démarche, Girard Desargues a été le premier avec "la perspective" à mettre en évidence cette 'fusion" en étudiant les coniques comme perspective de cercles, puis en démontrant que certaines propriétés planes sont des conséquences de propriété spatiales.

En 1648, le fameux graveur et passionné de perspective, Abraham Bosse (1602-1676) publie un traité de *Perspective et de la Coupe des pierres* dans lequel se trouve, en appendice, le fameux théorème de Desargues concernant deux triangles en perspective.

Girard Desargues qui avait formé tout une pléiade d'élèves n'eut guère, en dehors d'Abraham Bosse et de quelques autres peintres et architectes, que deux disciples : Blaise Pascal (1623-1662) et Philippe de La Hire.

[4] Le plan vertical, le tableau, la vitre transparente, la paroi de verre situé entre l'œil et le sujet
[5] Axe de la perspective
[6] Droite à l'infini
[7] Point d'un dessin en perspective où convergent des droites parallèles dans la réalité


SECTIONES
CONICÆ
IN NOVEM LIBROS DISTRIBVTÆ,
In quibus quidquid hactenus observatione dignum cùm à veteribus, tùm à recentioribus Geometris traditum est, novis contractisque demonstrationibus explicatur;
Multis etiam & exquisitis Propositionibus recèns inventis illustratur.
Accesserunt Sectiones Pyramidum super basibus Parabolicis, Ellipticis, & Hyperbolicis, unà cum Sectionibus Cylindrorum, quibus substernuntur Circuli, aut Conicæ Sectiones.
Cum Appendice de Sectionibus Conicis omnium generum, eadem & universali methodo, ac magna facilitate demonstratis, & aliis curvis ex iisdem fontibus deductis.
ADJECTA DEMUM EST
Brevis Expositio Propositionum septem Librorum Conicorum Apollonii Pergæi, quæ cum superiùs demonstratis conferuntur.
Autore PH. DE LA HIRE Regio Matheseos Professore & Regiæ Scientiarum Academiæ Socio.
PARISIIS,
Apud STEPHANUM MICHALLET, viâ Jacobeâ sub signo S. Pauli.
M. DC. LXXXV.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

En 1685, Philippe de La Hire publie *Sectiones conicœ in novem libros distributœ* [8] en 9 livres qui aura une grande réputation dans l' Europe savante.
Il innove par rapport à ses deux devanciers en exploitant au maximum les propriétés d'invariance de la division harmonique que Pappus qualifiait d'*harmoniquement coupé*. Cette approche lui permet de raisonner presque uniquement dans le plan (et non dans l'espace). Sa démarche revient à faire déduire les propriétés projectives d'une conique quelconque de l'espace située sur un cône à base circulaire des propriétés du cercle de base, en passant par l'intermédiaire de la projection de la section sur le plan de base. Cette approche utilise donc les propriétés de la projection cylindrique (pour le passage de la courbe de l'espace à sa projection) et de l'homologie (pour le passage de la conique, projection au cercle de base). Dans le premier livre, Philippe de La Hire présente les notions de pôles et polaires par rapport à un cercle ainsi que le germe de réciprocité, et ce sans utiliser les mots pôle et polaire.

C'est François Joseph Servois [9] (1768-1847) qui introduit en 1810 le mot "pôle" (du verbe grec signifiant tourner) et Joseph Diaz Gergonne [10] le mot "polaire" en 1812.

Les notions de pôles et de polaires, de réciprocité polaire seront perfectionnées sous le terme de "dualité" par Gaspard Monge, Charles-Julien Brianchon [11] (théorème correspondant de l'hexagramme de Pascal) et Jean-Victor Poncelet [12] (dénomination de polaires réciproques) au siècle suivant.

3. Archives

---

[8] http://en.wikisource.7val.com/wiki/Author:Philippe_de_la_Hire

[9] Servois F. J., Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 259 de ce volume, et du problème proposé à la page 126 du même volume, *Annales* de Gergonne, vol. **1** (1810-1811) 337-341 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA

[10] Gergonne J., Géométrie analitique. Théorie analitique des pôles des lignes et des surfaces du second ordre, *Annales* de Gergonne **III** (1812-1813) 297 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA

[11] Brianchon C.-J., *Journal* de l'École polytechnique, Cahier **XIII** (1806) 297

[12] Poncelet J.-V., Traité des propriétés projectives (1822) 121

Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 259 de ce volume, et du problème proposé à la page 126 du même volume ;

Par M. Servois, professeur de mathématiques à l'école d'artillerie de Lafère.

Une droite et une ligne du second ordre étant assignées, j'appelle *pôle* de la droite, le point du plan de cette droite et de la courbe autour duquel tournent toutes les cordes des points de contact des paires de tangentes à la courbe issues des différens points de la droite : tels sont, par exemple, les points désignés par α et β (page 127).

Il est aisé de voir qu'*avec la règle seule* on peut facilement trouver le pôle d'une droite. Soit en effet AB (fig. 2) une droite située sur le plan de la ligne du second degré DGFE ; par un quelconque C des points de AB soient menées les deux sécantes CGD et CFE ; soit I le point de concours de GF et DE ; soit H celui de DF et EG et soit menée IH. En variant la position du point C sur AB, et répétant la même construction, on obtiendra une nouvelle droite IH dont l'intersection avec la première sera le pôle cherché.

Tom. I. 46

[13]

ET SURFACES DU SECOND ORDRE. 297

THÉORÈME. Si, par un point pris arbitrairement sur le plan d'une ligne du second ordre, on mène à cette courbe une suite de sécantes ; et que, par les deux points d'intersection de chacune d'elles avec la courbe, on mène à cette même courbe deux tangentes, terminées à leur point de concours, les tangentes de mêmes couples formeront une suite d'angles circonscrits dont les sommets seront tous sur une même ligne droite.

De même que, le point (P) étant donné arbitrairement, on peut toujours déterminer une droite (Q) qui ait avec lui la relation exprimée par ce théorème ; on peut réciproquement, lorsque c'est la droite (Q) qui est donnée, déterminer un point (P) qui soit lié avec elle par une semblable relation ; il ne s'agit, en effet, pour cela, que de considérer comme inconnues, dans l'équation de la droite (Q), les coordonnées g et h du point (P), et de les déterminer en exprimant que cette équation est identique avec celle de la droite donnée.

De là résulte le théorème suivant, inverse du premier :

THÉORÈME. Si l'on circonscrit à une ligne du second ordre une suite d'angles dont les sommets soient tous sur une même droite, située comme on le voudra sur le plan de la courbe ; les sécantes menées à la courbe, par les points de contact des côtés de ces angles avec elle, concourront toutes en un même point. (*)

A cause de la relation qui existe entre le point (P) et la droite (Q), ce point a été appelé le *Pôle* de cette droite ; et on peut, à l'inverse, appeler la doite (Q) la *Polaire* du point (P). (**)

[14]

[13] Servois F. J., Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 259 de ce volume, et du problème proposé à la page 126 du même volume, *Annales* de Gergonne, vol. **1** (1810-1811) 337-341 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA

[14] Gergonne J., Géométrie analitique. Théorie analitique des pôles des lignes et des surfaces du second ordre, *Annales* de Gergonne **III** (1812-1813) 297 ; http://www.numdam.org/numdam-bin/feuilleter?j=AMPA

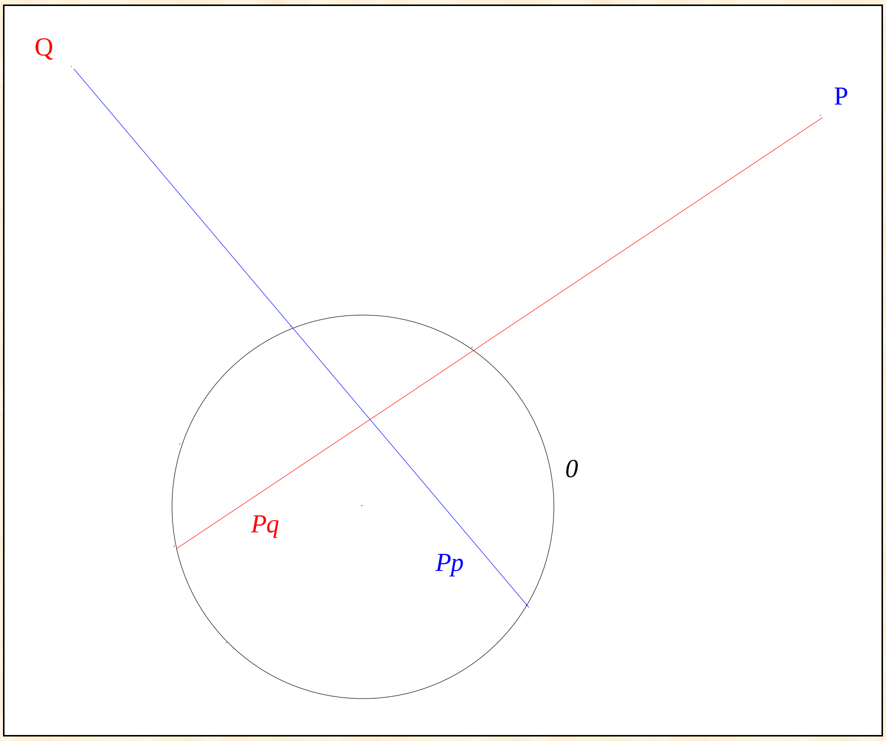
B. RÉCIPROCITÉ POLAIRE

P est sur la polaire de Q *si, et seulement si,* Q est sur la polaire de P.

1. Premier cas : P extérieur, Q extérieur

VISION

Figure :

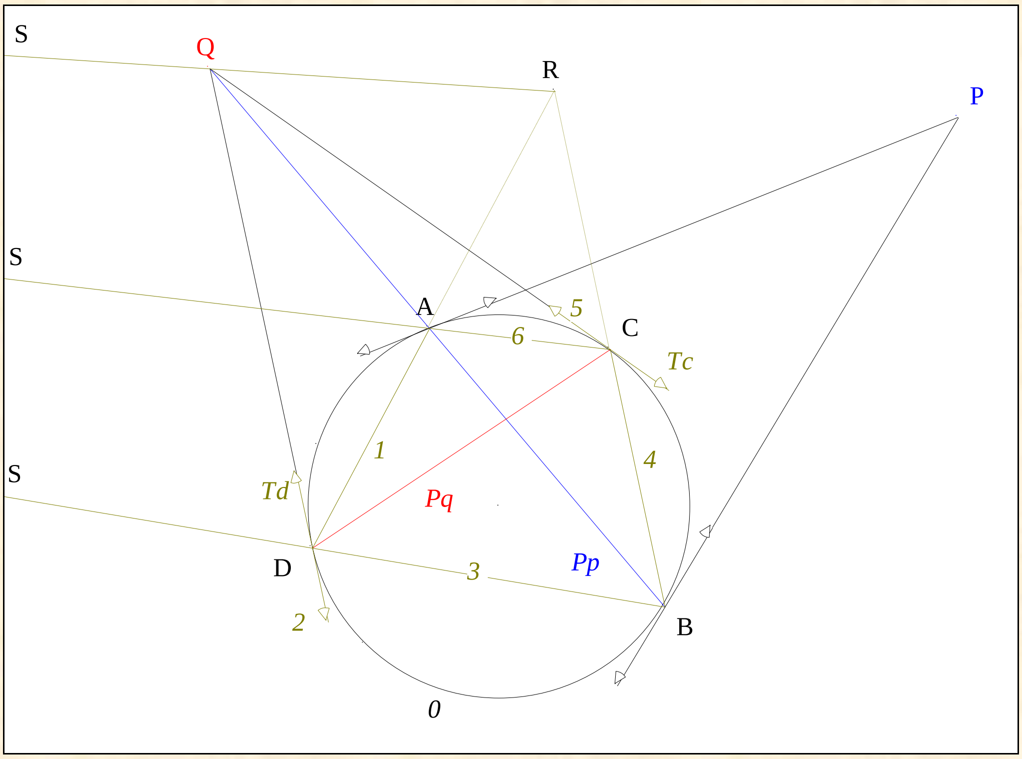


Traits :

	0	un cercle,
	P	un point extérieur à *0*,
	Pp	la polaire de P relativement à *0*,
	Q	un point extérieur à *0*
et	*Pq*	la polaire de Q relativement à *0*.

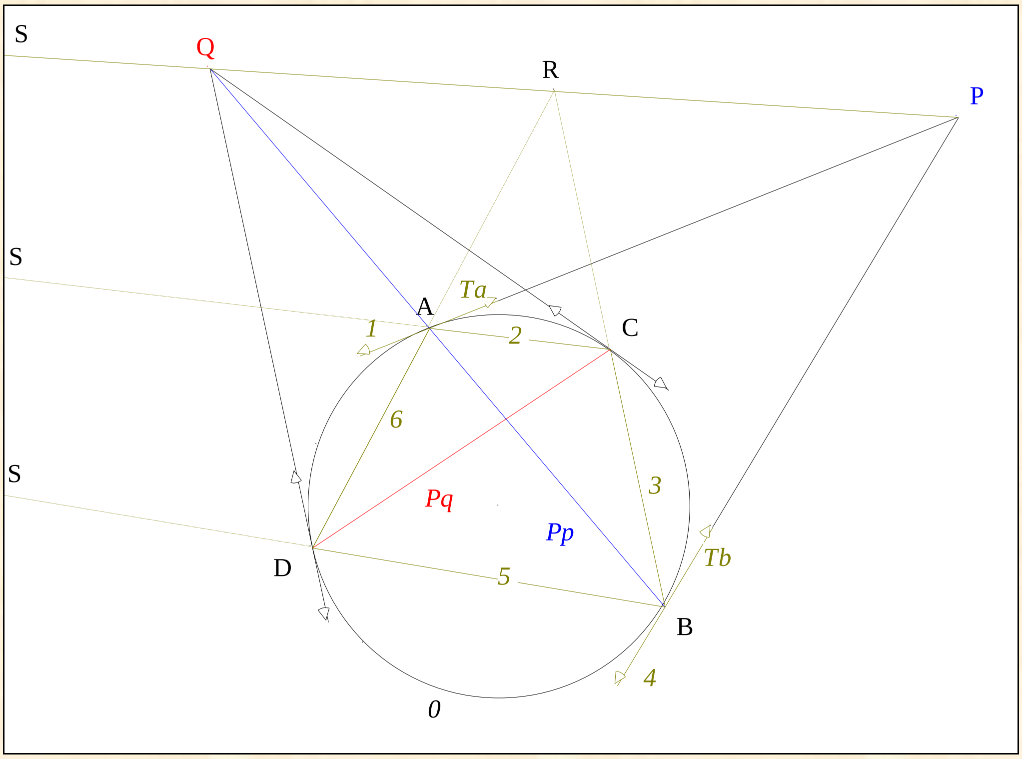
Donné : Q est sur *Pp* *si, et seulement si,* P est sur *Pq*.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons A, B les points d'intersection de *Pp* avec *0*,
  C, D les points d'intersection de *Pq* avec *0*,
  R, S les points d'intersection resp. de (AD) et (BC), (AC) et (BD)
  et *Tc*, *Td* les tangentes à *0* resp. en C, D.

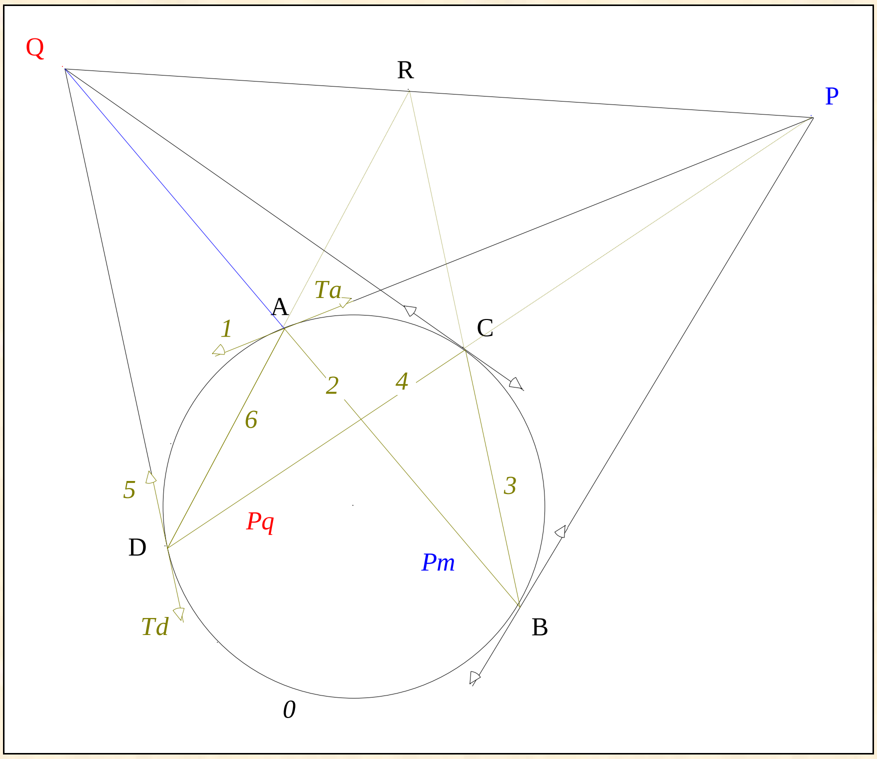
- D'après MacLaurin "Tetragramma mysticum",
  (RQS) est la pascale de l'hexagone cyclique dégénéré AD *Td* BC *Tc* A.



- Notons *Ta*, *Tb* les tangentes à *0* resp. en A, B.

- D'après MacLaurin "Tetragramma mysticum",
  (PSR) est la pascale de l'hexagone cyclique dégénéré *Ta* CB *Tb* DA.

- **Conclusion partielle :** d'après l'axiome d'incidence Ia, P, Q, R et S sont alignés.



- **Conclusion :** d'après MacLaurin "Tetragramma mysticum",
  (PQR) étant la pascale de l'hexagone cyclique dégénéré *Ta* BCD *Td* A,
  (CD) i.e. P est sur *Pq*.

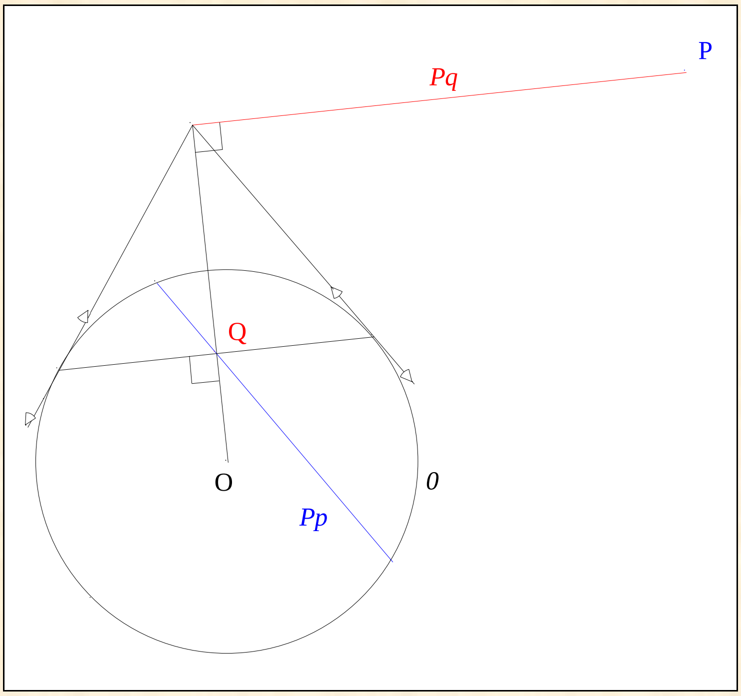
VISUALISATION SUFFISANTE

Elle procède de la même démarche.

2. Deuxième cas : P extérieur, Q intérieur

VISION

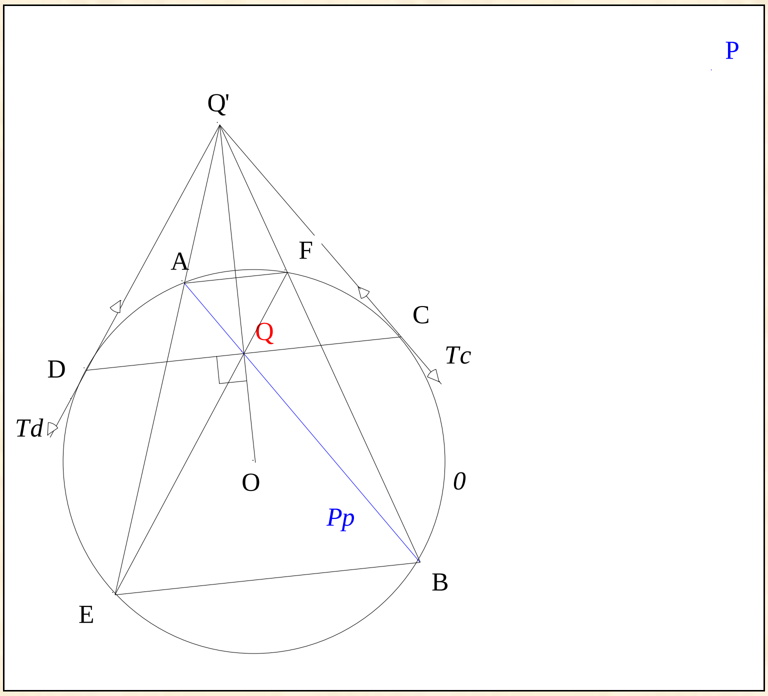
Figure :



Traits :	*0*	un cercle,
	O	le centre de *0*,
	P	un point extérieur à *0*,
	Pp	la polaire de P relativement à *0*,
	Q	un point intérieur à *0*
et	*Pq*	la polaire de Q relativement à *0*.

Donné : Q est sur *Pp* *si, et seulement si,* P est sur *Pq*.

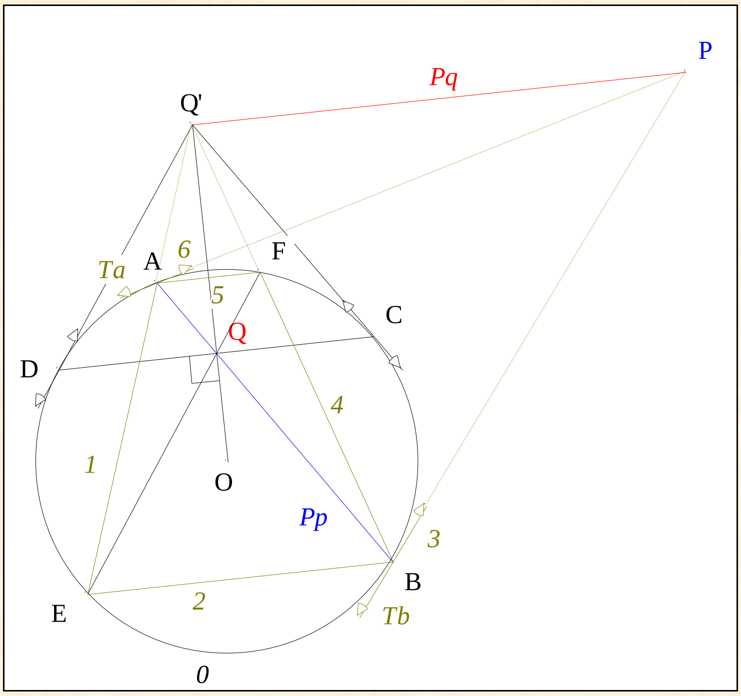
VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons A, B les points d'intersection de *Pp* avec *0*,
  C, D les points d'intersection de la perpendiculaire à (OQ) en Q avec *0*,
  Tc, *Td* les tangentes à *0* resp. en C, D,
  Q' le point d'intersection de *Tc* et *Td*,
  et E, F les points d'intersection resp. de (Q'A), (Q'B) avec *0*.

- **Scolie :** Q est le milieu de [CD].

- D'après "Un lemme" (Cf. Appendice **1**), (AF), (BE) et (CD) sont parallèles entre elles.



- Notons *Ta*, *Tb* les tangentes à *0* resp. en A, B.

- D'après MacLaurin "Tetragramma mysticum",

appliqué à l'hexagone cyclique dégénéré AEB *Tb* FA *Ta*, **(1)** (Q'P) est la pascale
(2) (Q'P) // (CD).

- Nous avons : (Q'P) // (CD) ;
  par hypothèse, (CD) $\perp$ (OQ') ;
  en conséquence, (Q'P) $\perp$ (OQ') i.e. *Pq* $\perp$ (OQ').

- **Conclusion :** P est sur *Pq*.

Énoncé traditionnel :

si, *autour d'un point fixe on fait tourner une transversale*
qui rencontre un cercle en deux points
alors, *les tangentes en ces points se croiseront toujours sur une même droite.*

Archive :

PROPOSITIO XXVII.

In figur. propos. 26æ. *Si in circulo per punctum* O *quod non sit centrum ducantur quotlibet rectæ* FG, ED, HI *ad circulum terminatæ, per puncta* E, D *ductis contingentibus* EV, DV *sibi invicem occurrentibus in* V ; *per puncta* F, G, *contingentibus*, FA, GA *in* A *punctum incurrentibus, per puncta* H, I *contingentibus* HB, IB *in* B *punctum incidentibus.*

Dico puncta VAB *esse in eadem recta linea.*

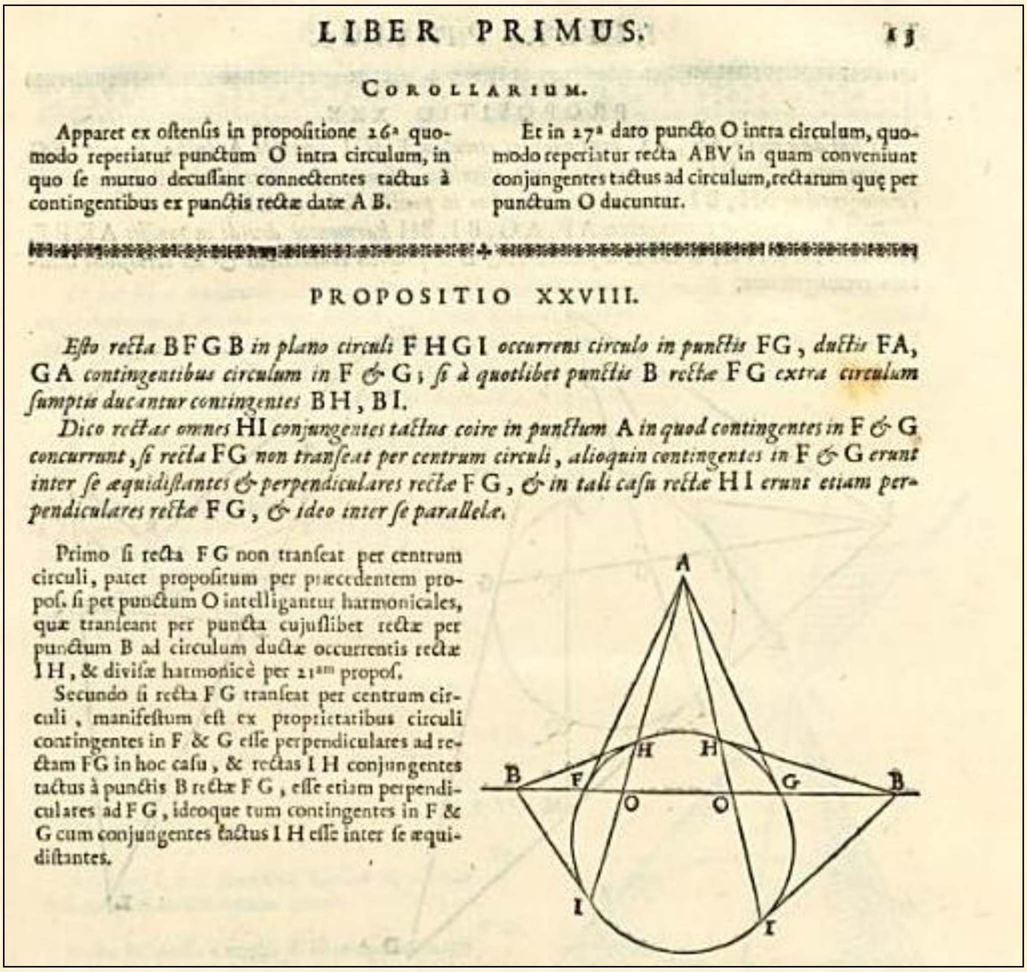
Per punctum O esto diameter circuli MON producta extra circulum ad A in quod concurrunt contingentes FA, GA per extrema puncta FG rectæ FOG, unde ex proprietatibus circuli sequitur necessariò rectam FG ad diametrum MA in rectis angulis positam esse, sitque recta *v* A perpendicularis ad MA, quod primo poni poterit, superest ut ostendamus punctum V, in quod concurrunt rectæ contingentes EV, DV, in recta *v* A positum esse.

Per puncta VO agatur recta VO occurrens circulo in L & K & rectæ A*v* in *v* : per 21am propos. recta VL dividitur harmonicè in punctis VKOL ; sed per coroll. propos. 25æ recta *v*L dividitur etiam harmonicè in punctis *v* KOL, quare per 10am propos. puncta *v* V coincidunt in recta *v* A.

Idem erit de puncto B, & de quocunque alio, quare patet propositum.

Si recta MN per punctum O ducta sit diameter circuli, tunc contingentes in M & N non sibi incurrent, sed utraque erit æquidistans rectæ *v* A, quod ex natura circuli manifestum est.

COROLL.



15

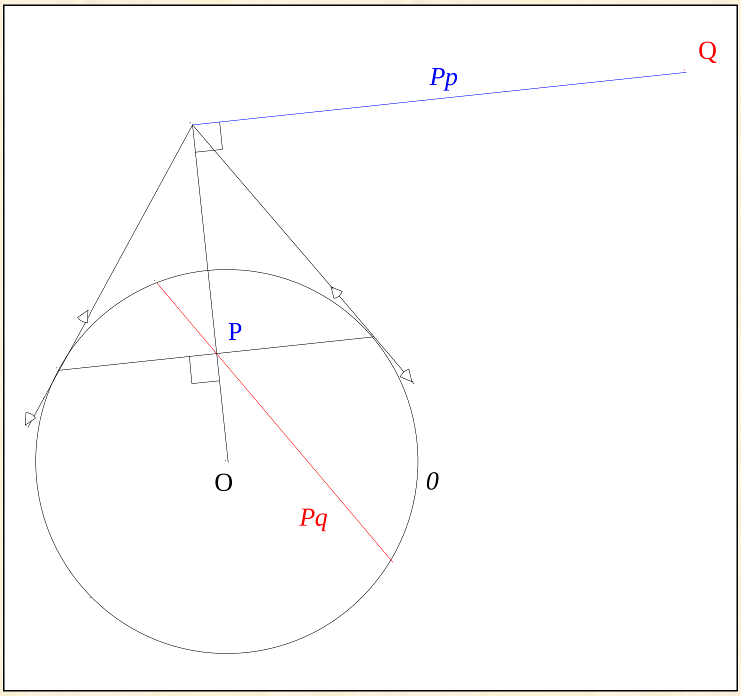
VISUALISATION SUFFISANTE (Cf. **B. 3.** Troisième cas)

3. Troisième cas : **P intérieur, Q extérieur**

VISION

Figure :

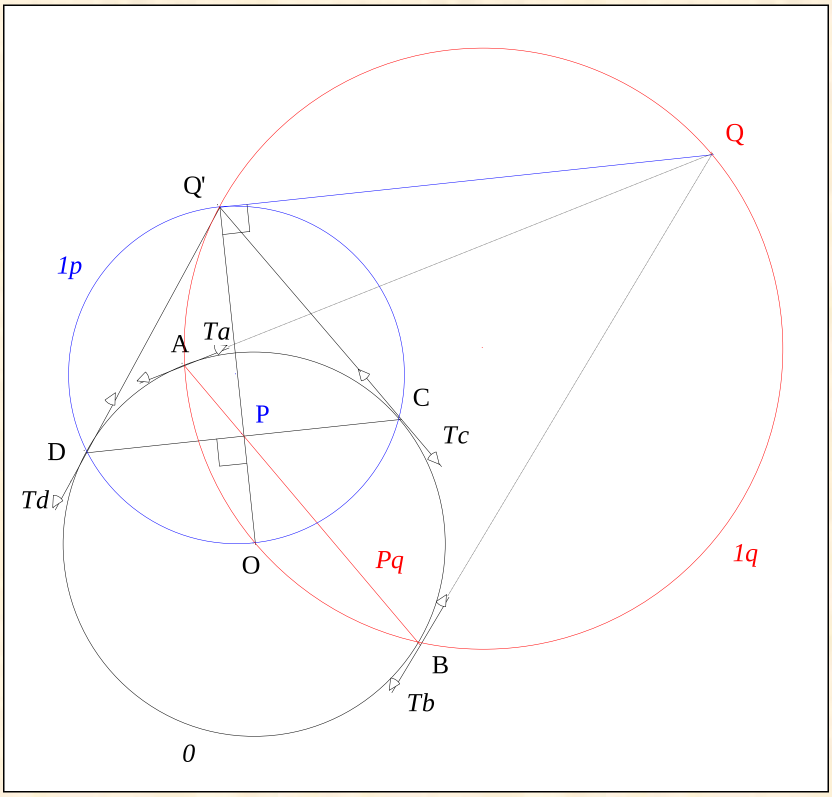
[15] *Sectiones conicae*, Livre **I** ; http://en.wikisource.7val.com/wiki/Author:Philippe_de_la_Hire



Traits : *0* un cercle,
O le centre de *0*,
P un point intérieur à *0*,
Pp la polaire de P relativement à *0*,
Q un point extérieur à *0*
et *Pq* la polaire de Q relativement à *0*.

Donné : Q est sur *Pp* *si, et seulement si,* P est sur *Pq*.

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons A, B les points d'intersection de *Pp* avec *0*,
  C, D les points d'intersection de la perpendiculaire à (OQ) avec *0*,
  Tc, *Td* les tangentes à *0* resp. en C, D,
  Q' le point d'intersection de *Tc* et *Td*,
  1p le cercle de diamètre [OQ'] ; il passe par C et D ;
  et *1q* le cercle de diamètre [OQ] ; il passe par A, B et Q'.

- D'après Monge "Le théorème des trois cordes" [16],
  appliqué aux cercles *0*, *1p* et *1q*, les cordes [CD], [OQ'] et [AB] sont concourantes en P.

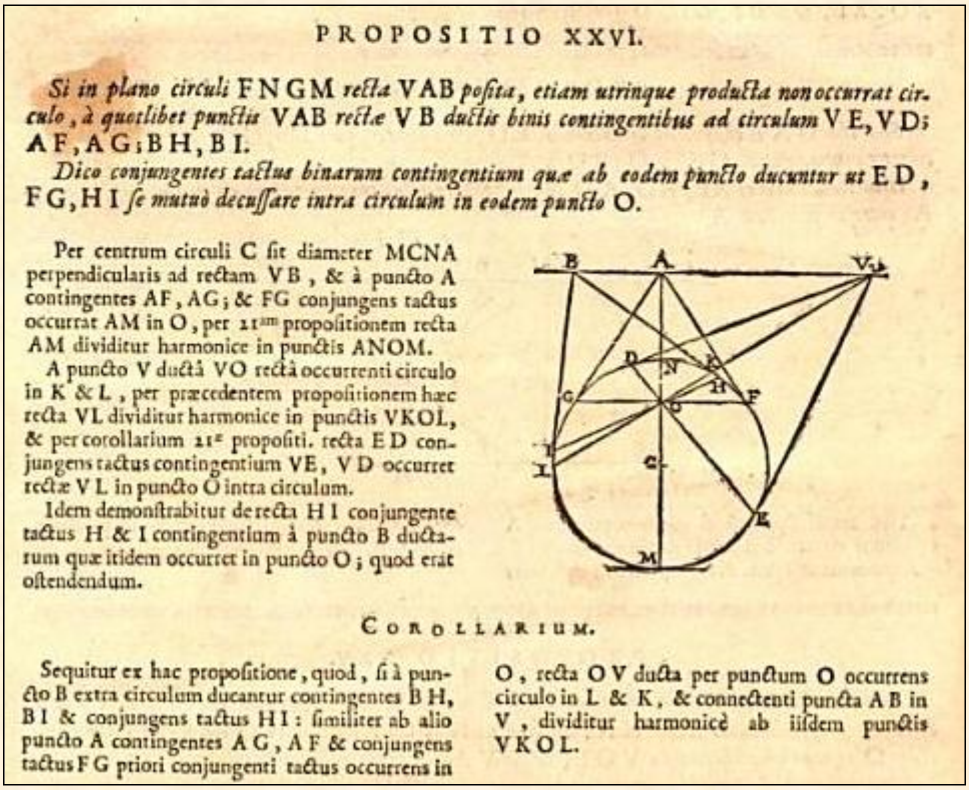
- **Conclusion :** P est sur *Pq*.

Énoncé traditionnel :

si, *de chaque point d'une droite on mène deux tangentes à un cercle,*
alors, *la droite qui joindra les deux points de contact passera par un point fixe*.

Archive :

[16] Ayme J.-L., Le théorème des trois cordes, G.G.G. vol. **6** ; http://perso.orange.fr/jl.ayme



PROPOSITIO XXVI.

Si in plano circuli FNGM *recta* VAB *posita, etiam utrinque producta non occurrat circulo, à quotlibet punctis* VAB *rectæ* VB *ductis binis contingentibus ad circulum* VE, VD; AF, AG; BH, BI.

Dico conjungentes tactus binarum contingentium quæ ab eodem puncto ducuntur ut ED, FG, HI *se mutuò decussare intra circulum in eodem puncto* O.

Per centrum circuli C sit diameter MCNA perpendicularis ad rectam VB, & à puncto A contingentes AF, AG; & FG conjungens tactus occurrat AM in O, per 21am propositionem recta AM dividitur harmonice in punctis ANOM.

A puncto V ductâ VO rectâ occurrenti circulo in K & L, per præcedentem propositionem hæc recta VL dividitur harmonice in punctis VKOL, & per corollarium 21æ propositi. recta ED conjungens tactus contingentium VE, VD occurret rectæ VL in puncto O intra circulum.

Idem demonstrabitur de recta HI conjungente tactus H & I contingentium à puncto B ductarum quæ itidem occurret in puncto O; quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Sequitur ex hac propositione, quod, si à puncto B extra circulum ducantur contingentes BH, BI & conjungens tactus HI: similiter ab alio puncto A contingentes AG, AF & conjungens tactus FG priori conjungenti tactus occurrens in O, recta OV ducta per punctum O occurrens circulo in L & K, & connectenti puncta AB in V, dividitur harmonicè ab iisdem punctis VKOL.

17

VISUALISATION SUFFISANTE (Cf. **B. 2.** Deuxième cas)

4. Une courte biographie de Philippe de La Hire

18

17 http://en.wikisource.7val.com/wiki/Author:Philippe_de_la_Hire

Philippe de La Hire est né le 18 mars 1640 à Paris (France).
Fils du talentueux et réputé peintre Laurent de La Hyre (1606-1656) à qui l'on doit le tableau de *Saint François* et *La descente de croix* (Musée du Louvre), et de Marguerite Coquin, Philippe découvre très jeune, le *Brouillon projet* de l'architecte Desargues, qu'il recopie en le lisant. Sa rencontre avec Desargues s'est produite dans l'une des deux maisons de ses parents à Paris, l'une dans la rue Montmartre avec quatre étages et un jardin et l'autre, un logement plus petit, dans la rue des Gravilliers.

Philippe commence par étudier la peinture à Rome (Italie) où il se rend en 1660 pour raison de santé. Il en profite pour développer ses connaissances concernant la perspective.
De retour à Paris en 1664, il continue à peindre, et poursuit l'étude de la Géométrie avec son ami Abraham Bosse qui avait participé en 1641 à des cours de géométrie dispensé par Girard Desargues, décédé en 1661. Bosse avait publié et développé les idées géométriques de Desargues et créé sa propre école d'art en 1661.

En 1670, il épouse Catherine le Sage et le couple s'installe dans la maison de la rue Montmartre. De cette union naîtrons quatre enfants.
En 1673, il publie son premier ouvrage sur les *Coniques* dans la droite ligne de Desargues.
Le 26 janvier 1678, il est élu à l'Académie des Sciences dans la section astronomie.
L'année suivante, il change de point de vue en revenant à la méthode des coordonnées de René Descartes et publie *Les Nouveaux éléments des sections coniques* qu'il dédicace à Colbert, le ministre de roi soleil.

Le 1er avril 1681, son épouse décède et il se remarie très rapidement avec Cathérine Nonnet, le 18 septembre 1681. Il réside alors dans un petit appartement de l'Observatoire où son travail consiste au relevé des températures journalières et de la pluviométrie… ce qui le fera passer pour le fondateur de la météorologie.

En décembre 1682, il est nommé professeur au Collège de France. Quatre années après, il préside l'Académie Royale d'architecture après avoir été architecte à la cour sous Colbert et le Marquis de Louvois.

Cependant l'œuvre de Desargues continue à le fasciner. Poussé par le désir de faire la synthèse de tous les résultats concernant les coniques, il écrit en 1685 son grand ouvrage, un recueil de neuf livres intitulé
Sectiones conicae in novem libros distributæ [19], dans lesquels il part d'une propriété du cercle trouvée par Apollonius puis, place ce cercle à la base d'un cône pour en déduire par la méthode projective, les propriétés des sections coniques. Dans cette somme qui aura un grand succès en Europe, il établit les théorèmes principaux de la théorie des pôles et polaires, évoque le quadrangle complet, réfléchit sur les tangentes et normales à une coniques et traite des diamètres conjugués.

Rappelons que Monge mettra en usage la théorie des pôles et polaires jusque-là enfermée dans une relative obscurité et que ses élèves transformeront par polaires réciproques, des figures en d'autres où les droites correspondent à des points et des points à des droites ; cette transformation dite "par polaire réciproque" donnera naissance en 1829, au principe de dualité.

Il décède le 21 avril 1718 à Paris. Un éloge sera écrit par Bernard Le Bouyer de Fontenelle [20] dans son histoire de l'Académie des Sciences.

Rappelons que les ouvrages de Desargues étaient la plupart de simples essais ou brouillon-projets, imprimés parfois sur des feuilles volantes. Toutes les copies du principal livre de Desargues se sont perdues. L'appendice du livre d'Abraham Bosse se perdit à son tour, mais sera retrouvé en 1804. Par hasard Philippe de la Hire fit une copie du livre de Desargues en 1679. En 1845, Michel Chasles retrouvera dans une librairie parisienne, cette copie du *Brouillon project* ; l'original sera retrouvé en 1951 dans les rayons de la Bibliothèque nationale à Paris.

Pour terminer, signalons que deux des fils de Philippe de La hire suivront également une carrière scientifique : Gabriel-Philippe de La Hire (1677-1719) comme mathématicien et Jean-Nicolas de La Hire (1685-1727) comme botaniste. Ils furent également académiciens le premier en astronomie (1694) et le second en botanique (1710).
Augustin de la Hire, quant à lui, sera ingénieur des ponts et chaussées, s'occupant notamment de la rectification des rives du Drac, à Grenoble.

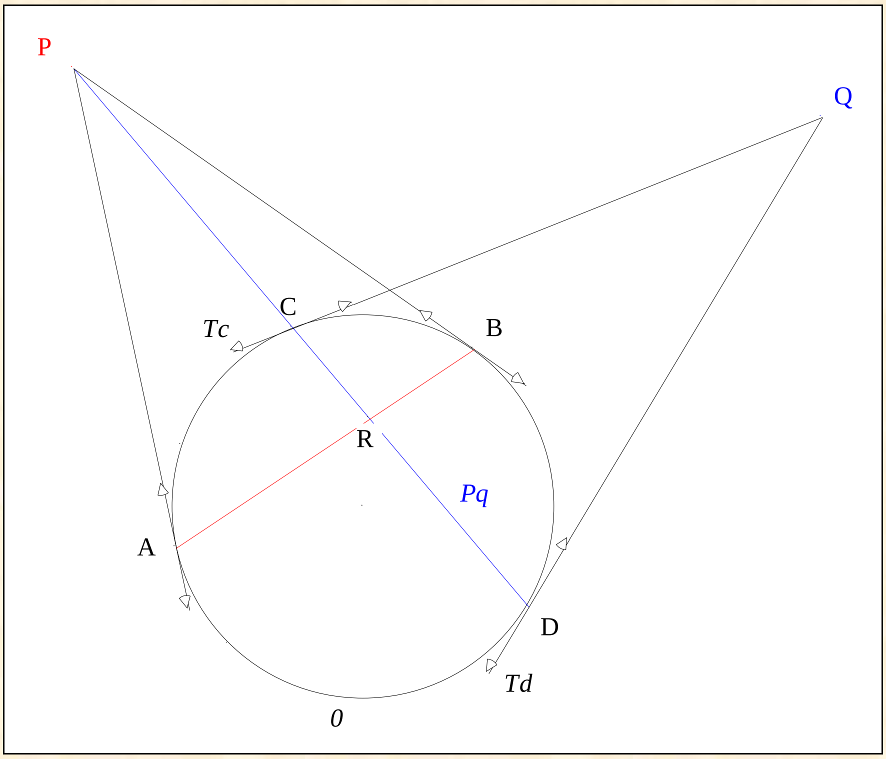
[18] Autoportrait
[19] http://en.wikisource.7val.com/wiki/Author:Philippe_de_la_Hire
[20] http://www.academie-sciences.fr/activite/archive/dossiers/Fontenelle/font_pdf/p76_89_vol3519.pdf

C. EXERCICES RÉSOLUS

1. Apollonius de Perge, *Coniques*, Livre III, proposition 37

VISION

Figure :

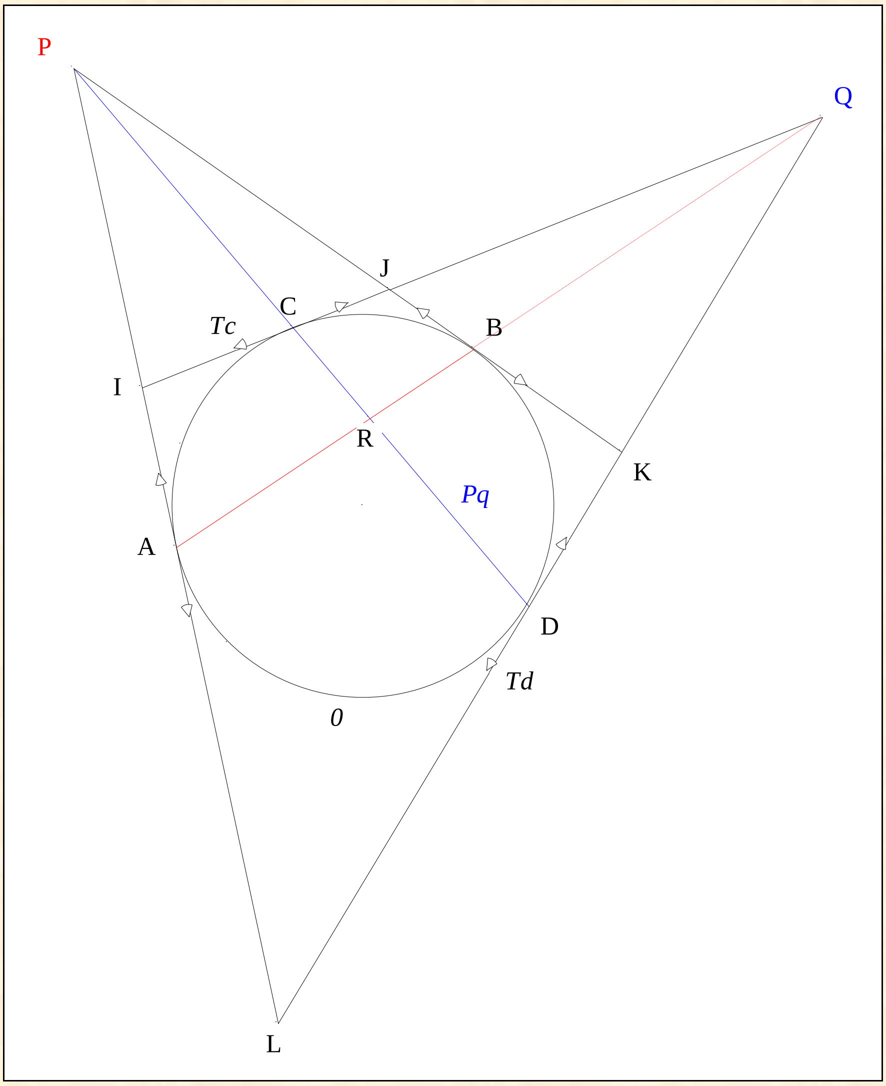


Traits :	*0*	un cercle,
	P	un point extérieur à *0*,
	A, B	les points de contact des tangentes à *0* issues de P.
	Pq	une sécante à *0* passant par P,
	R	le point d'intersection de *Pm* et (AB),
	C, D	les points d'intersection de *Pm* avec *0*,
	Tc, *Td*	les tangentes à *0* resp. en C, D
et	Q	le point d'intersection de *Tc* et *Td*.

Donné : le quaterne (C, D, R, P) est harmonique. [21]

VISUALISATION

[21] Apollonius de Perge (v. 262-v. 190 a.J.-C.), *Coniques*, Livre **III**, proposition **37**

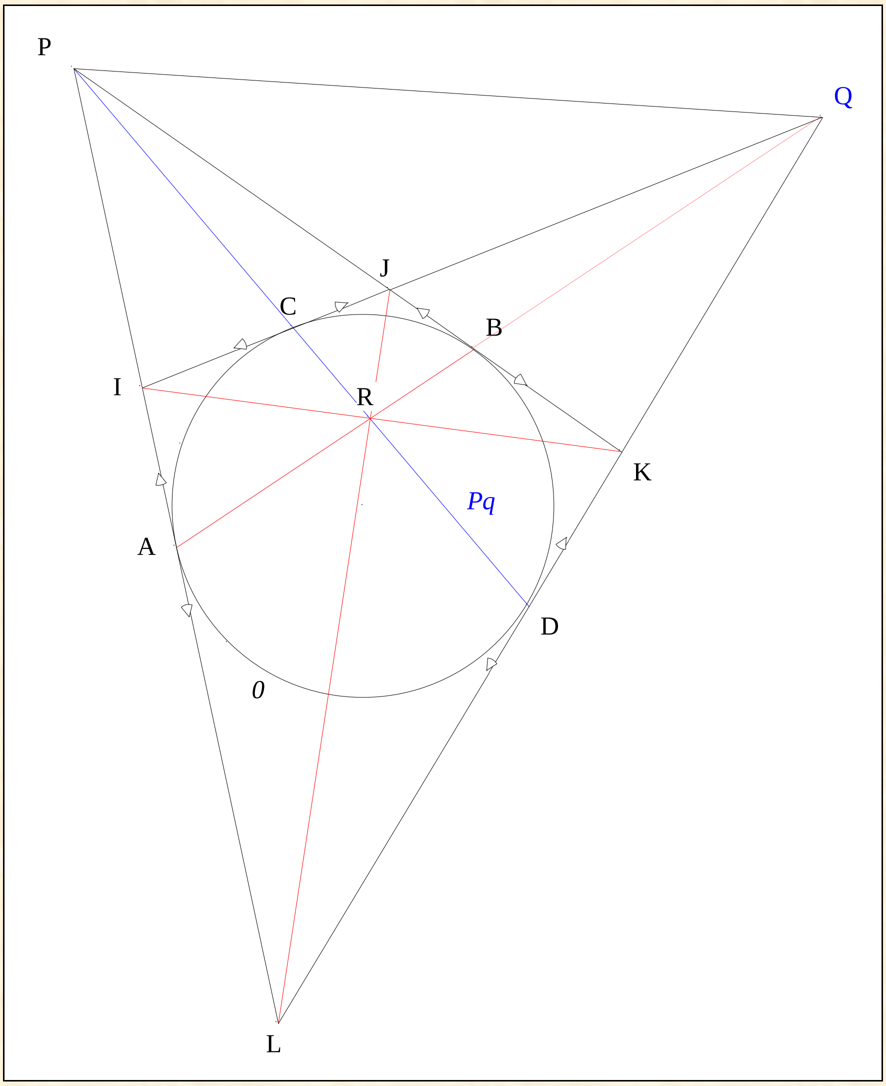


- **Scolies :** **(1)** (AB) est la polaire de P relativement à *0*
  (2) (CD) est la polaire de Q relativement à *0.*

- Par réciprocité polaire, P étant sur la polaire de Q, Q est sur la polaire de P.

- Notons I, J, les points d'intersection de (QC) resp. avec (PA), (PB)
  et K, L les points d'intersection de (QD) resp. avec (PB), (PA).

- **Scolie :** le quadrilatère IJKL est circonscriptible à *0*.



- D'après "Le théorème de Newton" appliqué à IJKL, (AB), (CD), (IK) et (JL) sont concourantes en R.

- D'après Pappus "Quadrilatère complet et diagonales" [22] appliqué à QJRK, le quaterne (I, L, A, P) est harmonique.

- **Conclusion :** par projection conique de sommet Q, le quaterne (C, D, R, P) est harmonique.

Énoncé traditionnel :

le point où chaque transversale rencontre la polaire du point fixe
est le conjugué harmonique de ce point fixe,
par rapport aux deux points où cette transversale rencontre le cercle.

Note historique : ce dernier résultat [23] en est la proposition fondamentale dont toutes les autres se déduisent dans le traité *Sectiones conicae in novem libros distributæ* [24] de de La Hire.

Archive :

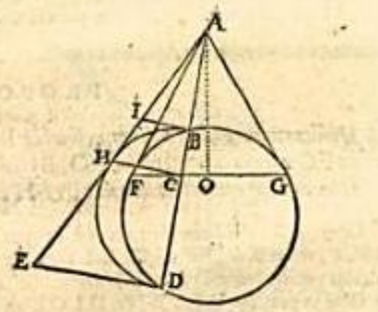
---

[22] Pappus d'Alexandrie, Collections, livre **VII**, proposition **131**
[23] de La Hire P., Sections coniques, Livre **I**, proposition **21**
[24] http://en.wikisource.7val.com/wiki/Author:Philippe_de_la_Hire

PROPOSITIO XXI.

Eſto circulus BFDG, *& in plano circuli à puncto* A *extra circulum ſumpto ductis contingentibus* AF, AG, *agatur recta* FG *conjungens tactus* F *&* G; *ſi à puncto* A *quælibet recta ducatur* AD *occurrens circulo in* B *&* D *&* FG *conjungenti tactus in* C.

Dico rectam AD *harmonicè dividi in punctis* A, B, C, D.



Super recta BD tanquam diametro deſcripto ſemicirculo BHD, & à puncto C erectâ perpendiculari CH ad rectam AC & occurrente circulo in H, recta ducta AH continget circulum in puncto H; nam biſecta FG in O & ducta AO, quadratum AF erit æquale duobus ſimul quadratis AO & FO; ſed quadratum AC æquale eſt duobus ſimul quadratis AO & CO, & rectangulum FC, CG cum quadrato CO æquale eſt quadrato FO; quare rectang. FC, CG cum quadrato AC æquale eſt quadrato AF.

Propter circulos rectangulum FC, CG æquale eſt rectangulo BC, DC quod etiam æquale eſt quadrato CH; erit igitur quadratum AC cum quadrato CH æquale quadrato AF quod eſt etiam æquale quadrato AH; ſunt igitur æquales AH & AF.

Sed in circulo BFD rectangulum DA, AB æquatur quadrato AF vel AH; quamobrem cum idem rectangul. DA, AB in circulo BHD ſit æquale quadrato AH, & punctum H exiſtat in peripheria circuli BHD recta AH tanget hunc circulum in puncto H.

Per puncta B & D erectis perpendicularibus BI, DE ad diametrum BD, quæ ſunt etiam contingentes circulum BHD, & occurrentibus contingenti AH in I & E, propter circulum rectæ IB, IH & ED, EH erunt æquales; ſed prop-

C

10 LIBER PRIMUS.

ter parallelas DE, BI; ut DA ad AB, ſic ſe habet DE ad BI vel HE ad HI; & ut HE ad HI ſic DC ad CB, quare propter ſimilitudinem rationum erit DA ad AB, ut DC ad CB, & per definitionem recta DA dividitur harmonicè in punctis ABCD, quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Converſa quoque patet, nempe recta DA occurrente circulo in D & B & diviſa harmonicè in punctis DCBA, C punctum diviſionis eſſe occurſum rectæ FG conjungentis tactus contingentium quæ à puncto A ducuntur; in recta enim AD poſitis tribus punctis ABD quæ ad diviſionem harmonicè pertineant aliud præter C reperiri non poteſt quod diviſionem perficiat per 10am propoſitionem.

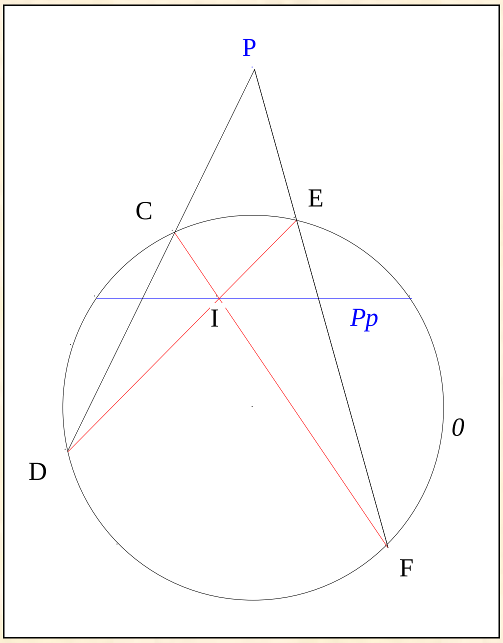
[25]

2. de La Hire, *Coniques*, Livre I, proposition 22 et 23

VISION

Figure :

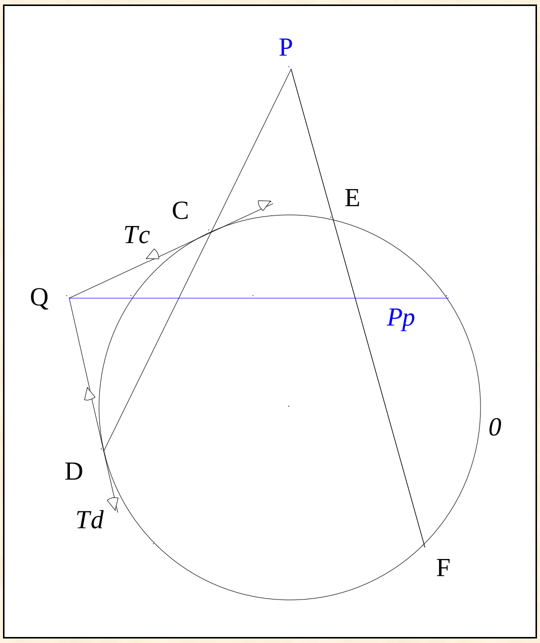
[25] http://en.wikisource.7val.com/wiki/Author:Philippe_de_la_Hire



Traits :	*0*	un cercle,
	P	un point extérieur à *0*,
	Pp	la polaire de P relativement à *0*,
	S1, *S2*	deux sécantes à *0* issues de P,
	C, D	les points d'intersection de *S1* avec *0*,
	E, F	les points d'intersection de *S2* avec *0*
et	I	le point d'intersection de (CF) et (DE).

Donné : I est sur *Pp*.

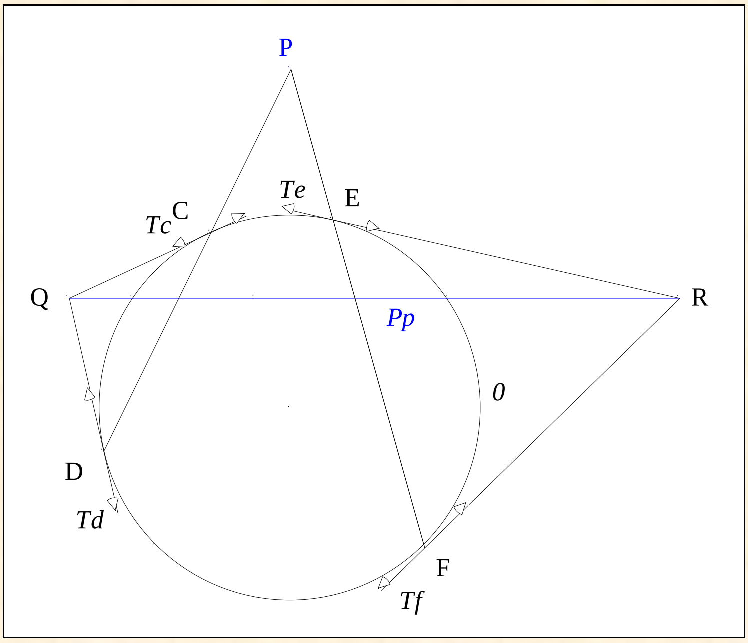
VISUALISATION



- Notons *Tc*, *Td* les tangentes à *0* resp. en C, D
  et Q le point d'intersection de *Tc* et *Td*.

- Par définition, (PCD) est la polaire de Q.

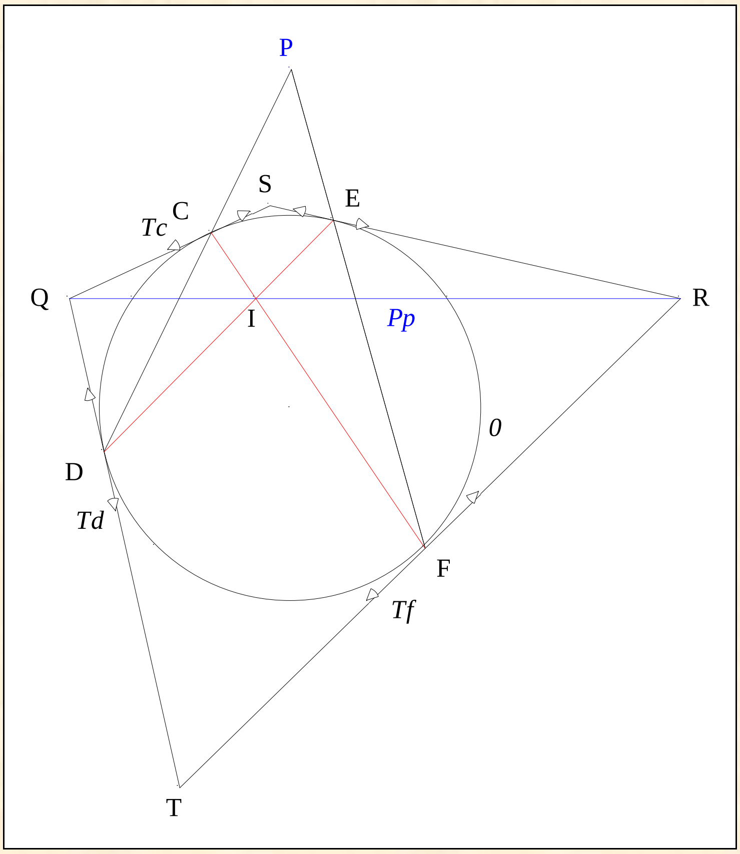
- Par réciprocité polaire, P étant sur la polaire de Q, Q est sur la polaire de P i.e. sur *Pp*.



- Notons *Te*, *Tf* les tangentes à *0* resp. en E, F
  et R le point d'intersection de *Te* et *Tf*.

- Par définition, (PEF) est la polaire de R.

- Par réciprocité polaire, P étant sur la polaire de R, R est sur la polaire de P i.e. sur *Pp*.



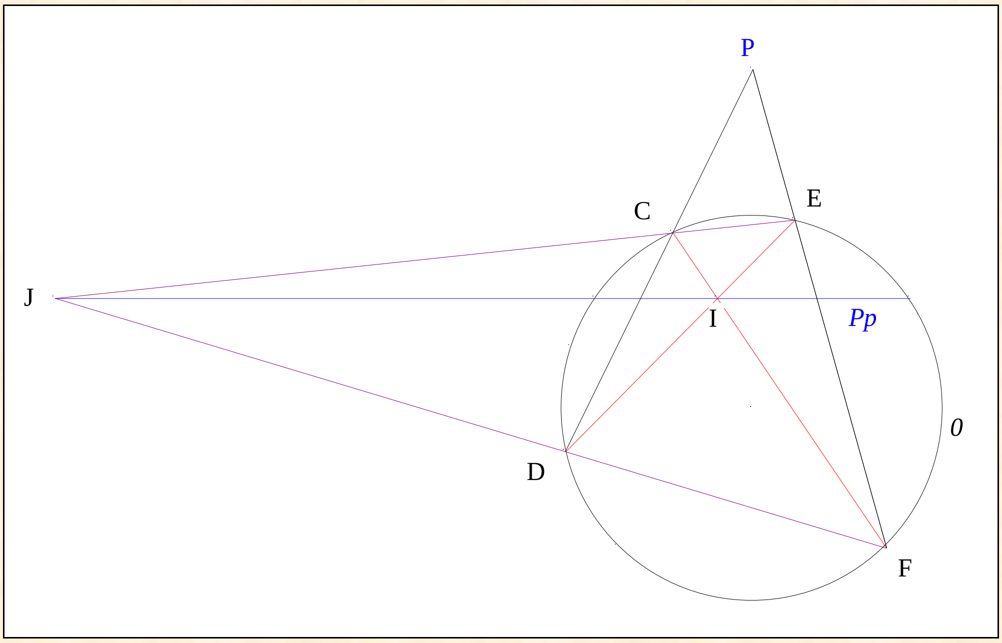
- Notons S, T les points d'intersection resp. de *Tc* et *Te*, *Td* et *Tf*.

- **Scolies :** **(1)** le quadrilatère QSRT est circonscriptible
  (2) *Pp* = (QR).

- D'après "Le théorème de Newton" appliqué à QSRT, (CF), (DE) et (QR) sont concourantes en I.

- **Conclusion :** I est sur (QR) i.e. *Pp*.

Scolie : le point J



- Notons J le point d'intersection de (CE) et (DF).

- **Conclusion :** I étant sur *Pp*, par application du "Tetragramma mysticum",
  nous montrerions que J est sur (QR) i.e. *Pp*.

Énoncé traditionnel :

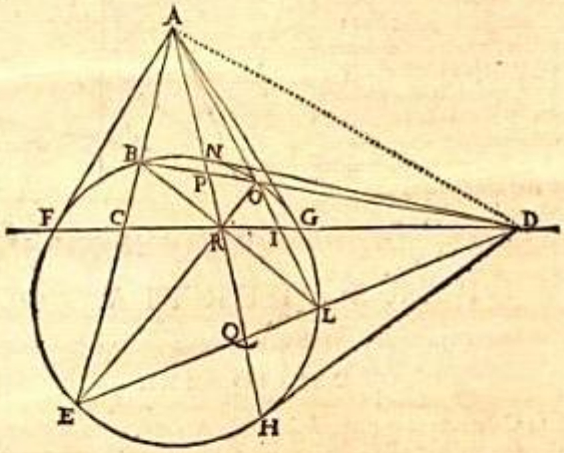
si, *par un point fixe on mène plusieurs transversales qui rencontrent un cercle,*
alors, *les droites qui joindront deux à deux les points de rencontre de deux quelconques des transversales se rencontreront sur la polaire du point fixe.*

Archive :

PROPOSITIO XXII.

A puncto A *extra circulum* E B G *sumpto, & in plano circuli ductis contingentibus* A F, A G, *junctisque tactibus à recta* F G *producta extra circulum; si ab eodem puncto* A *ducantur duæ rectæ* A E, A L *circulo occurrentes in* B, E *& in* O, L *punctis.*

Dico B O *&* E L *rectas sibi occurrere super recta* F G *in puncto* D *extra circulum, vel esse inter se parallelas & rectæ* FG; *& rectas* E O, B L *se mutuo decussare in eadem recta* FG *intra circulum in puncto* R.



Per præcedentem propositionem, rectæ A E & AL dividuntur harmonice in suis punctis ABCE, AOIL à puncto A, à circulo, & à conjungente tactus F G, quare per propositi. 18am rectæ BO, CI, EL conjungentes divisionum puncta conveniеnt in aliquod punctum D, vel erunt inter se parallelæ, & hoc punctum D erit in recta FG una conjungentium.

Eadem erit demonstratio pro rectis E O, BL, I C, quæ nequeunt esse parallelæ.

PROPOSITIO XXIII.

In figura propos. 22æ. *Iisdem manentibus ut supra, si rectæ* BO, E L *sibi invicem occurrant in* D, *per punctum* R *rectæ* FG *ubi concurrunt rectæ* EO, BL, *ductà rectà* A R *occurrente circulo in* N *&* H.

Dico contingentes circulum in N *&* H *convenire in punctum* D.

Cum A E dividatur harmonicè in punctis ABCE, rectæ R A, RB, RC, R E sunt harmonicales; quare rectæ D B & D E dividuntur harmonicè in punctis D O P B, & D L Q E ab his harmonicalibus; quare per coroll. 21æ propos. puncta P & Q sunt in recta conjungente tactus contingentium, quæ à puncto D ducuntur: sed per puncta P & Q nulla alia recta præter A H duci potest; quare contingentes in N & H concurrent in punctum D, quod erat propositum.

COROLLARIUM PRIMUM.

Si rectæ BO, E L sint inter se parallelæ, manifestum est rectam AR centro circuli occurrere, & contingentes in N & H punctis esse inter se parallelas & rectæ F G.

LIBER PRIMUS. 11

COROLLARIUM SECUNDUM.

Patet etiam à puncto A ductis contingentibus circulum AF, A G & recta F G D; si ab eodem puncto A ducatur quælibet A H quæ per centrum circuli non transeat, & AE; à puncto D rectæ F G in quod concurrunt contingentes in N & H, ductis DE, D B circulo iterum occurrentibus in L & O, rectam L O productam in punctum A convenire, & unamquamque rectarum AE, AH, AQ, AL, DE DF, DC, D B divisam esse harmonice in punctis ABCE, ANRH, APRQ, AOIL, DLQE, DGRF, DIRC, DOPB.

Idem erit si recta A H agatur per centrum circuli, ducanturque EL, BO parallelæ rectæ FG; exceptis tamen rectis EL, FG, CI, BO quæ bifariam dividentur à diametro AH quod satis manifestum est ex proprietatibus circuli & ipsius diametrorum.

[26]

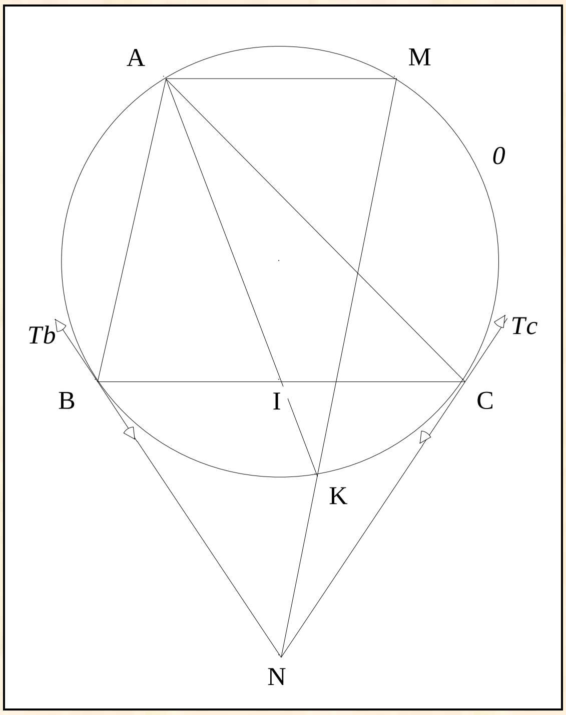
[26] http://en.wikisource.7val.com/wiki/Author:Philippe_de_la_Hire

D. APPENDICE

1. Un lemme

VISION

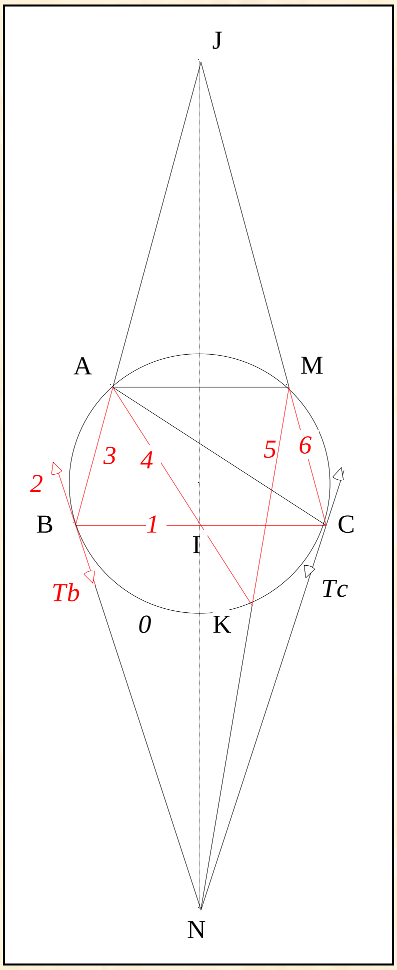
Figure :



Traits :	ABC	un triangle,
	0	le cercle circonscrit à ABC,
	Tb, *Tc*	les tangentes à *0* resp. en B, C,
	N	le point d'intersection de *Tb* et *Tc*,
	M	un point de *0*,
	K	le second point d'intersection de (MN) avec *0*
et	I	le point d'intersection de (AK) et (BC).

Donné : (AM) est parallèle à (BC) *si, et seulement si,* I est le milieu de [BC].

VISUALISATION NÉCESSAIRE



- Notons J le point d'intersection de (AB) et (MC).

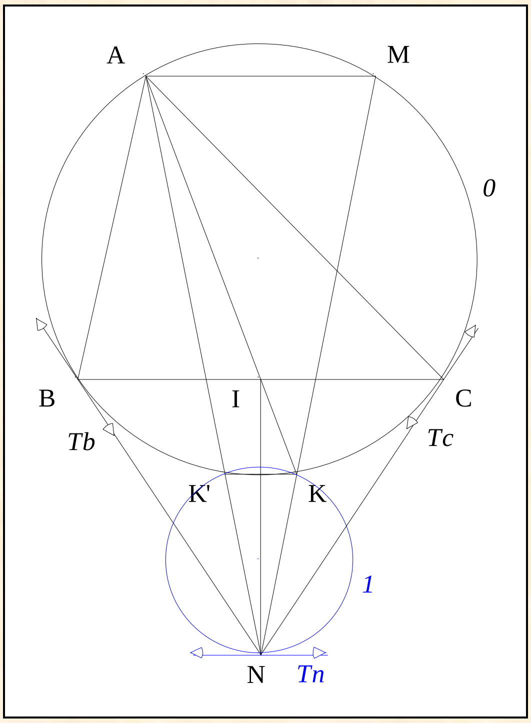
- **Scolies :** **(1)** le trapèze cyclique ABCM est isocèle
  (2) le triangle JBC est J-isocèle et JB = JC
  (3) NB = NC.

- D'après "Le théorème de la médiatrice", (JN) est la médiatrice de [BC].

- D'après Carnot "Pentagramma mysticum", (INJ) est la pascale de l'hexagone CB *Tb* AKMC.

- **Conclusion :** I est le milieu de [BC].

VISUALISATION SUFFISANTE



- Notons K' le second point d'intersection de (AN) et *0*
  1 le cercle circonscrit au triangle NKK'
  et *Tn* la tangente à *2* en N.

- **Scolies :** **(1)** (AN) est la A-symédiane de ABC
  (2) (KK') // (BC) ;
  (3) BK'KC est un trapèze isocèle.

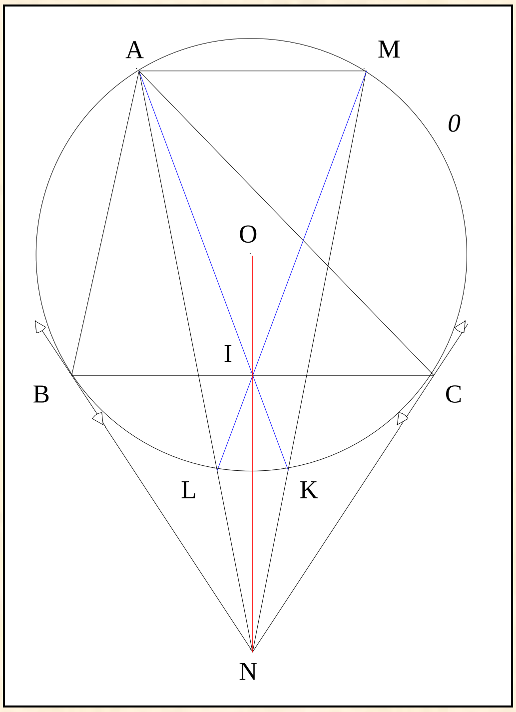
- Nous avons : le triangle NCB est A-isocèle ;
  en conséquence, la N-médiane (NI) est aussi la N-hauteur de NCB ;
  le trapèze BK'KC étant isocèle, (NI) est la médiatrice de [KK'] ;
  en conséquence, le triangle NKK' est N-isocèle.

- D'après "La tangente au sommet", *Tn* // (KK') ;
  nous avons : (KK') // (BC) ;
  par transitivité de la relation //, *Tn* // (BC).

- Les cercles *0* et *1*, les points de base K' et K, les moniennes(AK'N) et (MKN) conduisent au théorème **1** de Reim ; il s'en suit que (AM) // *Tn*.

- **Conclusion :** par transitivité de la relation //, (AM) // (BC).

Scolies : **(1)** un croisillon



- En partant du triangle MBC, puis en considérant le point A tel que (MA) soit parallèle à (BC), nous montrerions que (ML) passe par I.

(2) Un triangle isocèle

- nous avons : (NIO) est la médiatrice de [BC];
  par hypothèse, (BC) // (AM) ;
  en conséquence, (NIO) est la médiatrice de [AM].

- **Conclusion :** d'après "Le théorème de la médiatrice", le triangle IMA est I-isocèle.